

O USO DE POLINÔMIOS CÚBICOS DE HERMITE NO  
PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS DE MANIPULADORES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

O USO DE POLINÔMIOS CÚBICOS DE HERMITE NO  
PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS DE MANIPULADORES

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU

DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

EDISON DA ROSA

FLORIANÓPOLIS, MAIO 1991.

O USO DE POLINÔMIOS CÚBICOS DE HERMITE NO  
PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS DE MANIPULADORES

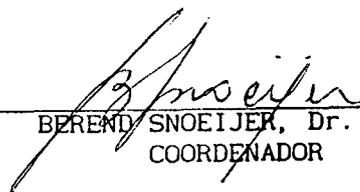
EDISON DA ROSA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA.

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO SÓLIDOS,  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA.



NELSON BACK, Ph. D.  
ORIENTADOR



BEREND SNOEIJER, Dr. Ing.  
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:



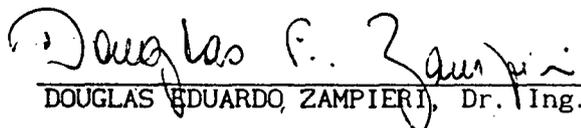
NELSON BACK, Ph. D.



ARNO BLASS, Ph. D.



CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph. D.



DOUGLAS EDUARDO ZAMPIERI, Dr. Ing.



LUIZ BEVILACQUA, Ph. D.

À  
OLGA,  
CÁSSIA,  
LEONARDO e  
BRUNO

## AGRADECIMENTOS

O autor, ao término deste trabalho, deseja agradecer a todos que direta ou indiretamente colaboraram para a sua conclusão, e em especial,

A minha esposa Olga, pelas incontáveis horas de convívio que não foram desfrutadas e pela sua compreensão;

Ao Prof. Nelson Back, orientador e amigo, que acompanhou e incentivou este trabalho desde o seu início, que com suas inúmeras sugestões permitiu atingir a forma atual;

Ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos, por suas sugestões e indicações de melhorias no trabalho preliminar;

Ao Prof. Luiz Bevilacqua que em um primeiro instante indicou a viabilidade deste trabalho;

À srta. Isolene Bernadete Hoffmann, que muito se dedicou nos serviços de digitação dos originais deste trabalho.

NOMENCLATURA.

DEFINIÇÕES.

RESUMO.

ABSTRACT.

1. INTRODUÇÃO.	1
1.1. A necessidade de definir trajetórias.	2
1.2. O enfoque proposto.	4
2. PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS EM ROBÓTICA.	5
2.1. Conceitos de robótica.	5
2.2. Planejamento de trajetória.	11
2.3. Métodos usuais de planejamento de trajetória.	14
2.4. Planejamento em coordenadas de junta.	18
2.5. Planejamento em coordenadas cartesianas.	20
2.6. Discussão sobre planejamento de trajetória.	25
3. USO DOS POLINÔMIOS CÚBICOS DE HERMITE NO PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS DE MANIPULADORES.	28
3.1. Ajuste de curvas e splines.	29
3.2. Trajetória com polinômios cúbicos de Hermite.	30
3.3. Propriedades dos polinômios cúbicos de Hermite.	31
3.4. Efeitos da função $t(s)$ não linear.	33
4. TRAJETÓRIA NÃO ADAPTATIVA.	37
4.1. Trajetória de três trechos.	37
4.2. Trajetória de quatro trechos.	42
4.3. Trajetória genérica.	46
4.4. Resumo das equações relevantes em cada formulação.	48
4.5. Aplicações das trajetórias formuladas.	50
5. TRAJETÓRIA ADAPTATIVA.	57
5.1. Conceito.	58
5.2. Formulação.	59
5.3. Aplicações.	62
6. RESULTADOS COMPARATIVOS.	66
7. CONCLUSÕES.	75
REFERÊNCIAS.	77

## APÊNDICE.

A1. Formulação de trajetórias.	80
A1.1. Uma maneira de obter um polinômio cúbico de Hermite.	80
A1.2. Formulação usando os polinômios cúbicos de Hermite.	82
A2. Desenvolvimento detalhado da formulação de trajetórias.	86
A2.1. Trajetória de três trechos.	86
A2.2. Trajetória de quatro trechos.	93
A2.3. Trajetória genérica.	98
A2.4. Trajetória de dois trechos.	108
A2.5. Tabelas da matriz $A_{22}$ e sua inversa.	111
A3. Manipulador exemplo.	114
A3.1. Cinemática.	114
A3.2. Célula de trabalho e visualização.	115
A4. Trajetórias do tipo 4-3-4 e 3-5-3.	117
A4.1. Formulação de uma trajetória do tipo 4-3-4.	117
A4.2. Formulação de uma trajetória do tipo 3-5-3.	120
A5. Outros resultados.	122
A5.1. Trajetórias para um grau de liberdade.	122
A5.2. Trajetórias no espaço 3D.	126
A6. Os sistemas computacionais.	130
A6.1. O sistema TRA-GEN.	130
A6.2. O sistema TRA-3D.	132

## NOMENCLATURA.

A relação das variáveis utilizadas no desenvolvimento das diferentes formulações de trajetórias, através dos polinômios cúbicos de Hermite (PCH), é logo a seguir colocada. A figura N.1 mostra algumas destas variáveis para um trecho genérico  $i$ .

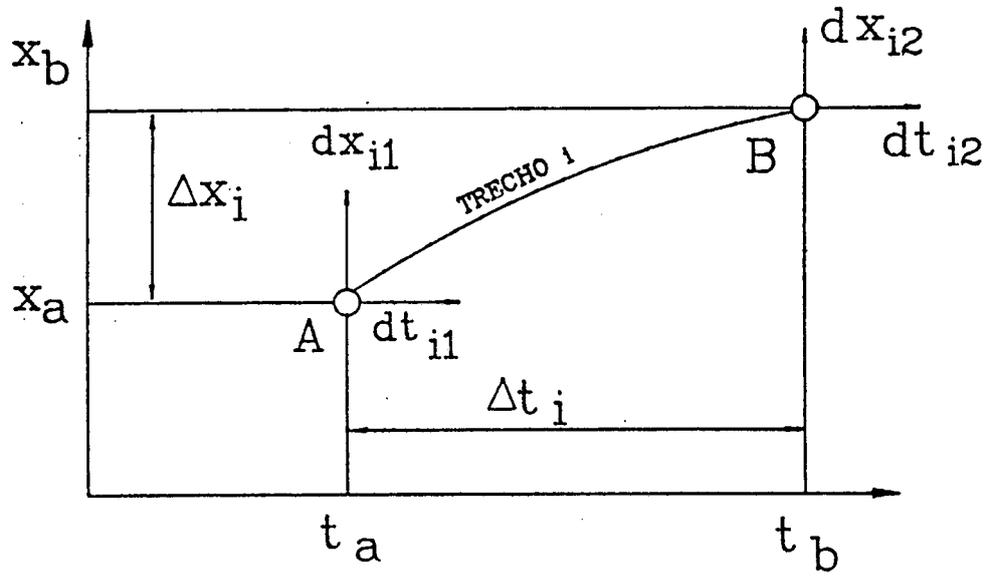


Figura N.1 - Notação utilizada para identificar as variáveis que definem um trecho de trajetória, usando a formulação dos polinômios cúbicos de Hermite.

- A - matriz de configuração inicial do manipulador
  - B - matriz de configuração final do manipulador
  - D - matriz de transformação da configuração inicial na final
  - J - matriz Jacobiana do manipulador
  - $R_a$  - matriz de rotação do pulso sobre o eixo longitudinal
  - $R_o$  - matriz de rotação do pulso sobre o eixo transversal
  - $R_m$  - quatérnion na trajetória cartesiana
  - $R_x$  - quatérnion na trajetória de coordenadas de junta
  - T - matriz de translação
  - X - vetor de coordenadas cartesianas
  - $\Theta$  - vetor de coordenadas de junta
- 
- a - aceleração.
  - $a_o$  - aceleração inicial.
  - $\bar{a}$  - máxima aceleração admissível.

- $dF_1$  - derivada da função  $F(s)$  no ponto inicial do PCH.  
 $dF_2$  - derivada da função  $F(s)$  no ponto final do PCH.  
 $dt_1$  - derivada da função  $t(s)$ , no ponto  $s = 0$ .  
 $dt_2$  - derivada da função  $t(s)$ , no ponto  $s = 1$ .  
 $dt_{i1}$  - derivada de  $t(s)$ , no ponto  $s = 0$ , para o trecho  $i$ .  
 $dt_{i2}$  - derivada de  $t(s)$ , no ponto  $s = 1$ , para o trecho  $i$ .  
 $dx_1$  - derivada da função  $x(s)$ , no ponto  $s = 0$ .  
 $dx_2$  - derivada da função  $x(s)$ , no ponto  $s = 1$ .  
 $dx_{i1}$  - derivada de  $x(s)$ , no ponto  $s = 0$ , para o trecho  $i$ .  
 $dx_{i2}$  - derivada de  $x(s)$ , no ponto  $s = 1$ , para o trecho  $i$ .
- $K$  - relação de velocidades para a trajetória de três trechos.  
 $l_1$  - comprimento do primeiro membro do manipulador.  
 $l_2$  - comprimento do segundo membro do manipulador.  
 $l_3$  - comprimento do terceiro membro do manipulador.
- $r$  - parâmetro de trajetória nas coordenadas cartesianas.  
 $r_{x1}$  - relação de incrementos  $\Delta x$ .  
 $r_{x4}$  - relação de incrementos  $\Delta x$ .
- $s$  - parâmetro da trajetória nas coordenadas de junta.
- $t_i$  - instante em que o  $i$ ésimo ponto da trajetória é atingido.  
 $t_{,s}$  - primeira derivada da função  $t(s)$ .  
 $t_{,ss}$  - segunda derivada da função  $t(s)$ .  
 $t_A$  - tempo no ponto de aproximação.  
 $t_B$  - tempo no ponto de bifurcação.  
 $t_D$  - tempo de retardo.  
 $t_F$  - tempo no ponto final.  
 $t_R$  - tempo de redefinição da trajetória.
- $v$  - velocidade.  
 $v_o$  - velocidade inicial.
- $x_i$  - posição no ponto  $i$ , especificado, da trajetória.  
 $x_{,s}$  - primeira derivada da função  $x(s)$ .  
 $x_{,ss}$  - segunda derivada da função  $x(s)$ .  
 $\dot{x}$  - primeira derivada de  $x$ , em relação a  $t$ .  
 $\ddot{x}$  - segunda derivada de  $x$ , em relação a  $t$ .  
 $x_B$  - coordenada no ponto de bifurcação.  
 $\dot{x}_B$  - velocidade no ponto de bifurcação.  
 $\ddot{x}_B$  - aceleração no ponto de bifurcação.

- $x_F$  - coordenada no ponto final.  
 $\dot{x}_F$  - velocidade no ponto final.  
 $\ddot{x}_F$  - aceleração no ponto final.
- $\Delta t$  - acréscimo de tempo.  
 $\Delta t_i$  - acréscimo de tempo para o intervalo i.  
 $\Delta x$  - acréscimo de coordenada.  
 $\Delta x_i$  - acréscimo de coordenada para o intervalo i.
- $\theta_1$  - valor para a primeira coordenada de junta.  
 $\theta_2$  - valor para a segunda coordenada de junta.  
 $\theta_3$  - valor para a terceira coordenada de junta.

## DEFINIÇÕES.

Nesta secção estão colocadas as principais definições dos termos e variáveis que são utilizados ao longo do texto, para facilitar sua leitura .

**Atuador** - Elemento de acionamento de uma determinada junta do manipulador.

**Cinemática direta** - Processo para obter a posição e orientação do efetuador, em coordenadas cartesianas, quando fornecidas as coordenadas de junta, que definem a configuração.

**Cinemática inversa** - Processo analítico ou numérico para obter as coordenadas de junta, relativas a uma dada posição e orientação do efetuador em coordenadas cartesianas.

**Efetuador ( end effector )** - Elemento ativo do manipulador, que realiza o trabalho propriamente dito a que o manipulador se propõe. Pode ser na forma de uma garra, de uma ferramenta de montagem, de uma pistola de solda ou de pintura, etc..

**Jacobiana** - Matriz que relaciona os incrementos infinitesimais das coordenadas cartesianas, com os incrementos das coordenadas de junta, conforme equação (2.15).

**Junta** - Elemento construtivo do manipulador que faz a conexão entre dois membros ou ligações, permitindo movimento relativo entre as partes, podendo ser de rotação ou de translação.

**Aprendizado ( learning )** - Processo primitivo de programação de manipuladores, onde o efetuador é posicionado de forma seqüencial ao longo da trajetória, sobre pontos bastante próximos entre si, e a posição destes pontos, em coordenadas de junta, é memorizada pelo sistema de programação.

**Ligação ( link )** - Elemento construtivo do manipulador, formando a parte estrutural que une duas juntas consecutivas.

**Manipulador** - Mecanismo servocontrolado concebido para a execução de tarefas que estão programadas na memória do sistema.

Programação off-line - Processo de programação em que esta é efetuada em um sistema dedicado, onde o usuário pode testar várias alternativas e possibilidades, podendo contar inclusive com uma simulação tridimensional do programa.

Pulso - Elemento construtivo do manipulador, usualmente colocado no extremo móvel deste, onde é fixado o efetuador, com movimento em geral esférico, ou seja, com rotação segundo três eixos mutuamente ortogonais.

Quatérnion - Representação matemática de entidades formadas por um escalar  $s$  e por um vetor  $\mathcal{X}$ , notado como  $\mathbb{R} = (s, \mathcal{X})$ , útil na representação de rotações finitas por exemplo.

Percurso - Conjunto de pontos no espaço que formam o lugar geométrico por onde passa a extremidade do efetuador. Pode conter adicionalmente a informação de orientação do efetuador em cada ponto.

Sensores externos - Dispositivos que obtém informações acerca do meio ambiente onde o manipulador se insere, no que diz respeito às distâncias, proximidade, tato, etc.

Sensores internos - Dispositivos que detectam as variáveis de estado do manipulador, como posição e velocidade, em cada uma das juntas do manipulador.

Trajetória - Conjunto de dados referentes à posição, velocidade e aceleração, ao longo do tempo, que o efetuador descreve no espaço, seja no cartesiano, seja no de junta, ao executar uma dada operação.

## RESUMO.

Este trabalho trata do problema de planejamento de trajetórias de manipuladores servocontrolados, com ênfase no uso dos polinômios cúbicos de Hermite para a geração da trajetória. Esta é formada pela justaposição de vários trechos, onde cada trecho tem a sua formulação dada por um polinômio de Hermite. Com base neste princípio vários tipos de trajetórias foram formulados, como a de três trechos, a de quatro trechos, a genérica. Uma outra aplicação deste tipo de formulação é a definição de trajetórias adaptativas, com possibilidade de redefinição do objetivo da trajetória em tempo real. Estas formulações são usadas na simulação de um manipulador articulado, dentro de uma célula de trabalho.

## ABSTRACT.

The problem of generating a trajectory for a servo controlled manipulator is treated in this work. The main objective is to use the Hermite cubic polynomials for the trajectory definition. The trajectory is built by the connection of several parts, each one with its own Hermite cubic polynomial. Based in this methodology, some trajectory formulations are developed, as the three parts, the four parts and a generic one. Based also on the Hermite cubic polynomials, it is also proposed a formulation for adaptative trajectories, which allows for the terminal point redefinition, in real time, as needed in a collision avoidance strategy. These formulations are used in an articulated manipulator simulation, working inside a manufacturing cell.

## CAPÍTULO 1.

### INTRODUÇÃO.

Com a nova revolução industrial, decorrente da maciça aplicação da informática no processo produtivo, seja a nível de desenvolvimento de produto, a nível de fabricação e controle de qualidade, ou a nível de planejamento e gerenciamento, a necessidade de um melhor uso de sistemas e conceitos de automação industrial se faz sentir, visando uma crescente integração entre os sistemas e o emprego de processos inteligentes, capazes de tomarem decisões, não ficando assim dependentes de uma programação rígida e pré-estabelecida. No âmbito da automação da manufatura, o conceito de células flexíveis de fabricação, por exemplo, é um campo de aplicação de manipuladores mecânicos onde a tendência atual é o uso de sistemas com sensores, sejam de proximidade, de tato, ou de visão, que fornecem assim ao sistema de controle do manipulador informações acerca do meio ambiente. Estas informações podem então ser interpretadas e, se o sistema de controle julgar necessário, redefinir o processo ou a tarefa do manipulador, como por exemplo no caso de uma situação de emergência quando for detectado um obstáculo estranho à célula.

Assim, em sistemas robotizados com sensores, a trajetória, descrita pela garra ou ferramenta do manipulador, não deve ser tratada de forma rígida, onde é pré-definida através de uma programação "off-line" ou de um sistema de "learning". De modo a responder aos sinais enviados pelos sensores externos, o sistema de controle do manipulador deve ser capaz de efetuar alterações de trajetória, seja em termos de um desvio do obstáculo entre o manipulador e o objetivo, seja a alteração da posição do próprio objetivo ou ponto alvo, ou ainda do tempo em que deve ser atingido.

Quando a trajetória é alterada em função da resposta dos sensores, a programação deve também ser alterada para respeitar as indicações destes sensores. Deste modo, o problema que se coloca é de o manipulador, que já está se movendo, segundo uma dada trajetória, ter que recalcular uma nova trajetória em vista da mudança da posição do objetivo ou da presença de obstáculos. Assim, este trabalho explora o conceito de planejamento de trajetória, com o uso de polinômios cúbicos de Hermite, definidos sobre trechos da trajetória, tanto para uma trajetória pré-definida, via uma programação "off-line", como também para uma trajetória adaptativa, com o objetivo variável ao longo do tempo, que possa ser implementada em sistemas de manipuladores com sensores.

### 1.1. A NECESSIDADE DE DEFINIR TRAJETÓRIAS.

Um dos pontos fundamentais para a automação industrial é o emprego de sistemas de manipuladores controlados digitalmente, para uso nas mais diferentes aplicações, como pega de peças, transporte destas entre dois pontos, montagem de produtos, pintura, solda, e inúmeras outras aplicações. Uma classificação tradicional quanto ao tipo de trajetória que o manipulador descreve distingue entre trajetórias ponto a ponto, e trajetórias de interpolação, [12]. Uma trajetória ponto a ponto é especificada para o sistema de controle de manipulador apenas com alguns poucos pontos, onde o sistema de controle deve então estabelecer uma estratégia para, partindo de um ponto, atingir o ponto seguinte. Esta estratégia é usualmente estabelecida usando a velocidade máxima que o manipulador consegue desenvolver para cada um dos eixos. Outro tipo de trajetória é a de interpolação, onde agora o sistema de controle recebe informações complementares, definindo não só pontos intermediários, mas também a velocidade do manipulador, com o sistema de controle gerando pontos intermediários, uniformemente espaçados no tempo, de acordo com um algoritmo de interpolação linear, ou circular, por exemplo. No que diz respeito à exigência de desempenho do manipulador, quanto ao tipo de trajetória percorrida durante a movimentação, é possível classificar segundo duas categorias, figura 1.1, como segue:

#### - Trajetória de transporte ou de movimentação:

É o caso típico quando o manipulador realiza o movimento entre dois pontos perfeitamente definidos no espaço, sendo livre a trajetória seguida entre estes dois pontos. Aplicações típicas são a pega de peças em um ponto e descarga em outro, montagens de produtos e operações de transferência de uma forma geral. Uma variante desta trajetória é a trajetória de movimentação com restrições, onde são adicionados pontos intermediários, pelos quais a trajetória deve passar, de modo a permitir um melhor controle sobre esta, como se requer no desvio de obstáculos.

#### - Trajetória de precisão:

Quando o importante passa a ser a trajetória propriamente dita e não os pontos de início e fim, é necessário que esta respeite o máximo possível a trajetória idealizada, de modo a cumprir adequadamente a tarefa. Aplicações típicas neste caso são as de pintura, de rebarbeamento, de solda elétrica a arco ou a ponto, bem como outras, em que existe uma trajetória ideal que deva ser seguida tanto quanto possível.

Para a trajetória de transporte são relevantes as posições dos pontos de início e de término, não importando muito a forma da trajetória entre estes dois pontos, a menos que existam obstáculos no meio do percurso, ou então que a

trajetória esteja fora do espaço de trabalho do manipulador. Para uma trajetória de precisão, os pontos de início e de fim da trajetória não são fundamentais, mas o acompanhamento exato da trajetória pretendida é essencial. Este tipo de trajetória pode ser considerada, em um grande número de casos de aplicação prática, como um segmento de reta, ou um arco de circunferência, por exemplo.

Em qualquer um dos casos de utilização de sistemas de manipuladores, é necessário realizar a programação do processo a ser desenvolvido pelas várias partes que formam a estrutura do manipulador. Esta programação normalmente usa procedimentos com base em trajetórias formadas por segmentos de reta, ou então por um polinômio de grau elevado, para a trajetória como um todo. Isso envolve a solução de um sistema de equações para definir os coeficientes, a partir de condições de contorno pré-estabelecidas.

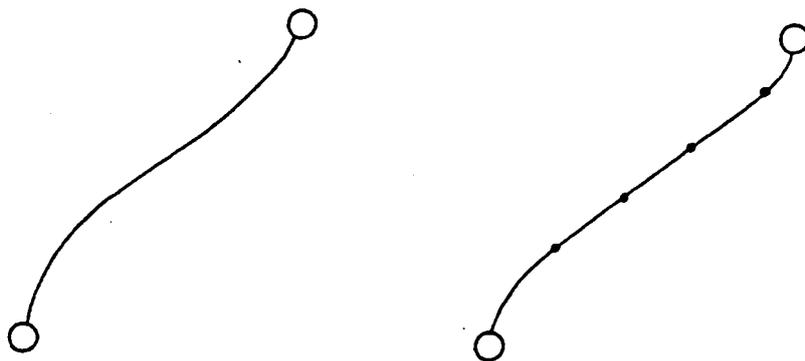


Figura 1.1 - Trajetória de movimentação e trajetória de precisão.

Como será visto no presente trabalho, com o uso de polinômios cúbicos de Hermite é possível obter uma solução explícita para a trajetória, a partir das condições de contorno, nos pontos extremos, e de pontos intermediários que são usados para controlar a trajetória no espaço cartesiano.

Esta formulação pode ser aplicada tanto para o planejamento de uma trajetória de transporte, como para o planejamento de uma trajetória de precisão, onde é usado um maior número de pontos para especificar a trajetória pretendida. Finalmente a formulação é usada para o planejamento de trajetórias adaptativas, onde então a trajetória deve ser passível de ser reprogramada em tempo real, quando uma indicação é fornecida pelo sistema de sensores e o sistema de controle do manipulador fornece uma resposta àquela indicação.

Um ponto importante desta formulação, e sua principal vantagem, é a solução da trajetória colocada de uma forma explícita, com uma sequência de cálculo estabelecida por um conjunto de equações algébricas ou de um sistema de equações, que não requerem a solução iterativa para determinar os coeficientes apropriados. Tal vantagem se justifica em um sistema de controle em tempo real, onde a trajetória deve ser calculada com o mínimo de esforço computacional,

principalmente no caso de uma formulação adaptativa, em que o objetivo final da trajetória é móvel.

## 1.2. O ENFOQUE PROPOSTO.

O presente trabalho se propõe a desenvolver uma família de formulações para o planejamento de trajetórias de manipuladores, com o uso dos polinômios cúbicos de Hermite (PCH), com as mais diferentes possibilidades de aplicação, seja em trajetórias de movimentação, em trajetórias de precisão, ou, ainda, em trajetórias adaptativas, aplicadas a qualquer um dos dois tipos citados acima. Conforme já comentado, em qualquer um dos casos se busca uma simplicidade algébrica, que se traduz em um reduzido tempo de processamento numérico, fundamental para aplicações com sensores externos, aplicações estas que devem ter a sua trajetória recalculada em tempo real como consequência de algum sinal enviado pelo sistema de sensores. O trabalho propriamente dito divide-se em cinco grandes partes, respectivamente nos Capítulos 2, 3, 4, 5 e 6. A primeira parte diz respeito a uma apresentação dos conceitos relacionados à robótica, à tarefa de planejamento de trajetórias e, finalmente, à revisão dos procedimentos e formulações que estão disponíveis na literatura especializada.

A segunda parte apresenta os polinômios cúbicos de Hermite e as suas características básicas, essenciais para uma compreensão do seu emprego no planejamento de trajetórias, principalmente no que diz respeito a sua representação paramétrica, seja para as funções que calculam as dimensões de coordenadas espaciais, como para a função que calcula a dimensão tempo.

A terceira parte do trabalho detalha a aplicação dos PCH na formulação de trajetórias pré-programadas, sejam estas de movimentação, sendo definidos apenas os pontos extremos, sejam de precisão, com pontos intermediários. Em ambos os casos visa-se, sempre que possível, a obtenção de uma solução algébrica explícita.

A quarta parte, por sua vez, apresenta a formulação de trajetórias adaptativas, em que uma trajetória inicial qualquer, seja ela obtida pelos métodos que usam os polinômios cúbicos de Hermite, ou qualquer outro tipo de formulação, é redefinida, com a especificação de posição do novo objetivo, bem como o instante de tempo em que tal objetivo deva ser alcançado.

Finalmente a quinta parte fornece uma série de resultados obtidos com as formulações propostas, procurando salientar pontos característicos destas formulações. Aqui também é feita a comparação entre a proposta deste trabalho com formulações que se encontram na bibliografia.

## CAPÍTULO 2.

### PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS EM ROBÓTICA.

Neste Capítulo estão apresentados todos os conceitos e informações que são necessários para fundamentar o presente trabalho. Assim, na secção 2.1 é feita uma descrição sobre os aspectos básicos que envolvem um sistema robótico, quanto aos elementos que formam o sistema como um todo, bem como quanto aos elementos que constituem o manipulador. Nas secções 2.2 e 2.3 são apresentados, de uma maneira genérica, os conceitos relacionados à tarefa de planejamento de trajetória, enquanto que as secções 2.4 e 2.5 detalham os trabalhos descritos e disponíveis na literatura especializada. O Capítulo encerra com uma discussão sobre os vários procedimentos e métodos de planejamento de trajetória, e acerca das características e vantagens ou desvantagens que cada um possui, direcionando assim o enfoque a ser dado quando do desenvolvimento do presente trabalho.

#### 2.1. CONCEITOS DE ROBÓTICA.

A idéia básica de um sistema robótico é de um mecanismo servocontrolado que executa tarefas de acordo com um padrão pré estabelecido de movimentos e de ações, embora passível de tomada de decisões, quando conectado a sensores externos. A figura 2.1 a seguir ilustra esquematicamente a idéia exposta.

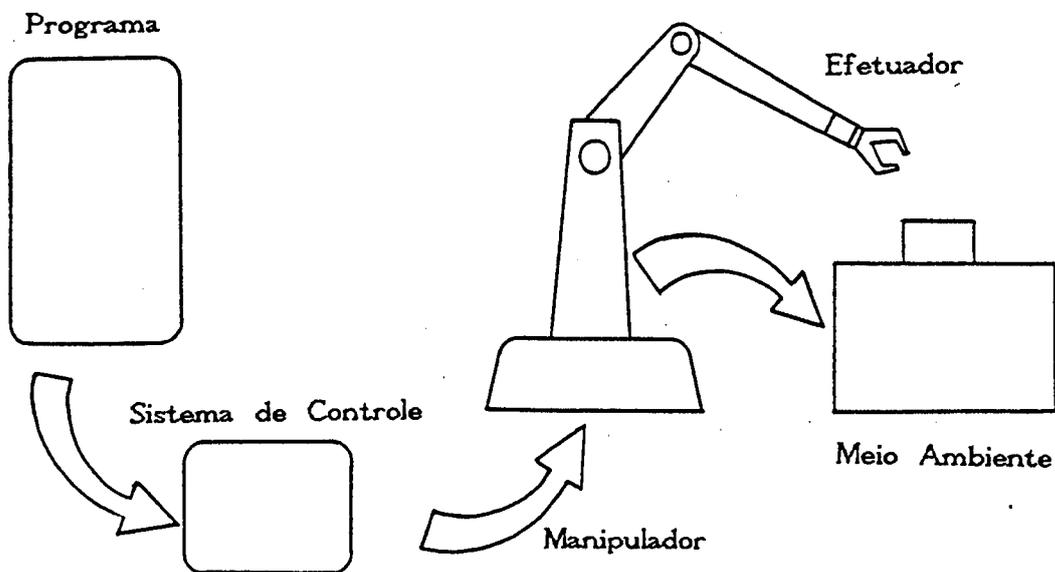


Figura 2.1 - Componentes básicos de um sistema robótico.

A tarefa a ser executada é codificada, formando o programa de comando do manipulador, o qual é a entrada do sistema de controle, que por sua vez verifica a posição atual de cada uma das juntas e a posição desejada, conforme solicitado pela programação. No caso de existir um erro de posição, o atuador da junta correspondente é excitado pelo sistema de controle, de modo a reduzir o erro, teoricamente até zero. Os sensores internos colocados sobre a estrutura do manipulador, normalmente na forma de "encoders", fornecem um sinal correspondente à posição instantânea da junta que está sendo monitorada. O efetuator por sua vez é a parte ativa do manipulador, que executa a tarefa fim, podendo ser formado por uma garra para a pega de peças, uma ferramenta de desgaste, uma pistola de solda, ou qualquer outro tipo de elemento.

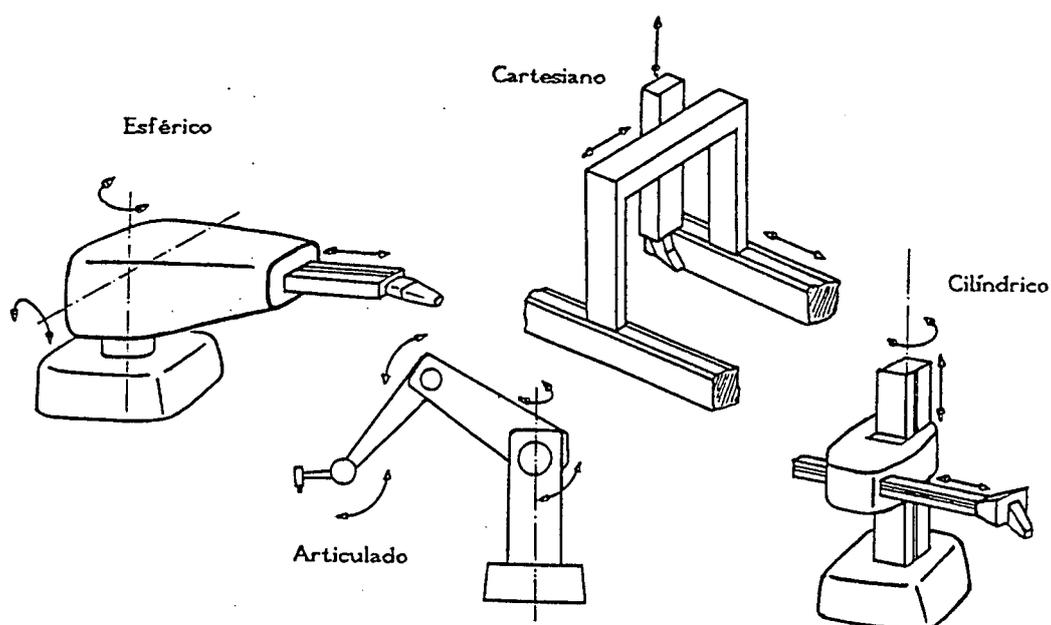


Figura 2.2 - Configurações típicas de manipuladores, [2, 10, 12].

Dependendo da configuração geométrica do manipulador, a posição de cada junta não especifica diretamente a posição e orientação do efetuator no espaço cartesiano, sendo necessário o uso de uma formulação própria, que gera a chamada cinemática direta, na qual, dadas as coordenadas de junta, são obtidas as coordenadas cartesianas, de posição e de orientação do efetuator. A formulação da cinemática direta é apenas geométrica e usualmente não apresenta dificuldades para ser obtida. Assim, a obtenção das coordenadas cartesianas, através das equações da cinemática direta, é geralmente simples e rápida de ser efetuada, mesmo no caso de manipuladores com seis graus de liberdade. Já o caminho inverso, qual seja, o de dadas as coordenadas cartesianas do efetuator, obter as coordenadas de junta, não é imediato, sendo normalmente difícil de tratar de forma analítica, existindo solução fechada apenas em casos particulares. A cinemática inversa, a menos destes casos especiais, deve em geral ser tratada por meio de processos numéricos, iterativos, ou não, o que pode comprometer o uso de procedimentos de controle e planejamento de trajetória

que exigem o cálculo recursivo da cinemática inversa, em tempo real. Adicionalmente deve ser dito que podem ocorrer situações onde a cinemática inversa não existe. Isto pode ocorrer devido a limitações do mecanismo de acionamento, como batentes de fim de curso, ou devido a pontos singulares dentro do espaço de trabalho. Uma discussão mais detalhada é feita no item 2.5.

No caso particular do presente trabalho, o enfoque a ser dado sobre o problema de planejamento de trajetória é geométrico e assim a configuração geométrica do manipulador é o aspecto mais relevante. Neste sentido, os manipuladores costumam ser classificados como esféricos, articulados, cartesianos, cilíndricos, etc., conforme o tipo de juntas que possuem e sua disposição. Um manipulador do tipo esférico possui uma junta de rotação na base, de eixo vertical, e outra junta de rotação, esta de eixo horizontal. O último elemento antes do pulso tem agora uma junta prismática, levando assim o pulso a um movimento esférico. Um manipulador do tipo articulado caracteriza-se por apresentar todas as juntas de rotação, enquanto que um manipulador cartesiano possui todas as juntas do tipo de translação, advindo deste fato o seu nome, já que o percurso segue as três direções ortogonais. Finalmente, um manipulador cilíndrico possui uma junta de rotação na base e duas juntas prismáticas a seguir, uma vertical e uma horizontal. A figura 2.2 mostra estas configurações.

O problema da cinemática de manipuladores de cadeia aberta consiste basicamente em um problema geométrico, de definida a posição relativa entre as várias ligações que formam a estrutura mecânica, obter a posição e orientação do extremo da última ligação, que corresponde ao elemento ativo do manipulador. Deste modo, inúmeros enfoques podem ser dados no tratamento do problema da cinemática, dependendo da forma adotada para definir a geometria, quanto à orientação relativa entre as ligações e quanto à posição relativa destas mesmas [2, 10, 12]. Assim, dependendo do autor, a formulação é baseada no uso de matrizes de transformação de rotação, em conjunto com vetores que posicionam as juntas, no uso de matrizes de transformação homogêneas, no uso dos ângulos de Euler ou dos parâmetros de Rodrigues, ou ainda no uso de quatérnios para definir rotações, etc. De um modo geral, predomina, porém, o uso das matrizes de transformação homogênea, com a definição dos parâmetros de Denavit - Hartenberg [2, 6, 10]. Uma matriz de transformação homogênea pode ser representada por uma matriz 4x4, com a estrutura:

$$A = \begin{bmatrix} R & X_0 \\ \Theta^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde  $R$  é uma matriz 3x3, que corresponde à transformação de rotação entre as duas juntas analisadas, e  $X_0$  é o vetor posição da junta  $i+1$  em relação à junta  $i$ .  $\Theta$  é o vetor zero e 1 é o escalar 1. Os parâmetros de Denavit-Hartenberg

(D.H.) são uma maneira de, através de quatro escalares, que representam dois ângulos e duas distâncias, descrever a posição relativa entre duas ligações adjacentes na cadeia cinemática do manipulador. Os parâmetros  $a_i$  e  $\alpha_i$  são parâmetros constantes, determinados pela geometria da ligação. A figura 2.3 mostra a definição dos quatro parâmetros, onde:

- $a_i$  - Comprimento da ligação  $i$ , definido como a distância entre os eixos das juntas da ligação  $i$ ;
- $d_{i+1}$  - Excentricidade ou "offset" da junta, medida entre as normais comuns para a ligação  $i$  e  $i+1$ ;
- $\alpha_i$  - Ângulo de torção da ligação  $i$ , medido como o ângulo entre o eixo  $i$  e o eixo  $i+1$ , sobre a reta definida por  $a_i$ ;
- $\theta_{i+1}$  - Ângulo da junta  $i+1$ , medido pelo prolongamento de  $a_i$  e  $a_{i+1}$ , em torno do eixo  $i+1$ .

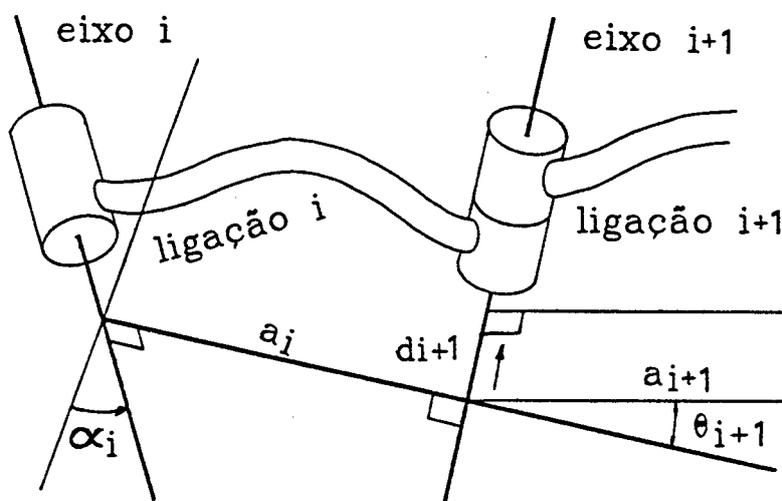


Figura 2.3 - Parâmetros de Denavit-Hartenberg.

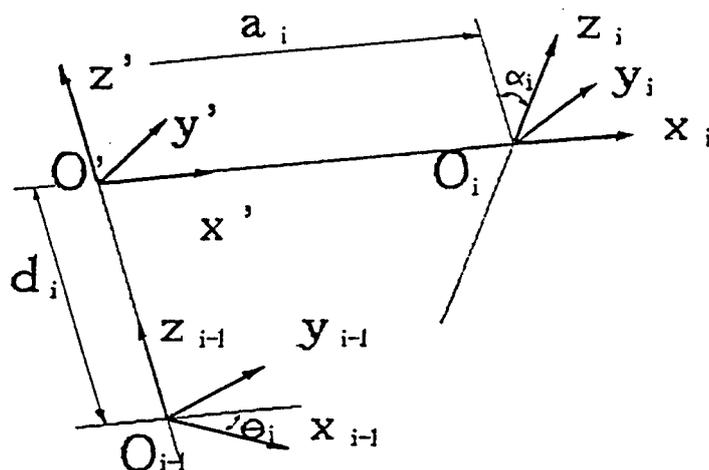


Figura 2.4 - Sistemas de coordenadas em duas juntas.

Os parâmetros  $d_1$  e  $\theta_1$  são parâmetros da junta e ao menos um deles é variável conforme a junta é movida, dependendo se for uma junta prismática ou de revolução. Usando a notação de D. H. e os sistemas de coordenadas da figura 2.4, compatíveis com a definição de D. H., a matriz de transformação entre o sistema  $i$  e o sistema auxiliar é dada por [2] :

$$A_1^{AUX} = \begin{bmatrix} R_\alpha & X_a \\ \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde  $R_\alpha$  é a matriz de rotação sobre o eixo  $x_1$ , de um ângulo  $\alpha$  e  $X_a$  é o vetor que posiciona a origem  $O_1$  em relação à  $O'$ .

Para passar do sistema auxiliar para o sistema  $i-1$ , a matriz de transformação é :

$$A_{AUX}^{i-1} = \begin{bmatrix} R_\theta & X_d \\ \Theta & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo  $R_\theta$  a matriz de rotação sobre  $Z_{i-1}$ , de um ângulo  $\theta_1$  e  $X_d$  é o vetor que posiciona a origem  $O'$  em relação a  $O_{i-1}$ . Assim, para realizar a transformação de  $O_1$  para  $O_{i-1}$ , a matriz será :

$$A_1^{i-1} = A_{AUX}^{i-1} A_1^{AUX} \quad (2.4)$$

ou seja, sendo  $C\theta_1$ ,  $C\alpha_1$ ,  $S\theta_1$  e  $S\alpha_1$  os cossenos e senos dos ângulos correspondentes,

$$A_1^{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Esta matriz representa a transformação de um vetor, descrito no sistema de coordenadas  $i$ , para o sistema de coordenadas  $i-1$ . Ou seja, sendo  $X^i$  e  $X^{i-1}$  a representação do vetor, respectivamente em  $i$  e  $i-1$ , vem :

$$X^{i-1} = A_1^{i-1} X^i \quad (2.6)$$

No caso geral de um manipulador de cadeia cinemática aberta, com  $n$  ligações, o objetivo é determinar a matriz de transformação desde o extremo do efetuador até a base do manipulador. Assim, no caso de juntas prismáticas,  $d_1$  é

variável, ficando  $a_i$ ;  $\alpha_i$  e  $\theta_i$  constantes e para as juntas de rotação,  $\theta_i$  é a variável, com  $a_i$ ;  $d_i$  e  $\alpha_i$  constantes. Deste modo, a matriz  $A_i^{i-1}$  é função ou de  $d_i$  ou de  $\theta_i$ , dependendo do tipo de junta que é a junta  $i-1$  (Fig. 2.4). Chamando de  $q_i$  a coordenada generalizada da junta que será  $d_i$  ou  $\theta_i$ , então a transformação do vetor  $X^i$  será dada por:

$$X^{i-1} = A_i^{i-1}(q_i) X^i \quad (2.7)$$

Como o manipulador é formado por um encadeamento sequencial das várias ligações, para definir a posição de um ponto do efetuador (elemento ativo do manipulador), dada pelo sistema de coordenadas deste em relação ao sistema de coordenadas da base do manipulador, basta aplicar seqüencialmente as sucessivas matrizes de transformação de cada uma das ligações, desde o efetuador até a base do manipulador. Assim, sendo  $X^n$  o vetor posição de um ponto em relação ao sistema de coordenadas da ligação  $n$ , o vetor posição do mesmo ponto,  $X^0$ , agora em relação ao sistema de coordenadas da base, será obtido como :

$$\begin{aligned} X^0 &= A_1^0(q_1) X^1 \\ X^1 &= A_2^1(q_2) X^2 \\ &\vdots \\ X^{n-1} &= A_n^{n-1}(q_n) X^n \end{aligned}$$

ou

$$X^0 = A_1^0(q_1) A_2^1(q_2) A_3^2(q_3) \dots A_n^{n-1}(q_n) X^n \quad (2.8)$$

onde o produto de matrizes 4x4 pode ser substituído por uma única matriz  $T$ :

$$X^0 = T(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) X^n \quad (2.9)$$

A mesma formulação pode ser usada se o vetor  $X^n$  representar uma orientação no espaço e não uma posição, sendo  $X^0$  a representação da mesma orientação no espaço, só que em relação ao sistema de coordenadas da base.

Desta forma, a matriz  $T(q_1, q_2, \dots, q_n)$  contém todas as informações a respeito da posição e da orientação do efetuador, em relação ao sistema de coordenadas da base, na mesma estrutura da matriz  $A$ , onde agora  $X_0$  fornece a posição da origem do sistema de coordenadas do efetuador e  $R$  é a matriz de rotação entre o sistema da base e o do efetuador, com suas colunas representando os cossenos diretores dos vetores unitários do sistema do efetuador, no sistema da base. [1, 2, 3, 6, 10, 12, 18, 29, 41].

## 2.2. PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA.

Tipicamente o planejamento de trajetória de um manipulador consiste em gerar uma seqüência temporal de pontos, que define todas as posições intermediárias dos elementos do manipulador, enquanto este se move de uma posição de origem até uma posição de destino [6]. Esta seqüência de pontos deve especificar totalmente a configuração do manipulador em um instante qualquer de tempo, e assim é necessário fornecer tantos dados quantos são os graus de liberdade do manipulador, para cada ponto na seqüência temporal. Isto pode ser colocado de forma que cada grau de liberdade do manipulador deve ter sua própria seqüência temporal de pontos, que fornece a posição desta junta ao longo do tempo. A seqüência de pontos, bem como as suas primeira e segunda derivadas em relação ao tempo, são então enviadas ao sistema de controle do manipulador, o qual, por sua vez aciona os atuadores que movimentam o manipulador. A referência [10] coloca, como objetivo final da tarefa de planejamento de trajetória, a definição de uma descrição temporal do movimento do manipulador quanto à posição, velocidade e aceleração, para cada um dos graus de liberdade.

A curva que o manipulador deve descrever no espaço é denominada de percurso e a trajetória é definida com a informação adicional de tempo, em que o percurso é descrito pelo manipulador [6,12]. De um modo geral, os pontos de início e de fim da trajetória podem ser especificados no espaço das coordenadas de junta, onde a posição de cada junta é definida; ou então no espaço cartesiano, através das coordenadas do efetuador e de sua orientação. Do ponto de vista do sistema de controle, da formulação cinemática e dinâmica do manipulador, a descrição mais conveniente de uma configuração é na forma de um vetor em coordenadas de junta.

Conforme já discutido, as coordenadas de junta são transformadas em coordenadas cartesianas através das equações da cinemática direta, e isto é geralmente simples de ser efetuado. No entanto, a cinemática inversa deve em geral ser tratada por processos numéricos. Assim, como é mais simples manter um controle sobre o comportamento de algoritmos de planejamento de trajetória em coordenadas de junta e como isso também evita um cálculo constante da cinemática inversa, a preferência é a de gerar a trajetória em coordenadas de junta, mesmo que a fonte de informações e as configurações início e fim sejam especificadas em coordenadas cartesianas. Deste modo, no presente trabalho, a trajetória será sempre tratada e formulada em coordenadas de junta, sendo que a trajetória cartesiana será então obtida pela cinemática direta. A referência [12] apresenta, em sua seção 4.2, uma interessante discussão sobre as vantagens e desvantagens do planejamento em coordenadas de junta e em coordenadas cartesianas, no espírito dos argumentos que estão sendo discutidos no presente Capítulo.

O planejamento de trajetória em coordenadas de junta corresponde, tipicamente, a definir, parametricamente, uma função em um espaço de sete dimensões, no caso de um manipulador de seis graus de liberdade (as seis coordenadas de junta mais o tempo). Esta função vetorial é mapeada em um espaço cartesiano, também de dimensão sete (três coordenadas de posição, três coordenadas de orientação e o tempo). A transformação de mapeamento do espaço de junta para o espaço cartesiano é a transformação definida pela cinemática direta, enquanto que a transformação que mapeia o espaço cartesiano no espaço de junta corresponde à cinemática inversa, figura 2.5. Ambas as transformações são não lineares.

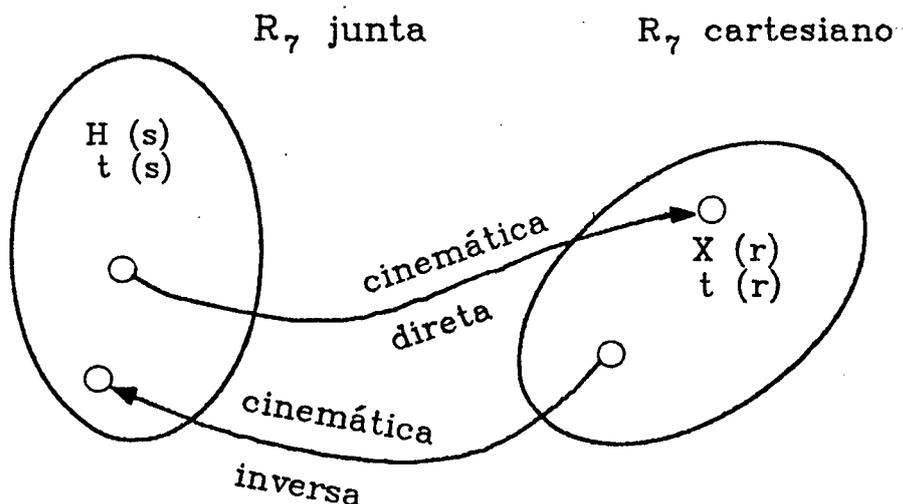


Figura 2.5 - Mapeamento entre o espaço de coordenadas de junta e o espaço cartesiano.

Uma consideração que é intuitivamente feita é a de que a função  $t(s)$  no espaço de junta seja a mesma função  $t(r)$  no espaço cartesiano, onde  $s$  é o parâmetro em coordenadas de junta e  $r$  é o parâmetro em coordenadas cartesianas e também que  $r=s$ . Isto leva à identidade do "tempo" em coordenadas de junta com o "tempo" em coordenadas cartesianas, ambos também coincidentes com o tempo físico. Isso, no entanto, não é necessário, já que pode existir uma função de mapeamento entre  $t(s)$  e  $t(r)$  diferente da identidade. Este conceito não é explorado no presente trabalho, por não se tornar necessário, mas é conveniente ter-se em mente as possibilidades que uma função de mapeamento neste caso permite.

O percurso de um ponto no espaço é matematicamente definido como uma função de posição, através de um parâmetro  $s$ , que representa a fração percorrida sobre a curva. Usualmente o parâmetro é normalizado, de forma que  $s = 0$  no ponto inicial e  $s = 1$  no ponto final, ou ponto objetivo. De um modo geral, a trajetória é formada pela seqüência temporal de posição e de orientação do efetuador. O resultado de uma tarefa de planejamento de trajetória é uma seqüência temporal das configurações do manipulador, que consiste nos dados de

entrada do sistema de controle do manipulador. A taxa típica de amostragem de sistemas de controle está na faixa de 20 Hz a 200 Hz, sendo 60 Hz um valor típico. Esta taxa deve ser respeitada, para que o braço tenha um movimento suave e previsível. Dependendo do sistema de controle, além das posições, devem ser fornecidas as velocidades de junta, ou até mesmo as acelerações de junta.

Devido à elevada frequência de amostragem e à dificuldade de computar a cinemática inversa, existe a necessidade de que a saída do planejamento de trajetória seja através de uma sequência temporal no espaço das coordenadas de junta, ao invés de uma representação do manipulador no espaço cartesiano.

A divisão de trabalho entre o sistema de controle e o planejamento não é absoluta. As configurações geradas pelo planejamento podem não ser suficientemente próximas no tempo, de modo a acompanhar a taxa de amostragem do sistema de controle. Neste caso, um processamento adicional faz-se necessário, com o uso de um procedimento de interpolação em coordenadas de junta, de forma a aumentar a densidade de pontos sobre a trajetória.

Os procedimentos habituais de planejamento de trajetória fazem uso de um conjunto de restrições de posição, velocidade e aceleração, sobre um certo número de pontos na trajetória desejada, que são usados para definir esta trajetória. Estes pontos são selecionados no espaço cartesiano, porém a trajetória é planejada no espaço de coordenadas de junta. Assim, a trajetória é definida de forma implícita, e neste caso torna-se importante uma simulação tridimensional do manipulador. Korem [18], por sua vez, define três tipos de pontos que são usados para especificar uma trajetória: pontos extremos, de início e fim da trajetória; pontos intermediários, onde não há exigência da trajetória passar exatamente sobre estes, usados para guiar o manipulador e pontos de referência, onde o sistema de controle toma alguma decisão, como por exemplo uma bifurcação ou desvio condicional. Quanto ao tipo de trajetória, que está acoplado ao tipo de sistema de controle, tem-se a chamada trajetória PTP, ou ponto a ponto, onde o manipulador parte de sua posição inicial e cada um dos eixos é acionado na sua velocidade máxima, até atingir o ponto final conforme já comentado na secção 1.1. Neste tipo de trajetória não se tem controle sobre o percurso que é realizado entre os pontos extremos. O outro tipo de trajetória é a chamada trajetória contínua, ou CP, onde é feita uma interpolação linear entre cada dois pontos pré-programados.

Num outro enfoque de planejamento, a trajetória é definida explicitamente por uma função analítica, usualmente no espaço cartesiano, e o objetivo é determinar um percurso que se aproxime o máximo possível da trajetória pretendida.

Vários critérios podem ser identificados para comparar e avaliar trajetórias e sistemas de planejamento. Em primeiro lugar, as trajetórias devem

ser eficientes, tanto para o cálculo como para a execução. Em segundo lugar, as trajetórias devem ser previsíveis e precisas, não devendo degenerar de forma inaceitável próximo a singularidades, o que pode ocorrer para um planejamento no espaço cartesiano. Em terceiro lugar, a posição, velocidade e aceleração devem ser funções suaves do tempo. Tipicamente a trajetória deve ser uma função suave, com continuidade  $C^0$  e  $C^1$ , bem como, eventualmente, também contínua em  $C^2$ , pois que uma descontinuidade  $C^2$  leva a um aumento no desgaste dos órgãos mecânicos e excita vibrações no mecanismo articulado do manipulador, conforme [10]. Quanto à interface homem-máquina, esta deve ser a mais amigável possível, fazendo com que o usuário deva definir, ou especificar, o mínimo de informações quando do planejamento da trajetória. Finalmente deve ser possível determinar, de forma eficiente, se a trajetória proposta leva o braço para fora do espaço de trabalho, ou, então, se os limites de velocidade ou de aceleração são ultrapassados.

### 2.3. MÉTODOS USUAIS DE PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA.

Nesta secção é feita uma revisão dos métodos de planejamento de trajetória que estão disponíveis na literatura. A análise dos procedimentos permite classificá-los inicialmente em métodos de planejamento no espaço cartesiano e em métodos de planejamento no espaço de coordenadas de junta. Uma outra classificação possível é quanto ao tipo de curva tratada, já que muitos procedimentos limitam-se a analisar um segmento de reta, sob a argumentação de que qualquer curva pode ser composta por um número adequado de pequenos segmentos de reta. Outros métodos usam agora funções não lineares, tradicionalmente funções polinomiais, para definir a trajetória. Os procedimentos desenvolvidos por Paul [28] e por Taylor [39], discutidos na secção 2.5, são atualmente considerados clássicos, sendo apresentados e discutidos em qualquer texto que se preocupe com o problema de planejamento de trajetória, como as referências [2, 6, 10, 12, 18 e 31]. Segundo [6], o uso de polinômios, de grau crescente, permite que trajetórias sejam definidas, com um nível também crescente de sofisticação. Assim, a descrição mais simples de um movimento consiste em especificar as posições de início e fim, bem como as respectivas velocidades e acelerações. Quanto à posição, é fácil verificar que um processo como o descrito abaixo, parte da posição  $x_1$  e chega à posição  $x_2$ , onde  $f(s)$  é qualquer função contínua que satisfaça  $f(0) = 0$  e  $f(1)=1$ .

$$x(s) = f(s) x_2 + (1 - f(s)) x_1 \quad (2.10)$$

Se o parâmetro  $s$  for proporcional ao tempo, então a função  $f(s)$  converte o percurso do manipulador na sua trajetória. No caso de  $f(s) = t$ ,  $x$  é uma combinação linear de  $x_1$  e  $x_2$ , e a velocidade da junta,  $\dot{x}$ , é constante ao longo

da trajetória. No caso de serem adicionadas restrições de velocidade,  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$ ,  $x(t)$  passa a ser uma cúbica, na forma [6]

$$x(t) = (1 - t)^2 [x_1 + (2x_1 + \dot{x}_1)t] + t^2 [x_2 + (2x_2 + \dot{x}_2)(1 - t)] \quad (2.11)$$

em que a aparente não homogeneidade da equação decorre do fato de estar o tempo adimensionalizado; assim  $x$  e  $\dot{x}$  são dimensionalmente iguais. No caso agora de serem adicionadas restrições de aceleração,  $\ddot{x}_1$  e  $\ddot{x}_2$ , a equação passa a ser uma do quinto grau, como [6]:

$$x(t) = (1 - t)^3 [x_1 + (3x_1 + \dot{x}_1)t + (\ddot{x}_1 + 6\dot{x}_1 + 12x_1)t^2/2] + t^3 [x_2 + (2x_2 - \dot{x}_2)(1 - t) + (\ddot{x}_2 - 6\dot{x}_2 + 12x_2)(1 - t)^2/2] \quad (2.12)$$

O uso de funções polinomiais é confortável, pois  $f(t) = t^n$  satisfaz sempre as condições  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 1$ . As trajetórias polinomiais são funções suaves de  $t$ , nas quais as potências  $t^n$  formam uma base do espaço vetorial das funções polinomiais.

Neste sentido, outras bases que satisfaçam as condições extremas, podem ser selecionadas, como funções transcendentes e suas potências. Assim, por exemplo, as restrições de posição e velocidade que levaram ao polinômio cúbico, equação (2.12), são também satisfeitas pela seguinte trajetória cossenoidal [6]:

$$x(t) = \cos^2(\pi(1 - t)/2) [x_2 - \frac{1}{\pi} 2\dot{x}_2 \cos(\pi t/2)] + \cos^2(\pi t/2) [x_1 + \frac{1}{\pi} 2\dot{x}_1 \cos(\pi(1-t)/2)] \quad (2.13)$$

Craig [10] desenvolve em detalhes o uso de polinômios para descrever uma trajetória, como polinômios cúbicos no caso de serem especificadas a posição e a velocidade nos dois pontos extremos, ou então como polinômios do quinto grau quando são ainda adicionalmente especificadas as acelerações nos pontos extremos. O autor descreve ainda o uso de polinômios em trajetórias com pontos intermediários e finalmente trajetórias retilíneas com transição parabólica entre cada dois trechos sucessivos.

Segundo [6], Mujtaba fez um estudo exploratório onde compara diferentes formulações de trajetórias, incluindo cosseno, polinômios e a soma de uma função seno com uma função rampa, conforme mostra a figura 2.6. As

restrições impostas de velocidade eram zero no início e no fim da trajetória e, as condições de aceleração eram zero, ou então um valor máximo absoluto. Adicionalmente estudou uma trajetória exponencial decrescente, que se aproxima do comportamento de um sistema de segunda ordem amortecido. A trajetória do tipo "bang-bang" é a que apresenta menor tempo de execução e as trajetórias com cosseno, polinômio de quinto grau e seno mais rampa são, aproximadamente, de 10 a 20% mais lentas. A trajetória exponencial amortecida é da ordem de 70% mais lenta. A trajetória do tipo "bang-bang" é a que apresenta melhor desempenho, mas a descontinuidade de aceleração é prejudicial, tendo em vista que pode excitar modos de vibração na estrutura do manipulador.

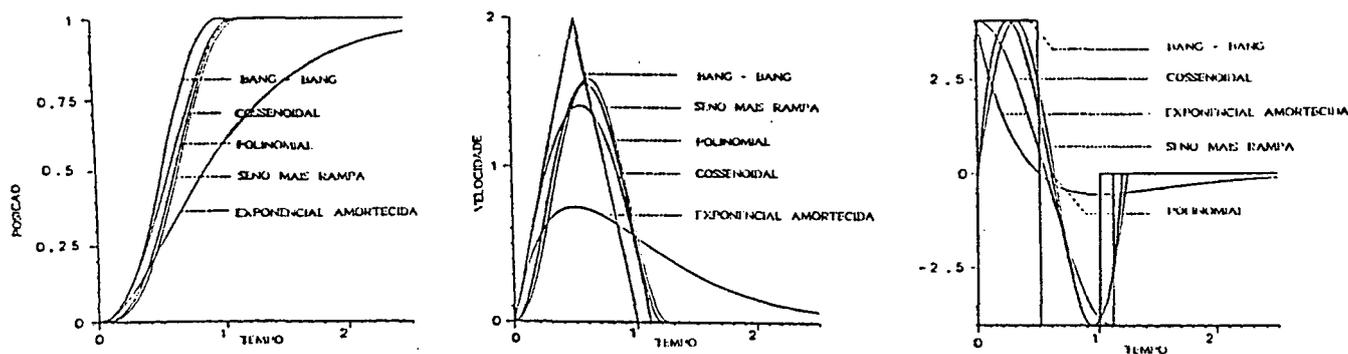


Figura 2.6 - Resultados de posição, velocidade e aceleração, para vários tipos de trajetória, segundo Mujtaba [6].

Além dos pontos extremos da trajetória, novas restrições podem ser introduzidas, como, por exemplo, pontos intermediários que procurem direcionar o manipulador, de modo a prevenir a colisão com obstáculos. Outra situação ocorre quando os extremos da trajetória devem ser executados com cuidado, de modo a fazer contato com uma superfície. A figura 2.7 mostra uma trajetória com pontos intermediários para evitar colisão e a figura 2.8 mostra uma trajetória com os pontos de afastamento e de aproximação, para definir regiões ou trechos de movimento lento, cuidadoso, como os de partida e de chegada.

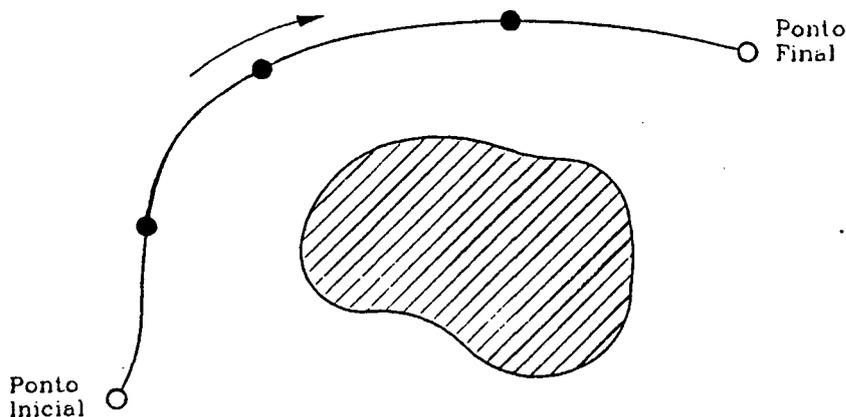


Figura 2.7 - Trajetória com pontos intermediários, para contornar obstáculo.

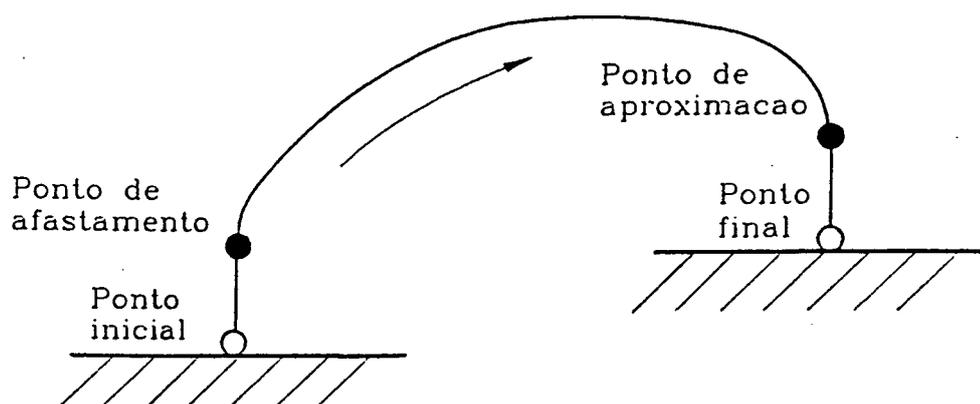


Figura 2.8 - Trajetória com trechos de movimento lento, no início e fim do percurso.

Para o planejamento de trajetórias com um maior número de restrições, o uso de uma base de potências,  $t^n$ , leva a funções polinomiais de elevado grau. Embora estes polinômios sempre existam, esta metodologia apresenta desvantagens. Por exemplo, é difícil verificar, a priori, se um polinômio de grau  $n$  gera uma trajetória que ultrapassa os limites físicos do braço durante o movimento. Exemplificando, para verificar se uma dada trajetória polinomial ultrapassa o espaço de trabalho, é necessário achar os máximos de uma função do grau  $n$ , logo é necessário resolver uma equação algébrica de grau  $n-1$ , ou seja, sua primeira derivada. Por outro lado, como um polinômio de grau  $n$  possui até  $n$  raízes distintas, a trajetória pode cruzar até  $n$  vezes uma dada reta, ou seja, a trajetória passa a ser muito ondulada, com oscilações muitas vezes indesejáveis. Outro ponto a considerar é a precisão de cálculo de um polinômio de grau elevado, que é menor do que no caso de um polinômio de menor grau, já que um pequeno erro numérico no tempo, que é a variável do polinômio, é ampliado pela potência  $t^n$ . Todos estes aspectos devem ainda levar em conta que quanto maior o grau do polinômio, maior esforço computacional deve ser realizado para determiná-lo. Finalmente, um polinômio que é usado para gerar uma trajetória que passe por um conjunto de pontos intermediários, deve ser totalmente recalculada caso um ponto seja deslocado, ou um novo ponto de referência deva ser introduzido. No caso de um novo ponto ser definido, um polinômio de grau ainda mais elevado deve ser gerado, exigindo um esforço computacional ainda maior.

Assim, da discussão acima colocada, vê-se que o uso de trajetórias baseadas em funções polinomiais, que visam satisfazer um conjunto de restrições de posição, velocidade e aceleração, leva a polinômios de grau elevado, e isto é indesejável sob vários aspectos. Deste modo, uma possibilidade é a de fazer uso do conceito de splines, ou seja, de dividir a trajetória em um certo número de trechos, entre pontos de referência e, para cada um destes trechos, de forma

individual, determinar um polinômio específico, em geral de baixo grau. Assim, o problema passa a ser o de determinar alguns polinômios de baixo grau, um para cada trecho, ao invés de um único polinômio de grau elevado. O conceito de splines é amplamente utilizado em CAD, no modelamento geométrico de curvas, superfícies e sólidos, [5, 8, 11, 13, 15, 27, 33]. De modo a manter a continuidade do movimento, é necessário que splines consecutivas tenham a mesma posição, velocidade e aceleração, no ponto de transição. Fu [12] propõe uma trajetória onde os trechos extremos são polinômios do quarto grau e os trechos intermediários são polinômios cúbicos, conforme detalhado mais à frente.

No caso de trajetórias do tipo "bang-bang", [6], tem-se aceleração constante até um certo ponto, e, após, desaceleração constante até a parada, no ponto objetivo. A consideração de aceleração constante e igual à máxima que a junta admite, ou consegue gerar, para cada configuração do manipulador, é conservativa e isto leva, portanto, a uma trajetória quadrática. Segundo [6], Walters considera uma trajetória em que a aceleração é constante e igual ao máximo, ou ao mínimo, permissível para a junta, ou então é zero. Para os trechos de trajetória onde a aceleração é constante, a velocidade é função linear do tempo; portanto, a posição é uma função quadrática. De modo similar, Hollerbach [6] determinou que a trajetória de mínimo dispêndio de energia, de um modelo flexível de um músculo humano, é uma trajetória do tipo "bang-coast-bang", ou seja, uma trajetória formada por três trechos, respectivamente, máxima aceleração, movimento livre por inércia e finalmente, máxima desaceleração.

Na bibliografia especializada em sistemas de automação, robótica e sistemas CAE/CAD/CAM, existem trabalhos que, embora não tratando diretamente do problema de planejamento de trajetória, necessitam intimamente dos conceitos, ao tratar dos aspectos do sistema de controle, seja usando um modelo dinâmico do manipulador no laço de controle, ou não [2,10]. A referência [37] apresenta a implementação e validação experimental de um sistema de controle adaptativo direto, que dispensa o uso de um modelo dinâmico do manipulador, o que em geral é benéfico, pois que as incertezas e as alterações dos parâmetros do manipulador prejudicam o desempenho do sistema de controle. Os autores usam um algoritmo de controle com sinal de erro de posição e de velocidade. Na validação experimental é usada uma trajetória cicloidal, comparando o traçado desejado e o obtido, em cada uma das juntas. O sistema proposto mostrou-se muito mais preciso, em comparação com o sistema original, mesmo considerando que a frequência de amostragem deste último seja sete vezes maior do que no sistema proposto.

#### 2.4. PLANEJAMENTO EM COORDENADAS DE JUNTA.

Detalhando agora a discussão anterior sobre planejamento de trajetória, as referências [6,10,12] fornecem várias formulações e procedimentos

, os quais serão aqui discutidos. Segundo [12], uma série de considerações devem ser ponderadas quando do planejamento, em especial para trajetórias como a ilustrada na figura 2.8, considerações estas que são :

1. Quando da pega de algum objeto, o movimento da garra deve ser direcionado de forma a se afastar da posição original do objeto, caso contrário a garra pode colidir com a superfície sobre a qual o objeto está apoiado;
2. Se for especificada uma posição de afastamento (lift-off point), sobre o vetor normal à superfície, a partir do ponto de origem do movimento, então está sendo especificado um movimento admissível para o início da trajetória. Se adicionalmente for especificado o tempo em que esta posição deve ser atingida, a velocidade com que o objeto está sendo levantado da superfície é também definida;
3. O mesmo conjunto de argumentos apresentados, para a especificação do ponto de afastamento serve para especificar o ponto de aproximação (set-down point), até a posição final, de modo que a direção correta de aproximação seja executada e o movimento controlado;
4. Da discussão acima, existem quatro pontos da trajetória que estão especificados, ou seja, o ponto inicial, o ponto de afastamento, o ponto de aproximação e o ponto final ou ponto objetivo;
5. As restrições em cada uma das quatro posições especificadas são respectivamente:  
Posição inicial : Tanto a velocidade como a aceleração são dadas, em geral nulas;  
Posição de afastamento : Continuidade do movimento;  
Posição de aproximação : Continuidade do movimento;  
Posição final : Tanto a velocidade como a aceleração são dadas, em geral nulas;
6. Adicionalmente a estas restrições, os máximos valores de todas as trajetórias de junta devem estar dentro dos valores geométrica e cinematicamente admissíveis para cada junta; e
7. O tempo envolvido para cumprir cada uma das partes da trajetória, no trecho inicial e final, é baseado nas velocidades de aproximação e de afastamento e nas características dos atuadores. No trecho central, ou de movimentação, o tempo é baseado nas capacidades de velocidade e de aceleração de cada junta e o maior destes tempos é usado, ou seja, depende da junta mais lenta para executar o movimento.

Com o uso de trajetórias polinomiais, uma primeira possibilidade para cumprir as restrições acima, considerando que os pontos de afastamento e de

aproximação sejam definidos apenas quanto às suas posições, existem assim oito restrições ou especificações. Destas, três são para cada ponto extremo e uma para cada ponto intermediário, levando assim a um polinômio do sétimo grau, se for usado um único polinômio para cobrir toda a trajetória. Isto, no entanto, não é conveniente, conforme visto, e uma melhor solução é usar polinômios de menor grau, um entre cada dois pontos da trajetória, onde agora existem restrições adicionais, quais sejam as de continuidade no ponto comum entre dois polinômios adjacentes. Adotando, assim, três polinômios [6], como existem quatorze restrições a serem consideradas ( as oito acima citadas e mais três condições de continuidade em cada ponto intermediário), é possível usar uma trajetória do tipo 4-3-4, ou seja, com polinômios do quarto grau nos extremos e um polinômio do terceiro grau no trecho central, ou então uma trajetória do tipo 3-5-3, onde o trecho central usa um polinômio do quinto grau. O desenvolvimento detalhado destas formulações indica que para a solução da trajetória, ou seja, determinar os coeficientes de cada um dos três polinômios envolvidos, chega-se a um sistema de equações lineares, com sete incógnitas. As trajetórias do tipo 4-3-4 e 3-5-3 estão detalhadas no Apêndice A4.

Uma outra formulação interessante é de, para a mesma situação anterior, adotar uma trajetória formada por cinco polinômios do terceiro grau, portanto com cinco trechos e seis pontos, [12]. No entanto inicialmente foram especificados apenas quatro pontos, os dois pontos extremos e os de afastamento e de aproximação. Os dois pontos adicionais são selecionados internamente ao trecho de movimentação, mas com flexibilidade no posicionamento, no sentido de que nestes dois pontos a coordenada não necessite ser localizada exatamente, sendo apenas necessário especificar os intervalos de tempo e assegurar que as continuidades de velocidade e de aceleração sejam satisfeitas nestes pontos. Isto leva a um total de vinte restrições, que são as oito restrições iniciais, mais três restrições de continuidade em cada um dos quatro pontos intermediários da trajetória. Como cada polinômio possui quatro coeficientes, os cinco polinômios cúbicos podem ser perfeitamente definidos. O desenvolvimento desta formulação leva a uma interessante solução explícita para as equações de cada um dos polinômios, [12]. Este método, no entanto, ao liberar a posição dos dois pontos centrais, perde o controle sobre a forma da trajetória.

## 2.5. PLANEJAMENTO EM COORDENADAS CARTESIANAS.

No planejamento de trajetórias no espaço cartesiano, uma das primeiras preocupações foi com o tratamento de trajetórias retilíneas, pois outras trajetórias podem ser formadas pela justaposição de segmentos de reta. Assim, a bibliografia preocupa-se, inicialmente, deste caso. A trajetória, a ser seguida pelo manipulador, planejada no espaço cartesiano é retilínea. Existem

várias razões do por que usar trajetórias retilíneas. Uma delas é de que a trajetória retilínea é facilmente previsível e de simples visualização. Em segundo lugar, elas fornecem o caminho mais curto entre dois pontos, embora não o mais rápido. Em terceiro, muitas aplicações exigem uma trajetória retilínea, como acompanhar uma esteira rolante, realizar um cordão de solda entre duas chapas, operações de montagens, etc.. Finalmente, [39], movimentos uniformes sobre trajetórias retilíneas minimizam as forças de inércia na garra e no objeto que está sendo transportado. No caso de outras trajetórias, estas podem ainda ser descritas por uma cadeia de segmentos de reta.

Whitney [42] desenvolveu uma metodologia para o controle de sistemas de manipulação por teleoperação, devido à dificuldade de se obter trajetórias cartesianas retilíneas, comandando diretamente as velocidades das diferentes juntas. Whitney propôs que o comando fosse feito diretamente em velocidades cartesianas, as quais seriam transformadas em velocidades de juntas, para o acionamento propriamente dito do braço. A relação entre o vetor velocidade de junta,  $\dot{\Theta}$ , e o vetor velocidade cartesiana,  $\dot{X}$ , é dado por:

$$\dot{X} = J(\Theta) \dot{\Theta} \quad (2.14)$$

onde  $J(\Theta)$  é a matriz Jacobiana da transformação do espaço de juntas para o espaço de coordenadas cartesianas, definida por [2,10] :

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} \quad (2.15)$$

O problema que se apresenta é de, dado o vetor velocidade no espaço cartesiano, obter o vetor velocidade no espaço de coordenadas de junta, o que deve ser feito pela inversão da matriz Jacobiana. Isto é possível se a matriz for não singular, na configuração dada, pois a matriz é função do vetor coordenadas de junta e logo podem existir algumas configurações em que ocorre uma singularidade. Uma dificuldade adicional ocorre em manipuladores redundantes, onde  $J$  é uma matriz retangular e não quadrada, [24].

Assim, dadas as velocidades no espaço cartesiano, a matriz Jacobiana deve ser calculada naquela configuração específica do braço, invertida, para então serem calculadas as velocidades das juntas. Em termos de tempo de processamento, o ponto crítico está na inversão de  $J(\Theta)$ , que deve ser efetuada para cada novo ponto calculado da trajetória. Isto pode fazer com que a trajetória calculada não acompanhe a frequência de amostragem que o sistema de controle exige. Neste caso Whitney sugere então o uso de uma tabela pré-calculada de  $J(\Theta)^{-1}$ , que é então interpolada para gerar os dados necessários. Esta interpolação baseia-se em uma mudança suave e contínua da

matriz Jacobiana com a configuração do braço, o que não é necessariamente correto, principalmente nas regiões próximas a singularidades. O procedimento dado por Whitney representa, de um modo geral, a forma de determinar as velocidades de junta, a partir de uma trajetória definida no espaço cartesiano, necessitando a determinação do inverso da matriz Jacobiana, para cada ponto da trajetória, a ser definido em coordenadas de junta.

Um outro procedimento interessante para o planejamento de trajetórias no espaço cartesiano é o apresentado por Paul [29], que usa uma representação matricial da configuração do manipulador. Assim, sendo  $A$  a matriz da configuração inicial e  $B$  a matriz da configuração final, existe uma matriz  $D$  que transforma  $A$  em  $B$ , dada por :

$$D = A^{-1} B \quad (2.16)$$

Para gerar a trajetória, Paul faz então uma interpolação entre a configuração  $A$ , no tempo  $t = 0$  e a configuração  $B$  no tempo adimensionalizado  $t = 1$ , entre dois pontos sucessivos da trajetória cartesiana. Assim, é definida na realidade uma matriz  $D(t)$ , onde  $D(1)$  é dada pela expressão anterior e  $D(0)$  é a matriz identidade, que reproduz a configuração  $A$  inicial, pois a matriz de configuração do manipulador, em um instante qualquer, é dada por  $A D(t)$ . Paul desacopla ainda o movimento de translação do efetuador dos movimentos de rotação, definindo  $D(t)$  como o produto :

$$D(t) = T(t) R_a(t) R_o(t) \quad (2.17)$$

onde  $T$  é a matriz de translação,  $R_a$  a matriz de rotação do pulso do manipulador, sobre o eixo longitudinal, e  $R_o$  a matriz de rotação do pulso sobre o eixo transversal. O procedimento de interpolação é linear entre os pontos dados.

Taylor [39] fornece um outro enfoque para a determinação de uma trajetória no espaço cartesiano, através do uso do conceito de erro de trajetória. O algoritmo proposto parte dos vetores configuração inicial e final, em coordenadas de junta, e calcula as coordenadas cartesianas correspondentes ao ponto médio da trajetória, em coordenadas de junta. Estas coordenadas cartesianas calculadas são então comparadas com a posição desejada, no ponto médio da trajetória cartesiana proposta, no caso linear. Se as duas posições diferirem mais do que o admissível, um ponto intermediário é então introduzido sobre a trajetória proposta (desejada) e o algoritmo é então aplicado recursivamente, particionando a trajetória sempre que a diferença entre a configuração desejada e a obtida pela interpolação em coordenadas de junta exceder o tolerado. Uma vez obtida a convergência, dentro da tolerância de configuração estabelecida, o manipulador é interpolado linearmente em

coordenadas de junta entre cada dois pontos consecutivos da trajetória em coordenadas cartesianas. De um modo geral, qualquer métrica é viável na medida do desvio de posição e orientação entre a trajetória interpolada e a trajetória cartesiana proposta. Taylor usou no seu trabalho a métrica Euclidiana para posição e definiu o desvio angular pelo arco cosseno do termo escalar de  $\mathbb{R}_x$ .  $\mathbb{R}_m^{-1}$ , onde  $\mathbb{R}_x$  é o quatérnio do ponto médio da trajetória cartesiana linear e  $\mathbb{R}_m$  é o quatérnio do ponto médio da trajetória em coordenadas de junta. Um ponto frágil no algoritmo de Taylor é que este supõe que o desvio máximo entre a trajetória interpolada e a trajetória proposta ocorre no seu ponto médio, o que nem sempre é verdade, podendo levar a situações onde a trajetória interpolada pode apresentar um significativo desvio, mesmo que no ponto médio ambas as trajetórias sejam coincidentes, como a situação esquematizada na figura 2.9.

Apesar de algumas limitações, o procedimento proposto por Taylor permite transformar uma representação analítica de uma trajetória no espaço cartesiano em uma seqüência de pontos no espaço de coordenadas de junta, entre os quais a trajetória é linearmente interpolada.

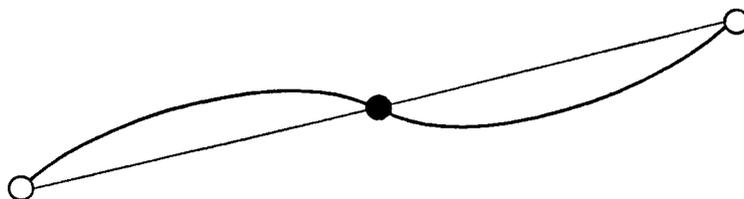


Figura 2.9 - Situação onde o algoritmo de Taylor fica comprometido.

As referências [23, 24] apresentam um elaborado procedimento de planejamento de trajetórias em coordenadas cartesianas, onde o algoritmo proposto parte de uma formulação para evitar as singularidades da cinemática inversa e coloca o problema de obter a trajetória como um problema de programação não linear, onde se busca minimizar a energia necessária para cumprir a missão. O algoritmo foi desenvolvido tendo em vista o uso em manipuladores redundantes, nos quais o número de juntas é superior ao número de graus de liberdade em coordenadas cartesianas, permitindo assim que o manipulador tenha infinitas configurações que satisfazem a uma dada posição e orientação do efetuador. De acordo com os autores, uma trajetória cartesiana especificada pode ser seguida com bastante precisão pelo algoritmo, que calcula as coordenadas de junta em cada instante pela cinemática inversa, evitando os pontos de singularidade, os quais funcionam como restrições no problema de programação não linear.

Em seu livro, Fu, Gonzalez e Lee [15], apresentam um procedimento para a programação em coordenadas cartesianas, através de uma sequência de pontos que é usada para definir uma série de polinômios de baixo grau, estes agora em coordenadas de junta. No caso de ser usada uma programação "off-line", é possível usar um critério de otimização, baseado no mínimo tempo para completar a missão, em coordenadas de junta, de modo a definir a trajetória. Neste caso é possível colocar restrições de velocidade, aceleração e torque, para cada uma das juntas. Quando a programação "off-line" não é usada, o algoritmo fornece um procedimento para acompanhar uma dada linha definida no espaço cartesiano.

De acordo com a referência [20], a fim de ajustar funções que passem por um conjunto de  $n$  pontos, quando estas são splines de baixo grau, é necessária a solução de um sistema de  $3(n-1)$  ou de  $4(n-1)$  equações, dependendo do método utilizado. O trabalho desenvolvido pelos autores propõe uma formulação onde existam mais pontos especificados do que necessários; assim, existirá um erro, já que as splines não passarão em todos os pontos. Desta forma é feito um estudo para minimizar o erro total, usando mínimos quadrados sobre polinômios do terceiro e do quarto grau, como critério para definir a trajetória. Esta trajetória permite gerar o percurso em coordenadas cartesianas, que mais se aproxima dos pontos originalmente dados. Com o procedimento proposto, a solução da trajetória exige que seja resolvido agora um sistema de  $(n+2)$  equações, logo mais eficiente do que os procedimentos usuais. Seguindo esta linha de raciocínio, a trajetória do tipo 4-3-4, segundo referência [12], que tem quatro pontos especificados, tem sua solução fornecida por um sistema de sete equações algébricas, ou seja, de  $(n+3)$  equações.

O trabalho de Lin e Chang [19], por sua vez usa a formulação das X-splines, que são uma generalização das splines cúbicas convencionais, permitindo uma descontinuidade na segunda derivada nos pontos de definição das splines. Estas splines são usadas para obter a aproximação da trajetória cartesiana, e a descontinuidade de aceleração é controlada pelo ajuste do intervalo de tempo entre os pontos de definição.

Para encerrar este item, é mencionado um desenvolvimento realizado tanto por Paul [28] como por Taylor [39], no que diz respeito à concatenação entre duas trajetórias retilíneas, de modo a suavizar a transição entre dois trechos consecutivos, pois, conforme visto, ambos os autores usam trajetórias planejadas linearmente em coordenadas de junta. Na transição de um trecho retilíneo com outro, existe uma descontinuidade de velocidade, logo um salto significativo na aceleração. Assim, os autores se preocuparam em suavizar a transição. Supondo que um trecho parte de  $\theta_0$  e chega em  $\theta_1$ , no tempo  $t_1$ , enquanto que o outro trecho parte de  $\theta_1$  em  $t_1$  e chega em  $\theta_2$  no instante  $t_2$ , a proposta dos autores é de que a transição ocorra durante um intervalo  $2\tau$ ,

simétrico em relação ao tempo  $t_1$ , logo iniciando em  $t_1 - \tau$  e encerrando em  $t_1 + \tau$ . Com esta transição entre as trajetórias, dando-se de forma suave, ocorre que a posição  $\theta_1$  passa a não ser atingida no instante  $t_1$ .

No que diz respeito ao problema da existência da cinemática inversa, esta deve ser pensada na transformação do espaço de velocidades de junta para o espaço de velocidades cartesianas, conforme equação (2.14), onde os correspondentes valores de posição são obtidos, via integração no tempo, das velocidades. A figura 2.10 ilustra esta situação, em que  $J^{-1}$  determina o valor de  $\dot{\theta}$  a partir de  $\dot{\chi}$ . Para que exista a solução de  $\dot{\theta}$  e logo de  $\theta$ , obtida pela integração no tempo ao longo de um percurso no espaço de  $\dot{\theta}$ , é necessário trabalhar sobre os espaços duais de  $\dot{\chi}$  e  $\dot{\theta}$ , respectivamente  $\dot{\chi}^*$  e  $\dot{\theta}^*$ . Assim, para que exista pelo menos um  $\dot{\theta}$ , dado  $\dot{\chi}$ , é necessário que  $\dot{\chi}$  seja um vetor ortogonal ao núcleo de  $J^*$  (no caso  $J^* = J^T$ ), pois caso contrário  $\dot{\chi}$  terá componentes no núcleo da transformação adjunta  $J^*$ . Estas componentes no núcleo não possuem correspondentes em  $\dot{\theta}$ , logo a transformação inversa não existe. O núcleo de  $J^*$  corresponde ao núcleo da transformação definida pelas linhas de  $J$ , ou de forma equivalente, pelas colunas de  $J^T$ . Quanto ao problema da unicidade da solução, garante-se a existência de uma única solução para a cinemática inversa se a dimensão do núcleo de  $J$  for igual a zero. Caso a nulidade de  $J$  não seja igual a zero, a inversa  $J^{-1}$  não existe e deve-se usar a pseudo inversa.

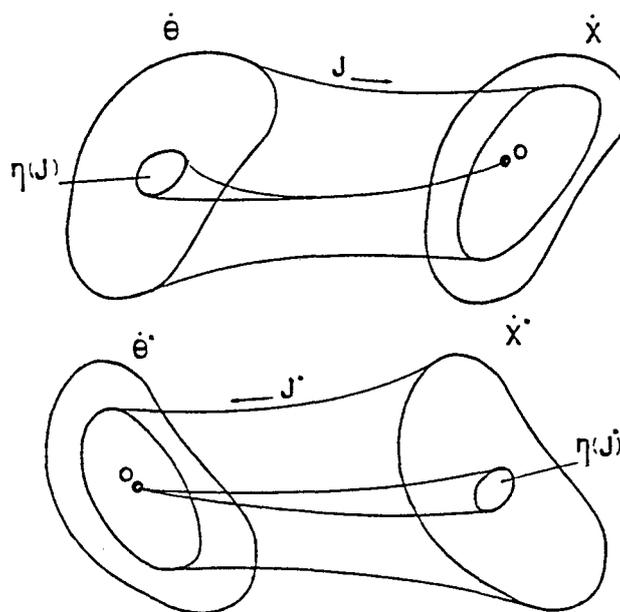


Figura 2.10 . A transformação  $J$  entre  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\chi}$  e a transformação adjunta  $J^*$  atuando entre os espaços duais  $\dot{\theta}^*$  e  $\dot{\chi}^*$ .

## 2.6. DISCUSSÃO SOBRE PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS.

Com os conceitos e procedimentos genéricos sobre planejamento de trajetória, apresentados nas secções 2.2 e 2.3, bem como com os trabalhos

específicos sobre planejamento, apresentados nas secções 2.4 e 2.5, é possível retirar-se algumas conclusões sobre o estado atual da pesquisa em planejamento de trajetória e sobre a proposta do presente trabalho.

Inicialmente, todos os métodos e formulações têm como ponto de partida um conjunto de pontos no espaço cartesiano, que, via cinemática inversa são mapeados em pontos no espaço de coordenadas de junta, ou seja, o vetor  $\mathcal{X}$  é transformado no vetor  $\Theta$ . Sobre estes pontos são colocadas restrições, quanto à posição, velocidade e aceleração que a trajetória do efetuador deve respeitar, restrições estas em termos absolutos, especificadas, ou em termos relativos, de modo a garantir a continuidade do movimento, da velocidade ou da aceleração. Por outro lado, é possível também classificar as restrições como rígidas, que devem ser necessariamente respeitadas, ou como flexíveis, que a trajetória final não é obrigada a respeitar, devendo porém aproximar-se ao máximo possível daquela restrição, como ocorre, por exemplo, no caso de pontos intermediários que orientam a trajetória, sem que esta, porém, passe exatamente por eles, definindo assim um erro, que pode ser então minimizado.

Quanto à função utilizada para gerar a trajetória, pode ser uma única função, que passe por todos os pontos e respeite as restrições de posição, velocidade e aceleração (função interpoladora), ou que se aproxime o máximo possível dos pontos especificados (função de ajuste). Por outro lado, é possível usar não uma única função que passe por todos os pontos, mas um conjunto de funções, em que cada uma define a trajetória sobre um trecho, ficando assim a trajetória final formada pela superposição dos vários trechos em que esta foi dividida. Deste modo a trajetória passa a ser uma função contínua, seccionalmente definida, sendo este o conceito básico envolvido na definição de curvas quaisquer através do uso de splines.

Tendo por base estas considerações, as mais diferentes metodologias podem ser desenvolvidas para definir a trajetória, seja buscando um planejamento em coordenadas de juntas, como discutido na secção 2.4, seja em coordenadas cartesianas, como discutido em 2.5. Adicionalmente é necessário ainda considerar os métodos que têm a sua formulação na forma explícita e os métodos que a tem na forma implícita, exigindo ou a solução de um sistema de equações algébricas, ou um processo numérico iterativo.

Quando o número de restrições é relativamente elevado, o uso de uma única função, seja interpoladora, seja de ajuste, exige, em primeiro lugar, um significativo esforço numérico para defini-la e, em segundo lugar, apresenta em geral um comportamento pouco satisfatório. Assim, é conveniente usar um conjunto de funções mais simples, cada uma definindo um trecho da trajetória, o que melhora o comportamento da função e simplifica o seu cálculo.

Fazendo agora um resumo dos trabalhos levantados na bibliografia, os desenvolvimentos de planejamento de trajetória em coordenadas de junta mostram-se bastante escassos, havendo inicialmente a interpolação linear, no caso de uma trajetória ponto a ponto. Quanto às trajetórias contínuas, tem-se as formulações apresentadas em [12], onde a trajetória é dividida em trechos, usando as formulações 4-3-4, 3-5-3 e 5x3, onde as duas primeiras usam três funções e a última usa cinco funções polinomiais do terceiro grau. Esta última, que fornece uma solução explícita, tem como desvantagem a necessidade de adicionar dois pontos, sobre os quais não se tem controle de posicionamento. Assim, vê-se que as formulações para as trajetórias contínuas, em coordenadas de junta, são baseadas em funções polinomiais, tipicamente para trajetória de movimentação. Com o uso dos pontos de afastamento e de aproximação, fica dificultado o uso ou a adaptação para trajetórias de precisão, especialmente no caso da formulação 5x3, onde o usuário não tem controle sobre o posicionamento dos dois pontos centrais do trecho de movimentação, colocados adicionalmente.

Quanto aos trabalhos desenvolvidos para o planejamento de trajetórias em coordenadas cartesianas, estes mostram-se em número mais expressivo, sendo é possível dividi-los em dois grupos. No primeiro, estão os trabalhos que procuram realizar o planejamento de trajetórias retilíneas em coordenadas cartesianas, que são os trabalhos de Paul [28] e de Taylor [39], complementados por seus próprios desenvolvimentos, para concatenar de forma suave dois segmentos de reta. No segundo grupo estão os trabalhos que usam critérios de otimização, através da minimização de uma variável. Os trabalhos de Mayorga [23,24], preocupam-se em minimizar a energia consumida pelo manipulador. A trajetória do tipo 5x3 da referência [12], quando é utilizado o critério de otimização, busca o mínimo tempo em que a trajetória pode ser cumprida. Finalmente, os trabalhos [19,20] usam o conceito de erro entre a trajetória real e a trajetória pretendida, sendo este minimizado na busca da solução da trajetória. Deste modo os trabalhos mais interessantes encontram-se como planejamento de trajetórias em coordenadas cartesianas, em que existe a preocupação constante do cálculo da cinemática inversa, com o cálculo de  $J(\theta)^{-1}$ , conforme [42], ou então com os pontos de singularidade de  $J(\theta)$ , [23,24]. Assim, a maioria dos trabalhos, e em especial os que usam algum critério de minimização na definição da trajetória, são viáveis para uma aplicação "off-line", onde não é exigido o processamento em tempo real, tanto para os parâmetros que definem a trajetória, como para o cálculo da trajetória propriamente dita. Finalmente, cumpre salientar a inexistência de referência na bibliografia consultada ao conceito de trajetória adaptativa para processamento em tempo real de indicações de sensores externos, exceto [35, 36].

## CAPÍTULO 3.

### USO DOS POLINÔMIOS CÚBICOS DE HERMITE NO PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS DE MANIPULADORES.

Conforme já comentado, a pesquisa bibliográfica a respeito dos procedimentos existentes para o planejamento de trajetórias de manipuladores mostra que estes apresentam-se bastante deficientes, no que concerne à facilidade de programação (sistemas amigáveis, com pequeno volume de dados exigido), rapidez de processamento (que não exigem soluções iterativas ou então via sistema de equações) e flexibilidade de programação, isto sem contar na possibilidade de gerar trajetórias adaptativas. Com o uso de um planejamento de trajetória baseado em polinômios cúbicos de Hermite, em coordenadas de junta, é possível suprir praticamente todas as deficiências acima, permitindo ainda gerar trajetórias de transporte, ou trajetórias de precisão.

De um modo geral, conforme usado neste trabalho, a trajetória a ser analisada é formada, na realidade, por vários polinômios cúbicos de Hermite (PCH), de modo que a trajetória na realidade seja constituída por um certo número de trechos, existindo em cada um destes um polinômio de Hermite. Assim, é possível definir pontos intermediários à trajetória, o que permite controlar a forma desta, conforme ilustra a figura 3.1, no caso com o uso de quatro polinômios de Hermite.

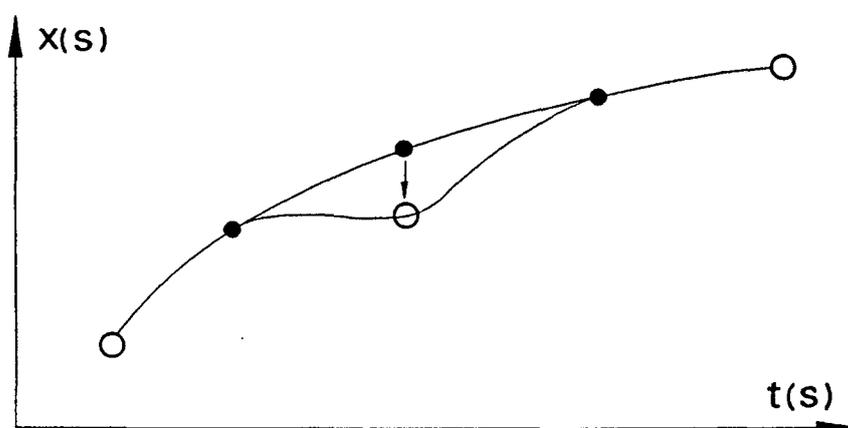


Figura 3.1 - Trajetória de quatro trechos.

Nas seções a seguir são detalhadas as principais características das trajetórias planejadas através dos polinômios cúbicos de Hermite, iniciando com uma breve revisão sobre splines.

### 3.1 AJUSTE DE CURVAS E SPLINES.

A decisão de desenvolver trajetórias com o uso dos polinômios cúbicos de Hermite deve-se à grande flexibilidade que estes apresentam, na definição de trajetórias, aliada à simplicidade algébrica, o que permite, em primeiro lugar, o desenvolvimento de formulações de trajetórias de movimentação, de trajetórias de precisão, e de trajetórias adaptativas. Em segundo lugar, estas formulações levam a um equacionamento explícito, com conseqüente redução do esforço de cálculo, viabilizando o desenvolvimento de manipuladores rápidos adaptativos [6, 18, 35, 36]. Dentre outras funções com possibilidade de uso no planejamento de trajetória, pode-se citar os polinômio de Lagrange, as curvas de Bezier e as curvas de B-Splines.

No caso dos polinômios de Lagrange, como é uma formulação interpoladora, onde a função passa exatamente sobre todos os pontos fornecidos, apresenta uma série de dificuldades, como por exemplo:

- Trajetória de movimentação, com pontos extremos especificados. Como são dados apenas dois pontos, o polinômio de Lagrange neste caso é uma reta. Com o uso da formulação por Hermite, a trajetória é composta por três trechos, em cada um existindo um polinômio do terceiro grau, conforme figura 3.2.
- Trajetória de precisão, com pontos intermediários para orientar a trajetória. Neste caso o grau do polinômio depende do número de pontos fornecidos, assim apresentando um número de inflexões na curva que é também função do número de pontos. Isto leva a uma trajetória ondulada, com pouco controle sobre o comportamento da trajetória nos trechos entre pontos, como mostra a figura 3.3.

O uso das curvas de Bezier, assim como das curvas por B-Spline, caracterizam-se por serem formulações de aproximação, onde a curva não passa pelos pontos dados, com exceção dos pontos extremos. Isto leva a uma considerável dificuldade no planejamento de trajetórias de precisão, em que o efetuador deve obrigatoriamente passar por certos pontos. Um ponto adicional que é desfavorável à uma formulação baseada em B-Splines é o fato do cálculo das funções não ser explícito, devendo ser feito um processamento recursivo, tanto mais trabalhoso quanto maior o número de pontos e a ordem das splines.

Assim, para o uso na formulação de planejamento de trajetória, tanto Lagrange, como Bezier, como B-Splines apresentam desvantagens em relação aos polinômios cúbicos de Hermite.

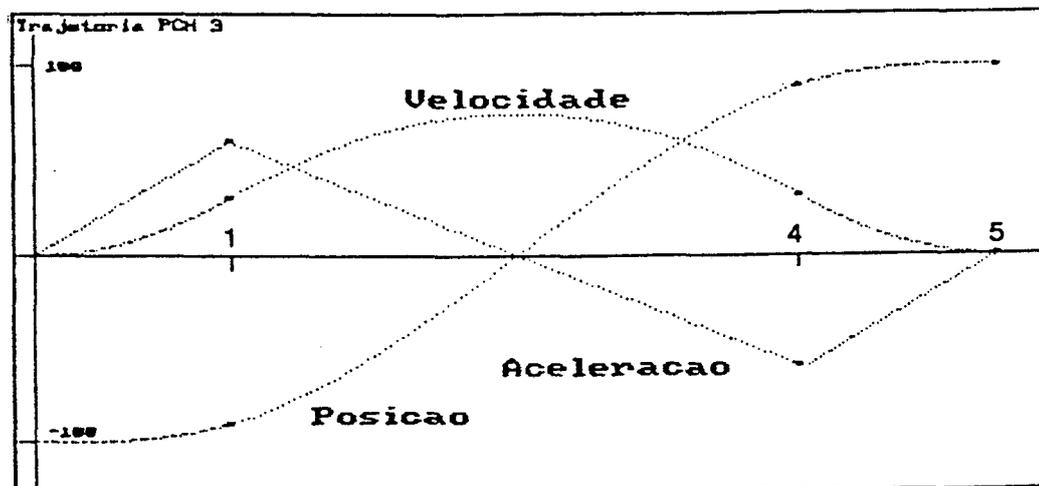


Figura 3.2 - Trajetória de três trechos, com formulação por polinômios cúbicos de Hermite. Apenas os dois pontos extremos devem ser fornecidos.

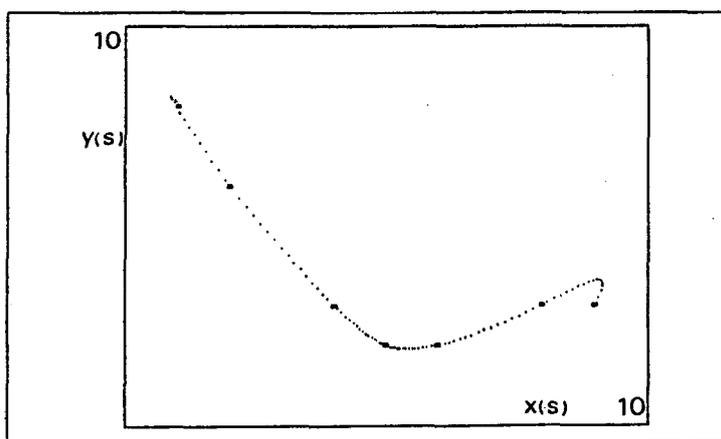


Figura 3.3 - Trajetória por Lagrange, com pontos intermediários.

### 3.2. TRAJETÓRIAS COM POLINÔMIOS CÚBICOS DE HERMITE.

Os polinômios cúbicos de Hermite são funções que possuem a propriedade de, dados dois pontos, passar por estes pontos e, simultaneamente, respeitar as derivadas especificadas nestes dois pontos. Assim, a função fica perfeitamente definida por quatro dados, que são, o valor da função nos pontos extremos e o valor da derivada da função nestes mesmos pontos. A forma usual de apresentação dos polinômios cúbicos de Hermite é a forma parametrizada:

$$F(s) = F_1 (2s^3 - 3s^2 + 1) + F_2 (-2s^3 + 3s^2) + dF_1 (s^3 - 2s^2 + s) + dF_2 (s^3 - s^2) \quad (3.1)$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são os valores da função nos pontos extremos e  $dF_1$  e  $dF_2$  são as derivadas da função nos pontos extremos.

Para que  $F(s)$  represente a equação de uma trajetória, é necessário interpretar  $s$  como sendo o tempo adimensionalizado, ou, então, definir uma outra função  $t(s)$ , onde a variável  $s$  passa a fazer o papel de um parâmetro, que simultaneamente, determina  $F(s)$  e  $t(s)$  e, portanto, a trajetória  $F(t)$ , de forma indireta. Se a função  $t(s)$  é também expressa através do uso de um polinômio cúbico de Hermite, uma série de vantagens advém, além da interpretação dos dados de (3.2), análoga ao caso da equação (3.1):

$$t(s) = t_1 (2s^3 - 3s^2 + 1) + t_2 (-2s^3 + 3s^2) + dt_1 (s^3 - 2s^2 + s) + dt_2 (s^3 - s^2) \quad (3.2)$$

A principal vantagem que surge com o uso da trajetória definida parametricamente, onde tanto  $F(s)$  como  $t(s)$  são expressas por PCH, é a flexibilidade na obtenção da trajetória, o que permite compatibilizar as diferentes restrições de posição e tempo em cada um dos pontos que definem a trajetória, bem como também assegurar uma continuidade de velocidade e de aceleração em qualquer ponto sobre a trajetória, mesmo os que separam de uma forma explícita um PCH de outro PCH de outro trecho.

A formulação dos PCH pode ser obtida considerando que se deseja uma função paramétrica que passe em dois pontos extremos (em  $s = 0$  e em  $s = 1$ , sendo  $s$  o parâmetro) e que tenha derivadas especificadas nestes mesmos pontos. Assim existem quatro dados, logo, se a função for polinomial, esta deve ser do terceiro grau, com quatro constantes a determinar. Aplicando as condições ao polinômio, chega-se à equação (3.1), como mostrado no Apêndice 1.

### 3.3. PROPRIEDADES DOS POLINÔMIOS CÚBICOS DE HERMITE.

Conforme já citado na seção 3.2, os polinômios cúbicos de Hermite possuem como propriedades o fato de passarem pelos pontos  $F_1$  e  $F_2$ , e de possuírem nestes pontos derivadas  $dF_1$  e  $dF_2$ , respectivamente. Quando o planejamento de trajetória é efetuado através de PCH, na sua forma parametrizada, passa-se a ter duas funções, uma que dá a coordenada da trajetória, como  $x(s)$  e outra que dá o tempo em que o ponto é atingido, como  $t(s)$ . Assim, como  $s$  varia no intervalo  $[0;1]$ , para definir de forma explícita e unívoca a trajetória, é necessário conhecer os valores de  $x(0)$ ;  $x(1)$ ;  $dx(0)$ ;  $dx(1)$ , bem como  $t(0)$ ;  $t(1)$ ;  $dt(0)$ ;  $dt(1)$ , num total de oito dados. A figura 3.4 ilustra uma trajetória gerada por dois PCH parametrizados,  $x(s)$  e  $t(s)$ , com indicação das variáveis que devem ser fornecidas para definir a função  $x(t)$ .

Da teoria de funções representadas parametricamente vem que, para um ponto qualquer sobre a trajetória, a velocidade e a aceleração são dadas, respectivamente, por

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{x_{,s}}{t_{,s}} \quad (3.3)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{t_{,s} x_{,ss} - t_{,ss} x_{,s}}{t_{,s}^3} \quad (3.4)$$

Nos pontos extremos, onde  $s = 0$  ou  $s = 1$ ,  $\dot{x}$  e  $\ddot{x}$  são calculados de forma semelhante, apenas particularizada para os valores de  $s$ , conforme se encontra detalhado no Apêndice 1. Estes valores são fundamentais na especificação das condições que a trajetória deve satisfazer nos seus extremos. Considerando uma curva em  $R^2$ , definida parametricamente por dois PCH, um que fornece  $x(s)$  e outro para  $y(s)$ , a figura 3.5 mostra o efeito de  $dx$  e  $dy$  sobre a forma da curva definida por  $x(s)$  e  $y(s)$ , mudando a derivada no ponto inicial e, na figura 3.6, mudando a magnitude de  $dx$  e  $dy$ , porém mantendo constante a derivada.

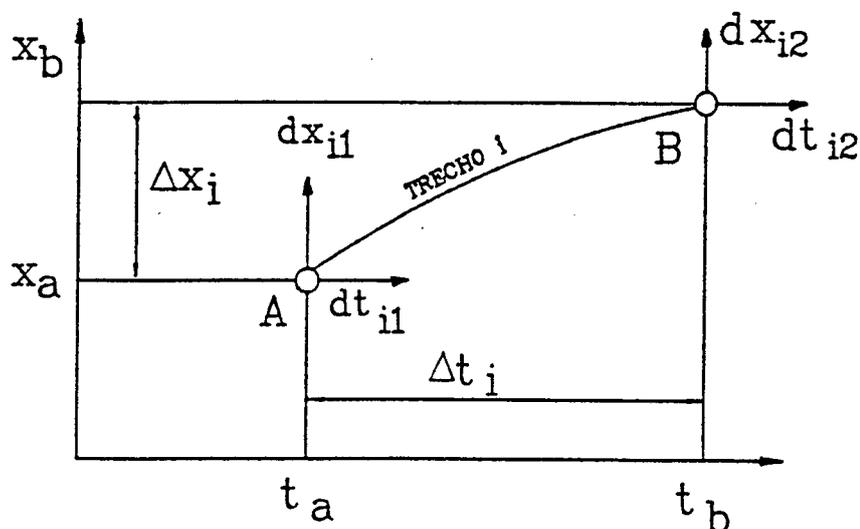


Figura 3.4 - Função  $x(t)$ , com representação paramétrica.

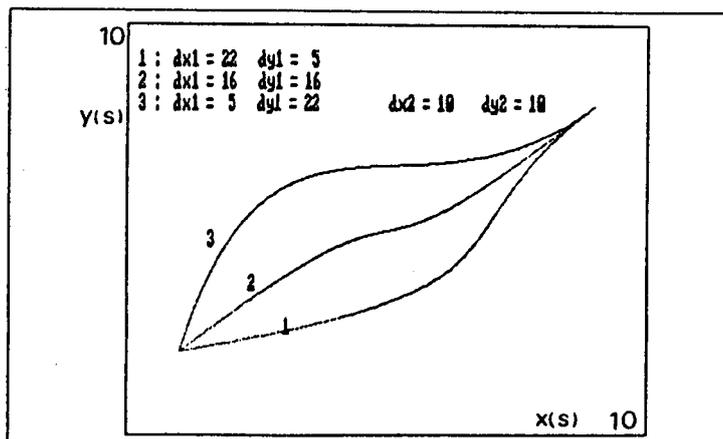


Figura 3.5 - Efeito da derivada no ponto inicial .

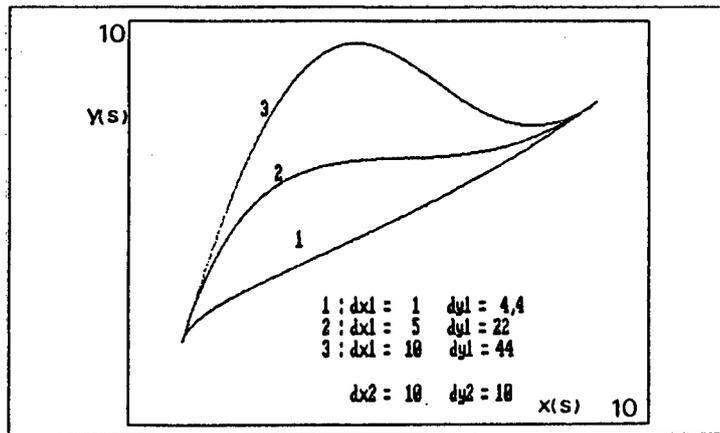


Figura 3.6 - Efeito da magnitude de  $dx$  e  $dy$ , para igual derivada no ponto inicial.

O uso dos polinômios cúbicos de Hermite para o planejamento de trajetórias mostra-se bastante confortável, pela imediata identificação entre os efeitos discutidos acima e os aspectos de definição de velocidade e de aceleração nos pontos extremos, quando são usados dois polinômios, um  $x(s)$  e outro  $t(s)$ , o que se mostra bastante útil na obtenção de uma trajetória definida por vários trechos.

#### 3.4. EFEITOS DA FUNÇÃO $t(s)$ NÃO LINEAR.

Um aspecto fundamental na definição de trajetórias com o uso de uma representação paramétrica dos PCH é de que a função  $t(s)$  deve ser uma função monotonamente crescente, para ser fisicamente realizável, figura 3.7, ou seja, não deve ocorrer reversão de  $t(s)$ , quando  $s$  varia no intervalo  $[0;1]$ . Esta consideração leva à condição óbvia de que é necessário que

$$t_{,s}(s) > 0 \quad (3.5)$$

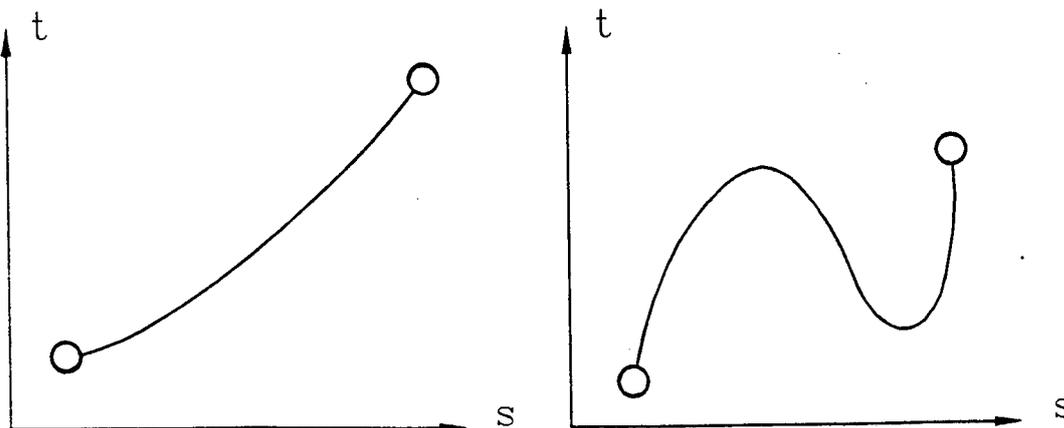


Figura 3.7 - Funções  $t(s)$  fisicamente realizável, (a) e irrealizável, (b).

Deste modo, para que a trajetória exista, é necessário verificar sob que condições a relação (3.5) é satisfeita, ou, o que é equivalente, que a condição  $t_{,s}(s) \leq 0$  ocorra fora do intervalo  $[0;1]$ . Da equação de  $t(s)$  e do Apêndice 1, vem,

$$t_{,s} = \Delta t(-6s^2+6s) + dt_1(3s^2-4s+1) + dt_2(3s^2-2s) \quad (3.6)$$

e levando em conta a condição  $t_{,s} > 0$ , resulta portanto a expressão em  $s$ ,

$$s^2 [-6\Delta t + 3(dt_1 + dt_2)] + s [6\Delta t - (4dt_1 + 2dt_2)] + dt_1 \geq 0 \quad (3.7)$$

onde tem-se que  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

A resolução de (3.7), embora seja uma simples equação algébrica do segundo grau, não leva a uma solução simples e elegante sobre as relações entre  $\Delta t$ ,  $dt_1$  e  $dt_2$  para satisfazer (3.6). Assim, foi buscada uma solução alternativa que forneça uma orientação sobre os limites de  $dt_1$  e  $dt_2$ , para satisfazer (3.6). Esta solução alternativa considera que, como casos extremos, as raízes de (3.7) estarão ou sobre o ponto  $s = 0$ , ou sobre o ponto  $s = 1$ . Para o caso onde o ponto crítico está em  $s = 1$  ocorre, portanto  $t_{,s}(1) = 0$ ; logo, conforme discutido em 3.3, tal implica que  $dt_2 = 0$ . Com esta restrição, busca-se então o limite em  $dt_1$  e  $\Delta t$  para que  $s_{cri} \geq 1$ . A solução de (3.7) para  $dt_2 = 0$  é :

$$s_{1,2} = \frac{-6\Delta t + 4dt_1 \pm 2 [3\Delta t - dt_1]}{2 [-6\Delta t + 3dt_1]} \quad (3.8)$$

e para que  $s \geq 1$ , resulta :

$$dt_1 - 3\Delta t \leq \pm [3\Delta t - dt_1] \quad (3.9)$$

em que a raiz negativa leva a uma solução trivial e a raiz positiva leva à condição :

$$dt_1 \leq 3\Delta t \quad (3.10)$$

No caso em que se considera agora  $dt_1 = 0$ , a condição a ser cumprida é que  $s_{cri} \leq 0$ ; nesta situação, a equação (3.7) fornece :

$$-6\Delta t + 2dt_2 \pm 2 (3\Delta t - dt_2) \leq 0 \quad (3.11)$$

ou o que é equivalente,

$$-dt_2 + 3\Delta t \geq \pm [3\Delta t - dt_2] \quad (3.12)$$

A raiz positiva leva a uma solução trivial e a raiz negativa ao resultado :

$$dt_2 \leq 3\Delta t \quad (3.13)$$

As equações (3.10) e (3.13) são válidas quando  $dt_2 = 0$  e  $dt_1 = 0$ , respectivamente. Para outros casos, são conservativas, já que se, por exemplo,  $dt_2 > 0$ , o valor crítico de  $dt_1$  passa a ser maior que  $3\Delta t$ . Por outro lado, conforme será comentado na secção 4.1, o limite representado por (3.10) e (3.13) é bastante elevado, não sendo fator limitante para o uso da formulação apresentada no planejamento de trajetória. Vale observar finalmente que, quando ambos os limites máximos são atingidos, ou seja, quando  $dt_1 = dt_2 = 3\Delta t$ , a função  $t(s)$  passa a apresentar  $t_{,s}(0,5) = 0$ , porém é um ponto de inflexão, conforme pode ser comprovado, já que  $t_{,ss}(0,5) = 0$ ; assim mesmo, esta situação não compromete a existência de  $t(s)$ .

Um outro ponto que deve ser analisado, e que é consequência da função  $t(s)$  ser não linear, diz respeito aos intervalos de tempo entre cada dois pontos consecutivos que são calculados. Estes pontos são calculados com um espaçamento uniforme do parâmetro  $s$  ou seja, são calculados a cada  $\Delta s$ , tomado, por exemplo, como 0,005. Como  $t(s)$  é um polinômio do terceiro grau, os intervalos de tempo entre pontos consecutivos não são constantes sobre toda a trajetória. Este fato pode levar a dificuldades quando do uso dos dados gerados da trajetória, por parte do sistema de controle do manipulador, que tem uma frequência fixa de amostragem, necessitando portanto de dados com um espaçamento não maior do que o tempo de amostragem,  $T_{amostragem}$ . Assim é importante verificar como os pontos gerados por  $t(s)$  se distribuem no tempo, de modo a estimar o máximo valor para  $\Delta s$  compatível com a frequência de amostragem. O valor de  $\Delta t(s)$ , correspondente ao intervalo de tempo entre dois pontos consecutivos da trajetória pode ser obtido como

$$\Delta t(s) = t_{,s} \Delta s \quad (3.14)$$

e para calcular o máximo  $\Delta t(s)$ , deve-se determinar o máximo de  $t_{,s}$ , conforme equação (3.6).

Para obter o máximo de  $t_{,s}$  é necessário obter as raízes em  $s$  que anulam a segunda derivada de  $t(s)$ , ou seja, resolver a equação em  $s$

$$\Delta t(-12s + 6) + dt_1(6s - 4) + dt_2(6s - 2) = 0 \quad (3.15)$$

Esta equação tem raiz

$$s = \frac{1}{3} \frac{3\Delta t - 2dt_1 - dt_2}{2\Delta t - dt_1 - dt_2} \quad (3.16)$$

e assim o valor de  $t_{,s}$  deve ser calculado em  $s$  obtido por (3.16), para então se obter qual  $\Delta s$  deve ser adotado no planejamento da trajetória,

$$\Delta s = T_{\text{amostragem}} / t_{,s} \quad (3.17)$$

Considerando, agora, um caso particular em que  $dt_1 = dt_2$ , e iguais a  $dt$ , para obter-se uma idéia do comportamento de  $\Delta s$ , por (3.16) verifica-se que a raiz é  $s = 0,5$  neste caso, e assim (3.14) reduz-se a :

$$t_{,s} = \Delta t(1,5) + dt(-0,25) + dt(-0,25) \quad (3.18)$$

Dependendo dos valores de  $\Delta t$  e de  $dt$ , a derivada  $t_{,s}$  pode assumir qualquer valor, porém o seu máximo ocorre quando  $dt$  for igual à zero, pois os termos em  $dt$  são subtrativos; portanto o máximo de  $t_{,s}$  é  $1,5\Delta t$ . Usando (3.17), resulta que, ao menos para esta situação aqui discutida, que  $\Delta s$  deve ser não maior do que :

$$\Delta s = T_{\text{amostragem}} / (1,5 \Delta t) \quad (3.19)$$

Para uma situação geral em que os valores de  $dt_1$  e  $dt_2$  são quaisquer, é necessário usar a formulação geral, equações (3.16), (3.6) e (3.17), nesta ordem. Concluindo esta discussão sobre os efeitos de adotar uma função  $t(s)$  não linear, pode-se dizer, de forma resumida, de que para a existência de  $t(s)$  é necessário que  $dt_1 \leq 3\Delta t$  e também que  $dt_2 \leq 3\Delta t$ . Quanto ao intervalo  $\Delta s$  com que os pontos são calculados, este deve ser relacionado com o intervalo de tempo de amostragem do sistema de controle do manipulador, como discutido.

## CAPÍTULO 4.

### TRAJETÓRIAS NÃO ADAPTATIVAS.

Neste Capítulo são desenvolvidas as formulações de três tipos de trajetórias, usando PCH, com diferentes números de trechos, com aplicações em diferentes casos, pré-programadas, ou seja, não adaptativas. Assim, na secção 4.1 é apresentada e discutida a formulação de uma trajetória de três trechos, de grande flexibilidade para uso como trajetória de transporte ou de precisão e é fundamental para o desenvolvimento da trajetória adaptativa. Na secção 4.2 tem-se uma trajetória de quatro trechos, que permite um maior controle sobre os pontos por onde a trajetória passa, já que são especificados cinco pontos no espaço cartesiano, ou através da cinemática inversa, no espaço de coordenadas de junta. A secção 4.3 apresenta uma formulação genérica para uma trajetória com um número qualquer de trechos, situação que leva à necessidade de resolver um sistema de equações não lineares para se obter a solução da trajetória, enquanto que as trajetórias discutidas em 4.1 e 4.2 levam a soluções explícitas. Finalmente a secção 4.5 apresenta exemplos de aplicação das propostas de formulação.

Em qualquer uma das formulações discutidas, a trajetória é sempre formada pela justaposição de trechos, em que cada trecho possui o seu próprio PCH; nos pontos de transição assegura-se continuidade de posição, velocidade e aceleração, garantindo desta forma um movimento suave ao longo de toda a trajetória.

#### 4.1. TRAJETÓRIA DE TRÊS TRECHOS.

A trajetória mais simples que apresenta interesse prático, para trajetórias divididas em trechos, é a de três trechos aqui discutida. Existe um primeiro trecho de afastamento do ponto inicial, um trecho intermediário de movimentação e finalmente um trecho de aproximação até o ponto final. Os dois trechos extremos são importantes para controlar a posição inicial e final do elemento ativo do manipulador, a orientação com que o mesmo se afasta ou se aproxima do ponto terminal, bem como ainda a velocidade com que se dá o movimento nestes trechos críticos. A figura 4.1 mostra uma trajetória decomposta em três trechos, em que cada um será calculado através de um PCH próprio. O princípio que leva à formulação final é o da continuidade de velocidade e de aceleração nos pontos de transição de um trecho para o seguinte, garantindo assim, uma trajetória que é efetuada de modo suave.

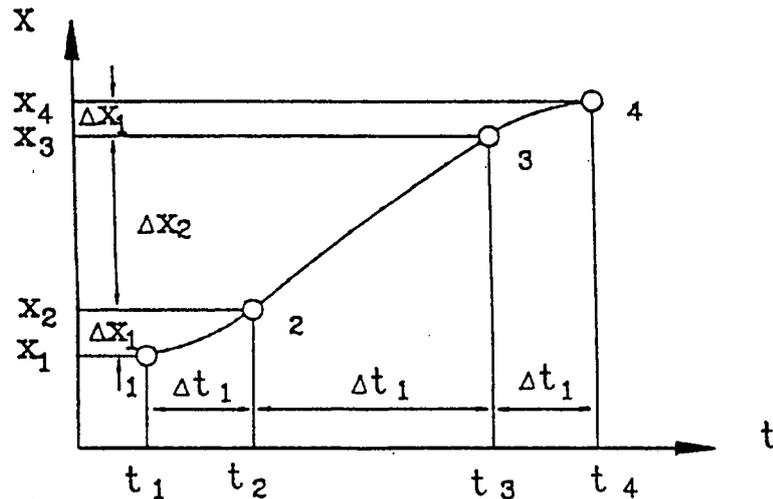


Figura 4.1 - Trajetória de três trechos usando PCH em cada trecho.

Em cada um dos três trechos é necessário especificar quatro valores para definir  $x(s)$  e mais quatro valores para definir  $t(s)$ , sendo portanto necessário especificar 24 parâmetros para definir os seis PCH da trajetória  $x(t)$ , em um primeiro enfoque, sem maiores preocupações em reduzir o esforço computacional. Com o uso da formulação aqui desenvolvida, um total de seis dados apenas é suficiente, facilitando em muito a definição da trajetória, tornando mais amigável a tarefa de planejamento de trajetória e de programação do manipulador. Outro aspecto a considerar preliminarmente é o da existência de  $t(s)$ , seguindo as orientações fornecidas em 3.4. Porém se nos trechos extremos da trajetória for usada uma particularização do PCH, onde  $dt_1 = dt_2 = \Delta t = t_2 - t_1$ , da equação (3.2) resulta que  $t(s)$  passa a ser uma função linear

$$t(s) = t_1 + s \Delta t \quad (4.1)$$

e desta forma a questão da existência de  $t(s)$  é irrelevante, já que  $\Delta t > 0$ . No trecho de movimentação, usando uma função  $t(s)$  completa, este aspecto da existência de  $t(s)$  é relevante, sendo necessário satisfazer (3.10) e (3.13).

Conforme detalhado no Apêndice 2, considerando que nos pontos extremos tanto a velocidade como a aceleração sejam nulas, de forma a permitir um trecho de afastamento e um trecho de aproximação com movimento suave, com precisão de posicionamento e de orientação do elemento ativo do manipulador, bem como as condições de continuidade de  $\dot{x}$  e de  $\ddot{x}$  nos pontos 2 e 3, chega-se no seguinte sistema de equações (equações (A2.14), Apêndice 2):

$$\begin{cases} Cdt_{21}^2 + Bdt_{22} + A = 0 \\ Fdt_{22}^2 + Edt_{21} + D = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $dt_{21}$  e  $dt_{22}$  são os valores da derivada da função  $t(s)$  nos pontos extremos do segundo trecho. Os coeficientes de (4.2) são :

$$A = 3 \Delta x_1 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} - \Delta x_2 \quad (4.3)$$

$$B = \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} - \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad (4.4)$$

$$C = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} \quad (4.5)$$

$$D = 3 \Delta x_3 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_3} - \Delta x_2 \quad (4.6)$$

$$E = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} - \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \quad (4.7)$$

$$F = \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3^2} \quad (4.8)$$

O sistema (4.2), embora constituído de apenas duas equações, apresenta-se como não linear. Analisando as equações (4.2), estas podem ser desacopladas se  $B = 0$  e  $E = 0$ , o que é satisfeito com

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \quad (4.9)$$

que corresponde fisicamente a que a velocidade média no trecho de afastamento seja igual à velocidade média no trecho de aproximação. Em termos práticos isso é facilmente realizável e pode ser conveniente, uniformizando o percurso nos trechos de afastamento e de aproximação. Com (4.9) satisfeita, (4.2) passa a ser

$$C dt_{21}^2 + A = 0 \quad (4.10)$$

$$F dt_{22}^2 + D = 0 \quad (4.11)$$

e assim fica imediata a solução de  $dt_{21}$  e  $dt_{22}$  como

$$dt_{21} = \sqrt{-A/C} \quad (4.12)$$

$$dt_{22} = \sqrt{-D/F} \quad (4.13)$$

Para que (4.12) e (4.13) tenham solução é necessário que  $C \neq 0$  e  $F \neq 0$ , o que de acordo com (4.5) e (4.8), ocorre desde que existam acréscimos de coordenada nos trechos extremos, ou seja,  $\Delta x_1 \neq 0$  e  $\Delta x_3 \neq 0$ . Por outro lado, é ainda necessário que  $A \leq 0$  e  $D \leq 0$ . Usando (4.3) e (4.6), resulta

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \leq \frac{1}{3} \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \quad (4.14)$$

$$\frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \leq \frac{1}{3} \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \quad (4.15)$$

e como (4.9) é uma preliminar, apenas uma das duas equações acima é suficiente. Estas equações significam que a velocidade média nos trechos extremos deve ser inferior a 1/3 da velocidade média no trecho de movimento. De um modo geral, é possível escrever :

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{1}{K} \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \quad (4.16)$$

com :

$$K \geq 3 \quad (4.17)$$

Assim, para haver solução de (4.12) e (4.13), é necessário que (4.17) seja satisfeita. Usando (4.3) a (4.8), os parâmetros que definem o trecho intermediário são dados por (4.18) a (4.21) :

$$dt_{21}^2 = \left[ \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \Delta t_1 - 3\Delta t_2 \right] \Delta t_1 \quad (4.18)$$

$$dt_{22}^2 = \left[ \frac{\Delta x_2}{\Delta x_3} \Delta t_3 - 3\Delta t_2 \right] \Delta t_3 \quad (4.19)$$

$$dx_{21}^2 = 9 \left[ \Delta x_1 \Delta x_2 - 3\Delta x_1^2 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \right] \quad (4.20)$$

$$dx_{22}^2 = 9 \left[ \Delta x_3 \Delta x_2 - 3\Delta x_3^2 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_3} \right] \quad (4.21)$$

Na solução de uma dada trajetória, em geral conhecem-se inicialmente os pontos extremos, ou seja,  $x_1$  e  $x_4$ , conforme figura 4.1, bem como os intervalos de tempo  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  e  $\Delta t_3$ . Os pontos internos podem ser obtidos com o uso de (4.9) e de (4.16), bem como considerando que :

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = \Delta x \quad (4.22)$$

o que leva à equação :

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x}{1 + K \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} + \frac{\Delta t_3}{\Delta t_1}} \quad (4.23)$$

e portanto com o uso de (4.9) e (4.22), resultam  $\Delta x_3$  e  $\Delta x_2$ .

O valor da constante K, segundo (4.17), deve ser maior ou igual à 3, embora, como comentado mais adiante, a condição  $K = 3$  leva a uma descontinuidade de aceleração. No entanto, um outro aspecto deve ser cuidado, que é a existência da função  $t(s)$ , o que exige o cumprimento de (3.10) e de (3.13). Com o uso de (4.9), (4.16) e (4.22), a equação (3.10) pode ser escrita como :

$$K \leq 3 \left[ 3 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} + 1 \right] \quad (4.24)$$

e, para a (3.13), como

$$K \leq 3 \left[ 3 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_3} + 1 \right] \quad (4.25)$$

Assim, K pode ser selecionado dentro do intervalo definido por (4.17); (4.24) e (4.25), onde, tomando como exemplo  $\Delta t_2/\Delta t_1 = 3$ , se chega a

$$3 \leq K \leq 30$$

o que é uma faixa de variação razoável.

As figuras 4.2 e 4.3 ilustram o efeito que o valor da constante K exerce sobre a forma da trajetória, bem como sobre o perfil de velocidade e de aceleração, em especial no trecho de movimentação da trajetória, já que nos trechos extremos o perfil de aceleração é sempre linear, pois considera-se a função  $t(s)$  linear. Nestas figuras, bem como em todas as outras similares, as curvas de posição, velocidade e aceleração estão todas na mesma escala de valores, conforme indicado no eixo vertical. A trajetória da figura 4.2 foi calculada com  $K = 3$  e com  $K = 5$  para a figura 4.3. A trajetória foi calculada com  $\Delta t_i$  de 1segundo, para  $i=1, 2, 3$  e  $\Delta x = -150$ , apresentando um valor de máximo de K de 12. No Apêndice A5 existem outros resultados que podem ser obtidos com a presente formulação de trajetórias.

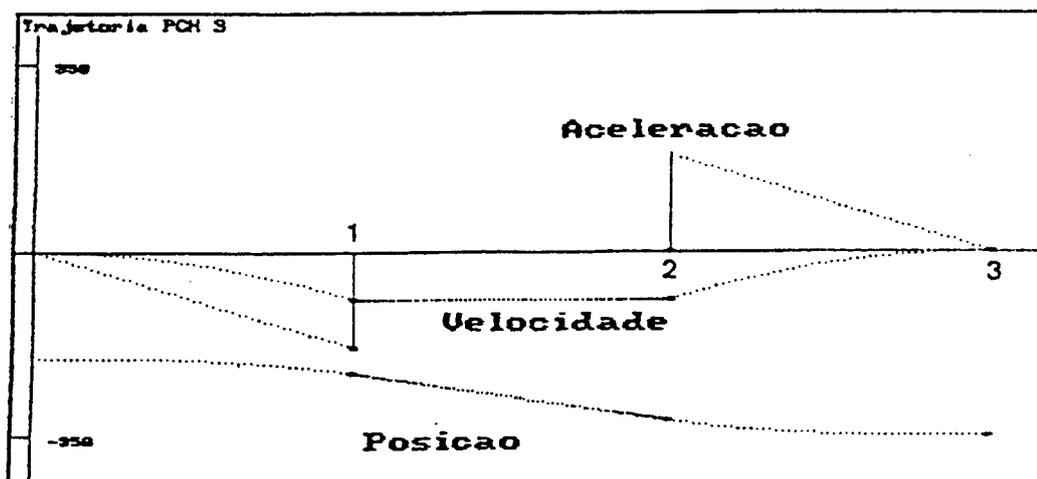


Figura 4.2 - Trajetória de três trechos planejada com uso dos PCH.

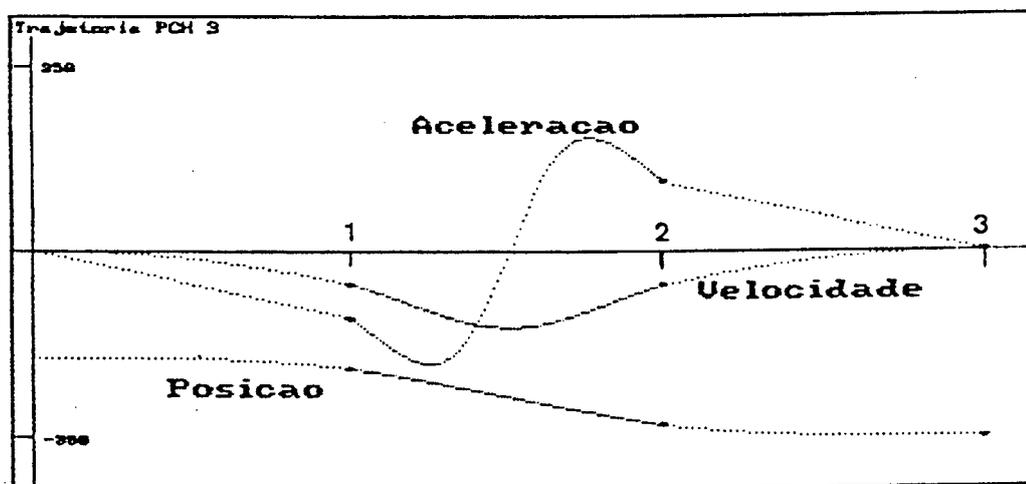


Figura 4.3 - Trajetória de três trechos planejada com uso dos PCH.

O efeito básico do fator  $K$  sobre a trajetória pode ser sentido pela análise das curvas de aceleração. Para  $K=3$ , menor valor permissível, vê-se que a aceleração no trecho intermediário é nula. Assim, toda a aceleração concentra-se nos trechos extremos. Com maiores valores de  $K$  a aceleração vai aumentando no trecho médio, reduzindo a aceleração nos trechos externos. O valor máximo de  $K$ , dado por (4.24) e (4.25), deve ser respeitado para garantir a existência da função  $t(s)$ .

#### 4.2. TRAJETÓRIA DE QUATRO TRECHOS.

Uma formulação explícita da trajetória, baseada em PCH é conseguida para o caso de quatro trechos, definida por cinco pontos no espaço, conforme mostra a figura 4.4. Neste tipo de trajetória são mantidos os trechos de afastamento e de aproximação nos extremos, ficando dois trechos intermediários de movimentação, com melhor controle sobre o comportamento da trajetória no

espaço, já que aqui os cinco pontos são diretamente especificados, ao contrário da trajetória de três trechos discutida no item 4.1, onde apenas os pontos extremos são especificados. Neste caso, todos os trechos foram considerados com  $t(s)$  linear, de modo a evitar a discussão e verificação da existência física da função  $t(s)$ . Este tipo de formulação já se apresenta com a possibilidade de um melhor comportamento no que diz respeito ao controle sobre a trajetória cartesiana, pois existem agora três pontos a serem especificados no trecho de movimentação, ou seja, um ponto a mais do que no caso da trajetória de três trechos.

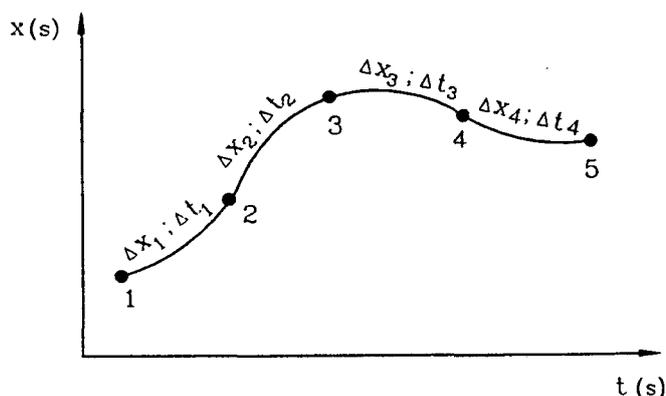


Figura 4.4 - Trajetória de quatro trechos.

A continuidade de velocidade e de aceleração no ponto 2, entre o trecho 1 e o trecho 2, é assegurada pelas equações (4.26) e (4.27) abaixo, onde o termo à esquerda da igualdade é a velocidade, ou aceleração, no fim do primeiro trecho e o termo à direita é o correspondente valor no início do trecho seguinte, conforme detalhado no Apêndice 2, equações (A2.31) a (A2.36).

$$3 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{dx_{21}}{\Delta t_2} \quad (4.26)$$

$$6 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} = \frac{1}{\Delta t_2^2} (6\Delta x_2 - 4dx_{21} - 2dx_{22}) \quad (4.27)$$

Para a continuidade, de velocidade e de aceleração, no ponto 3, entre o trecho 2 e o trecho 3,

$$\frac{dx_{22}}{\Delta t_2} = \frac{dx_{31}}{\Delta t_3} \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{\Delta t_2^2} (-6\Delta x_2 + 2dx_{21} + 4dx_{22}) = \frac{1}{\Delta t_3^2} (6\Delta x_3 - 4dx_{31} - 2dx_{32}) \quad (4.29)$$

Para a transição no ponto 4, finalmente :

$$\frac{dx_{32}}{\Delta t_2} = 3 \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} \quad (4.30)$$

$$\frac{1}{\Delta t_3^2} (-6\Delta x_3 + 2dx_{31} + 4dx_{32}) = - \frac{6\Delta x_4}{\Delta t_4^2} \quad (4.31)$$

A solução de (4.26) a (4.31) quanto a  $\Delta t_1$ ;  $\Delta t_4$ ;  $dx_{21}$ ;  $dx_{22}$ ;  $dx_{31}$ ;  $dx_{32}$ , considerando-se conhecidos  $\Delta x_1$  e também  $\Delta t_2 = -\Delta t_3$ , é dada, conforme deduzido em detalhes no Apêndice A2.2, por

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \frac{3 + \sqrt{9 + 4 r_{x1}}}{r_{x1}} \quad (4.32)$$

onde

$$r_{x1} = \frac{3\Delta x_2 - \Delta x_3}{\Delta x_1} \quad (> 0) \quad (4.33)$$

deve ser maior que zero para que  $\Delta t_1$  também o seja.

$$dx_{21} = 3 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \Delta x_1 \quad (4.34)$$

$$dx_{22} = \frac{3}{4} (\Delta x_3 + \Delta x_2) - \frac{3}{2} \Delta t_2 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad (4.35)$$

$$\Delta t_4 = \Delta t_3 \frac{3 + \sqrt{9 + 4 r_{x4}}}{r_{x4}} \quad (4.36)$$

De modo similar a (4.33), vem :

$$r_{x4} = \frac{3\Delta x_3 - \Delta x_2}{\Delta x_4} \quad (> 0) \quad (4.37)$$

portanto:

$$dx_{31} = 3\Delta x_1 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \quad (4.38)$$

$$dx_{32} = 3\Delta x_4 \frac{\Delta t_3}{\Delta t_4} \quad (4.39)$$

As equações (4.32) a (4.39) determinam assim de forma explícita a formulação da trajetória de quatro trechos, onde o problema de existência da solução prende-se unicamente à exigência de  $\Delta t_1 > 0$  e  $\Delta t_4 > 0$ , o que será satisfeito se  $r_{x1} > 0$  e se  $r_{x4} > 0$ .

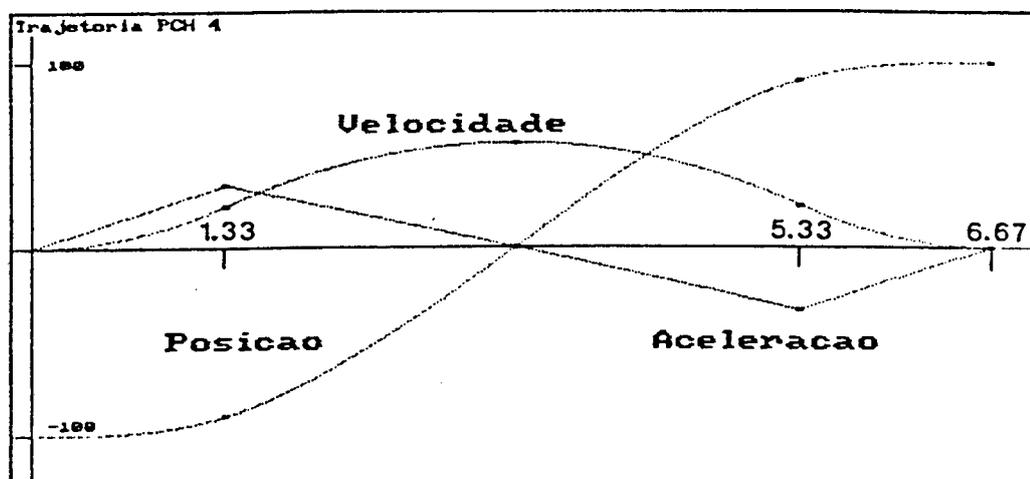


Figura 4.5 - Trajetória de quatro trechos, sem reversão, passando pelos pontos de coordenadas -100, -90, 0, 90 e 100. O intervalo de tempo entre os pontos médios é de 2 segundos, sendo a duração total de 6,66 segundos.

No caso de se desejar uma reversão ao longo da trajetória, isso deve ser feito sobre os trechos 3 e 4, onde  $\Delta x_3$  e  $\Delta x_4$  devem então ser de sinal contrário ao de  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$ . As figuras 4.5 e 4.6 mostram trajetórias de quatro trechos, calculadas seguindo (4.32) a (4.39), sem reversão e com reversão respectivamente.

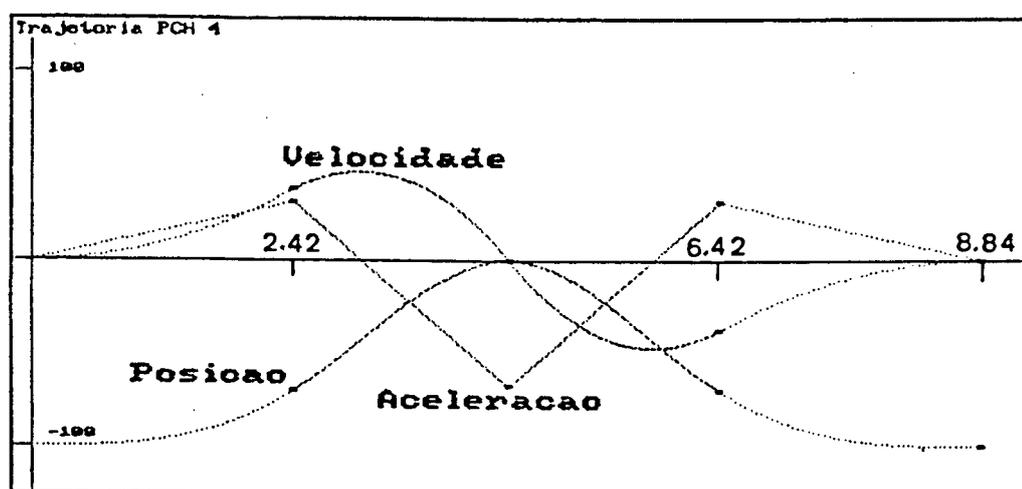


Figura 4.6 - Trajetória de quatro trechos, com reversão, passando pelos pontos de coordenadas -100, -70, 0, -70, -100. O intervalo de tempo entre os pontos médios é de 2 segundos, sendo a duração total de 8,84 segundos.

Os resultados das figuras 4.5 e 4.6 mostram, que, mesmo com intervalos idênticos entre os pontos intermediários, a duração total da trajetória é afetada pelas coordenadas dos pontos dados. Tal comportamento está descrito pelas equações (4.32) e (4.36).

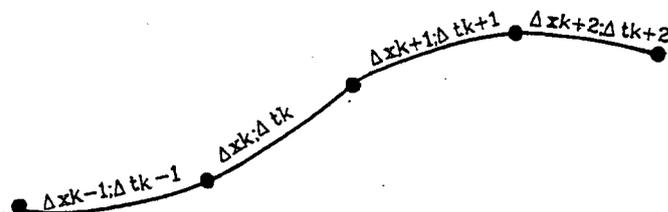


Figura 4.7 - Trajetória genérica no planejamento com o uso dos PCH por trecho.

#### 4.3. TRAJETÓRIA GENÉRICA.

Nesta secção é apresentada a formulação de uma trajetória usando os PCH com um número qualquer de trechos, onde cada trecho tem sua própria função  $x(s)$  e  $t(s)$ . Quanto à última, será considerada na sua forma linear, por razões similares às discutidas na secção 4.2. Considerando um conjunto de quatro trechos adjacentes como ilustrado na figura 4.7, será analisada a continuidade do movimento entre o trecho  $k$  e o trecho  $k + 1$ , no que diz respeito à continuidade de coordenada, de velocidade e finalmente, de aceleração.

Uma simplificação que será adotada é a de considerar constantes os valores de  $\Delta t_k$ , iguais entre si e iguais a um  $\Delta t$  genérico. Nestas condições a transição entre o trecho  $k$  e o trecho  $k + 1$  leva às equações, conforme mostra o Apêndice A2.3,

$$dx_{k;2} = dx_{k+1;1} \quad (4.40)$$

$$-6\Delta x_k + 2dx_{k;1} + 4dx_{k;2} = 6\Delta x_{k+1} - 4dx_{k+1;1} - 2dx_{k+1;2} \quad (4.41)$$

A equação (4.40), quando aplicada a cada ponto de transição, leva à conclusão que  $dx$  passa a ser um valor do ponto, já que é o mesmo, seja vindo pela esquerda, ou pela direita. Assim, a nomenclatura será relaxada e adotado  $dx_k$  para o ponto inicial do trecho  $k$ . Desenvolvendo para os outros pontos de transição da figura 4.7, resulta o sistema de equações (4.42) abaixo, com uma matriz coeficiente tridiagonal, como pode ser verificado.

$$\begin{cases}
 2dx_{k-1;1} + 8dx_k + 2dx_{k+1} & = 6(\Delta x_{k-1} + \Delta x_k) \\
 \quad 2dx_k + 8dx_{k+1} + 2dx_{k+2} & = 6(\Delta x_k + \Delta x_{k+1}) \\
 \quad \quad 2dx_{k+1} + 8dx_{k+2} + 2dx_{k+2;2} & = 6(\Delta x_{k+1} + \Delta x_{k+2}) \\
 \quad \quad \quad \dots & \dots
 \end{cases} \quad (4.42)$$

Os termos  $dx_{k-1;1}$  e  $dx_{k+2;2}$  são os termos de acoplamento com os trechos externos aos ilustrados na figura 4.7, que devem ser obtidos pelas condições de compatibilidade de velocidade nos pontos extremos, já que

$$\dot{x}_{k-1;1} = \frac{dx_{k-1;1}}{\Delta t_{k-1}} \quad (4.43)$$

$$\dot{x}_{k+2;2} = \frac{dx_{k+2;2}}{\Delta t_{k+2}} \quad (4.44)$$

Quanto à continuidade de aceleração, esta deverá ser suprida pelos trechos externos, já que os internos estão totalmente definidos com a solução de (4.42), à exceção dos termos de acoplamento. De modo a ilustrar a obtenção da formulação completa, para a trajetória aqui em estudo, será considerada a adoção de dois trechos adicionais à trajetória da figura 4.7, um primeiro de afastamento, usando a formulação já obtida para este, e um último de aproximação do ponto final da trajetória. De acordo com a formulação já discutida em 4.1, obtém-se as equações adicionais (4.45), que representam as continuidades de velocidade e aceleração para os dois pontos extremos de transição.

$$\begin{cases}
 dx_{k-1;1} \Delta t_1 & = 3\Delta x_1 \Delta t \\
 (6\Delta x_{k-1} - 4dx_{k-1;1} - 2dx_k) \Delta t_1^2 & = 6\Delta x_1 \Delta t^2 \\
 dx_{k+2;2} \Delta t_6 & = 3\Delta x_6 \Delta t \\
 (-6\Delta x_{k+1} + 2dx_{k+2} + 4dx_{k+2;2}) \Delta t_6^2 & = -6\Delta x_6 \Delta t^2
 \end{cases} \quad (4.45)$$

Neste sistema de equações, as incógnitas, além de  $dx_{k-1;1}$ ;  $dx_{k-1}$ ;  $dx_k$ ;  $dx_{k+2}$ ;  $dx_{k+2;2}$ , são também  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_6$ , num total de sete incógnitas para as sete equações do sistema formado por (4.42) mais (4.45). Assim, passa-se a ter equações não lineares no sistema, o que exige já uma estratégia diferente na obtenção da trajetória genérica, aqui equacionada para seis trechos, para solucionar um sistema de equações não lineares. Tendo em vista o objetivo final deste trabalho, na busca de formulações explícitas para o problema de planejamento de trajetória, de forma a viabilizar o seu uso em conjunto com um sistema de controle em tempo real, esta formulação genérica, detalhada na

presente secção, encontra-se em desvantagem, pelo fato de, em primeiro lugar, necessitar da solução de um sistema de equações e em segundo lugar, sistema este que apresenta equações não lineares, já que um algoritmo para obter tal solução pode inviabilizar a solução da trajetória para seu uso em tempo real. Quando no entanto é realizada uma programação "off-line", estes aspectos de não linearidade e da necessidade de resolver um sistema de equações não lineares não é absolutamente crítico. Assim, uma trajetória genérica pode ser solucionada adotando, em primeiro lugar, uma estratégia de isolar as equações não lineares através do conceito de condensação estática [9, 25] e, em segundo lugar, resolver de modo iterativo, usando o método de Newton-Raphson, o sistema reduzido de equações não lineares que resulta após a condensação. Solucionado o sistema não linear reduzido, volta-se ao sistema linear resultante e este é resolvido de forma tradicional. A formulação detalhada está no Apêndice 2.

#### 4.4. RESUMO DAS EQUAÇÕES RELEVANTES EM CADA FORMULAÇÃO.

TABELA 4.1. Formulação genérica.

DADOS :  $x_1; x_2; x_3; x_4; \dots; x_n; t_0; \Delta t$

Solução do sistema de equações não lineares, conforme A2.3.

$$dx_{11} = 0$$

$$dx_{12} = 3\Delta x_1$$

$$dt_{11} = dt_{12} = \Delta t_1$$

$$dx_{21} = 3 \Delta x_1 \Delta t / \Delta t_1$$

$$dx_{n2} = 3 \Delta x_n \Delta t / \Delta t_n$$

$$dt_{21} = dt_{22} = dt_{31} = dt_{32} = dt_{41} = \dots = \Delta t$$

$$dx_{n1} = 3\Delta x_n$$

$$dx_{n2} = 0$$

$$dt_{n1} = dt_{n2} = \Delta t_n$$

TABELA 4.2. Formulação de três trechos.

DADOS :  $\Delta x$ ;  $t_1$ ;  $t_2$ ;  $t_3$ ;  $t_4$ ;  $K$

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x}{1 + K \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} + \frac{\Delta t_3}{\Delta t_1}}$$

$$\Delta x_3 = \Delta x_1 \frac{\Delta t_3}{\Delta t_1}$$

$$\Delta x_2 = x - \Delta x_1 - \Delta x_3$$

$$dt_{21}^2 = \left[ \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \Delta t_1 - 3\Delta t_2 \right] \Delta t_1$$

$$dt_{22}^2 = \left[ \frac{\Delta x_2}{\Delta x_3} \Delta t_3 - 3\Delta t_2 \right] \Delta t_3$$

$$dx_{21}^2 = 9 \left[ \Delta x_1 \Delta x_2 - 3\Delta x_1^2 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \right]$$

$$dx_{22}^2 = 9 \left[ \Delta x_3 \Delta x_2 - 3\Delta x_3^2 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_3} \right]$$

$$dx_{11} = 0$$

$$dx_{12} = 3\Delta x_1$$

$$dt_{11} = dt_{12} = \Delta t_1$$

$$dx_{31} = 3\Delta x_3$$

$$dx_{32} = 0$$

$$dt_{31} = dt_{32} = \Delta t_3$$

TABELA 4.3. Formulação de quatro trechos.

DADOS :  $x_1; x_1; x_1; x_1; t_0; \Delta t$  ( $\Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t$ )

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \frac{3 + \sqrt{9 + 4 r_{x1}}}{r_{x1}}$$

$$r_{x1} = \frac{3\Delta x_2 - \Delta x_3}{\Delta x_1}$$

$$\Delta t_4 = \Delta t_3 \frac{3 + \sqrt{9 + 4 r_{x4}}}{r_{x4}}$$

$$r_{x4} = \frac{3\Delta x_3 - \Delta x_2}{\Delta x_4}$$

$$dx_{11} = 0$$

$$dx_{12} = 3\Delta x_1$$

$$dt_{11} = dt_{12} = \Delta t_1$$

$$dt_{21} = dt_{22} = dt_{31} = dt_{32} = \Delta t$$

$$dx_{21} = 3 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \Delta x_1$$

$$dx_{22} = \frac{3}{4} (\Delta x_3 + \Delta x_2) - \frac{3}{2} \Delta t_2 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$$

$$dx_{31} = 3\Delta x_1 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}$$

$$dx_{32} = 3\Delta x_4 \frac{\Delta t_3}{\Delta t_4}$$

$$dx_{41} = 3\Delta x_4$$

$$dx_{42} = 0$$

$$dt_{41} = dt_{42} = \Delta t_4$$

#### 4.5. APLICAÇÕES DAS TRAJETÓRIAS FORMULADAS.

Esta seção apresenta a seguir alguns exemplos onde a aplicação das formulações desenvolvidas anteriormente é detalhada, para situações com a trajetória desenvolvida para um grau de liberdade, ou então para a situação de um manipulador situado no espaço cartesiano.

## Exemplo 4.1.

Este exemplo ilustra o uso da formulação de uma trajetória de três trechos, onde se considera uma posição inicial da trajetória em -200 e a posição final em -350 unidades. Esta trajetória foi calculada usando um intervalo de tempo entre cada ponto de 1 segundo, totalizando portanto 3 segundos de percurso. O resultado foi obtido usando valores de  $K$  de 3,0 ; 4,0 e 5,0 , de forma a tornar claro o efeito sobre a curva de aceleração, bem como sobre os valores limites de velocidade e de aceleração.

As figuras 4.8 a 4.10 mostram as curvas resultantes, para os três valores adotados para a constante  $K$ . A tabela 4.4 mostra o efeito de  $K$  sobre os valores máximos e mínimos da velocidade e da aceleração .

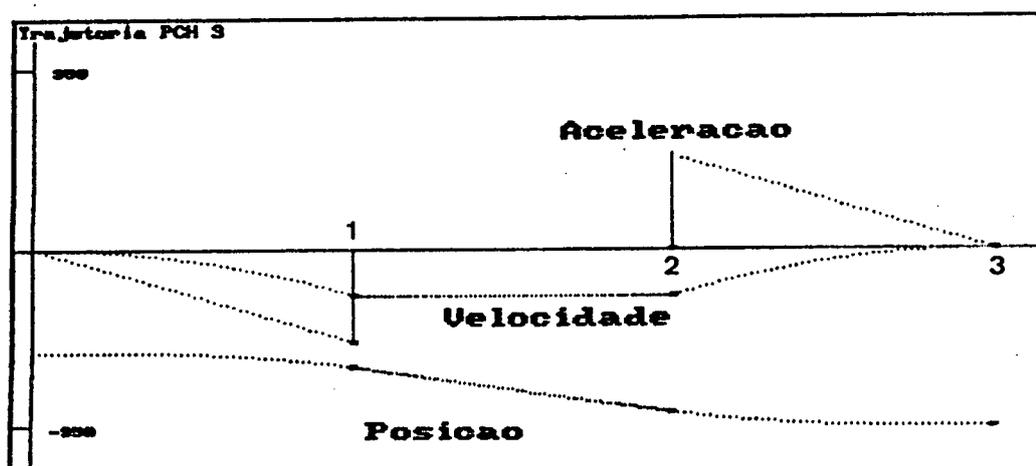


Figura 4.8 - Curvas de posição, velocidade e aceleração para uma trajetória de três trechos, com  $K = 3$ .

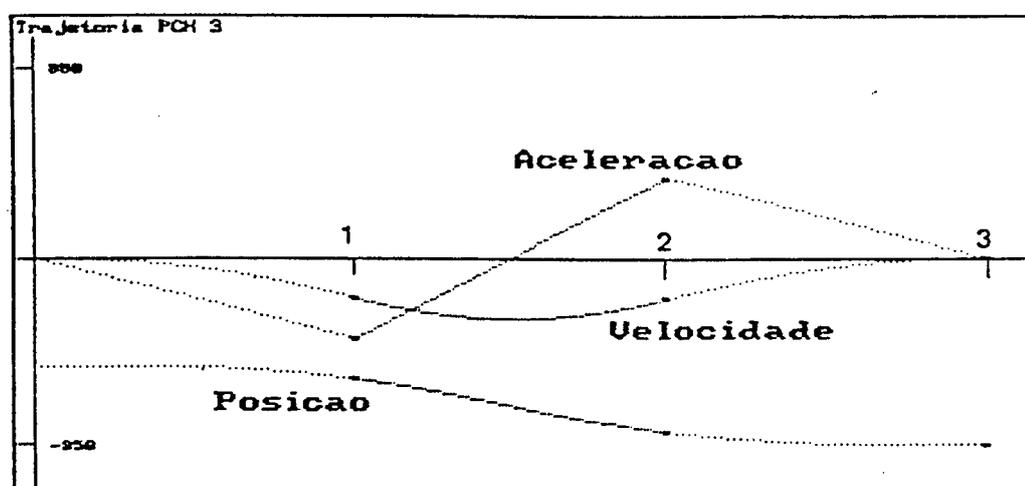


Figura 4.9 - Curvas de posição, velocidade e aceleração para uma trajetória de três trechos, com  $K = 4$ .

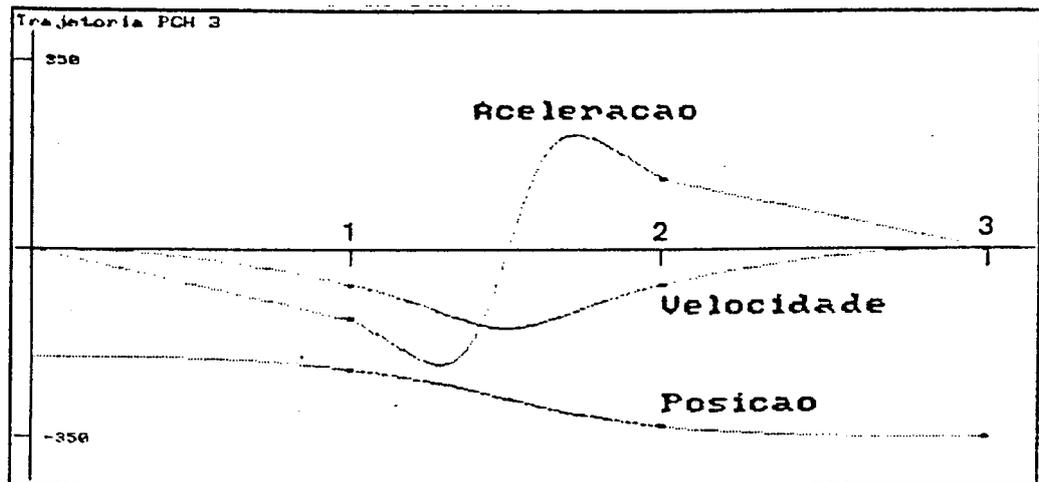


Figura 4.10 - Curvas de posição, velocidade e aceleração para uma trajetória de três trechos, com  $K = 5$ .

TABELA 4.4 Valores máximos de velocidade e aceleração, para as trajetórias das figuras 4.8, 4.9 e 4.10.

K	$v_{\min} [s^{-1}]$	$a_{\max} [s^{-2}]$	$a_{\min} [s^{-2}]$
3	-90	180	-180
4	-112,5	150	-150
5	-145,36	213,27	-213,27

Deve ser observado que a aceleração máxima da trajetória passa por um mínimo para  $K = 4,3$ , com um valor de  $143,32 s^{-2}$ , como é discutido no exemplo 6.1. As trajetórias com maior valor de  $K$  geram menores acelerações iniciais e finais, aumentando os níveis de aceleração no trecho central de movimentação. Este efeito é interessante em situações onde se deseja uma maior precisão de posicionamento nos pontos extremos da trajetória, já que nestes a velocidade é menor quanto maior for  $K$ . A aceleração máxima, conforme mostrado pelas figuras 4.8 a 4.10, fica fortemente afetada pelo valor de  $K$ , permitindo assim uma adequação da trajetória às peculiaridades do manipulador, quanto à capacidade de força ou torque dos atuadores, pela escolha adequada do valor de  $K$ .

Exemplo 4.2.

Este exemplo explora o uso da trajetória de quatro trechos, com os dados conforme a figura 4.11, resultando nas curvas da figura 4.12, onde o ponto final da trajetória corresponde à coordenada 71,84. É de salientar a diferença entre  $\Delta t_1$  de 4,29 s e  $\Delta t_4$ , de 1,69 s, para um  $\Delta t_2$  de 2,00 s.

Trajetoria Genérica ou Particular ? (G/P) PARTICULAR	
Trajetoria de TRES , QUATRO trechos, tipo 4-3-4 ou 3-5-37 (3/4/5/6) 4	
Ponto inicial	-100
Ponto no. dois	-70
Ponto no. tres	-10
Ponto no. quatro	60
Tempo inicial	0
Intervalo de tempo	2
Delta t 1	4.289912639877532
Delta t 2	2
Delta t 3	2
Delta t 4	1.693199956696874
Tempo final	9.983112596573685
Posicao final	71.84088825982355
A TRAJETORIA POSSUI BIFURCAÇÃO ? (S/N)	

Figura 4.11 - Dados para as curvas da figura 4.12.

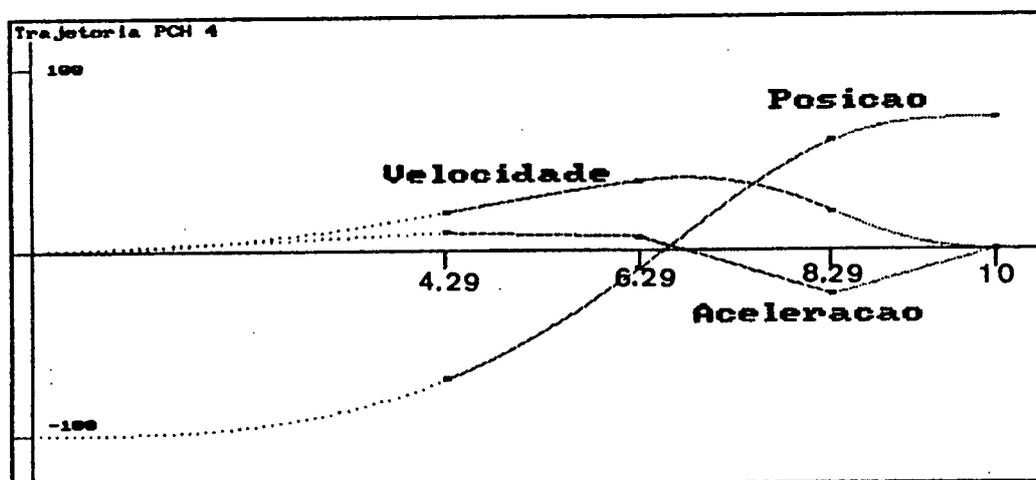


Figura 4.12 - Curvas de posição , velocidade e aceleração .

#### Exemplo 4.3.

Como aplicação da proposta para o planejamento de trajetórias genéricas, é usado o manipulador descrito no Apêndice A3, com um comprimento dos braços de 1100 mm, 1200 mm e 820 mm, respectivamente para  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$ . O ambiente de trabalho do manipulador é o descrito no Apêndice A3.2.

Para o manipulador exemplo, dentro de sua célula de trabalho, deseja-se obter o planejamento de uma trajetória que corresponda a um segmento de reta horizontal, simétrico em relação ao manipulador, onde são especificados sete pontos no espaço cartesiano, conforme a Tabela 4.5 logo abaixo. Estes pontos estão especificados em relação ao sistema de coordenadas do manipulador, conforme discutido em A3.2.

TABELA 4.5. Coordenadas cartesianas dos pontos especificados, [mm].

PONTO	X	Y	Z
1	-1000	1200	1200
2	-900	1200	1200
3	-500	1200	1200
4	0	1200	1200
5	500	1200	1200
6	900	1200	1200
7	1000	1200	1200

Com os pontos especificados, é realizada a cinemática inversa para cada um dos pontos, pelo uso das expressões fornecidas em A3.1, fornecendo assim as coordenadas de junta listadas na Tabela 4.6. Como a trajetória selecionada é simétrica em relação ao eixo  $Y_m$ , as coordenadas  $\theta_2$  e  $\theta_3$  para a segunda e terceira juntas, mostraram-se também simétricas, como é esperado.

TABELA 4.6. Coordenadas de junta dos pontos especificados, [rad].

PONTO	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
1	2,2655	-0,6062	1,3984
2	2,2142	-0,6417	1,4957
3	1,9656	-0,7391	1,7819
4	1,5708	-0,7792	1,9141
5	1,1760	-0,7391	1,7819
6	0,9273	-0,6417	1,4957
7	0,8761	-0,6062	1,3984

O passo seguinte para obter a trajetória é agora a montagem e a solução do sistema de equações (4.45), onde um resultado de interesse são os intervalos de tempo  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_n$ , para cada uma das três coordenadas de junta. O intervalo de tempo entre cada um dos pontos intermediários foi especificado em 0,5 segundos, levando assim a uma duração da trajetória de 2,0 segundos, mais os correspondentes  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_n$ . A junta com maior  $\Delta t$  inicial, no caso a junta 2, deve então iniciar o seu movimento alguns instantes antes que as outras juntas, que têm menores  $\Delta t_1$ .

TABELA 4.7. Intervalos de tempo dos trechos extremos, [segundos].

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
$\Delta t_1$	0.5532	0.6943	0.6692
$\Delta t_n$	0.5532	0.6943	0.6692

A figura 4.13 a seguir mostra o resultado da presente trajetória, para uma posição do observador segundo a direção do vetor  $(0,0,1)_c$ , onde o índice c indica que este vetor tem as suas componentes definidas em relação ao sistema de coordenadas da célula de trabalho. Outras posições do observador geram as imagens da célula de trabalho mostradas na figura 4.14.

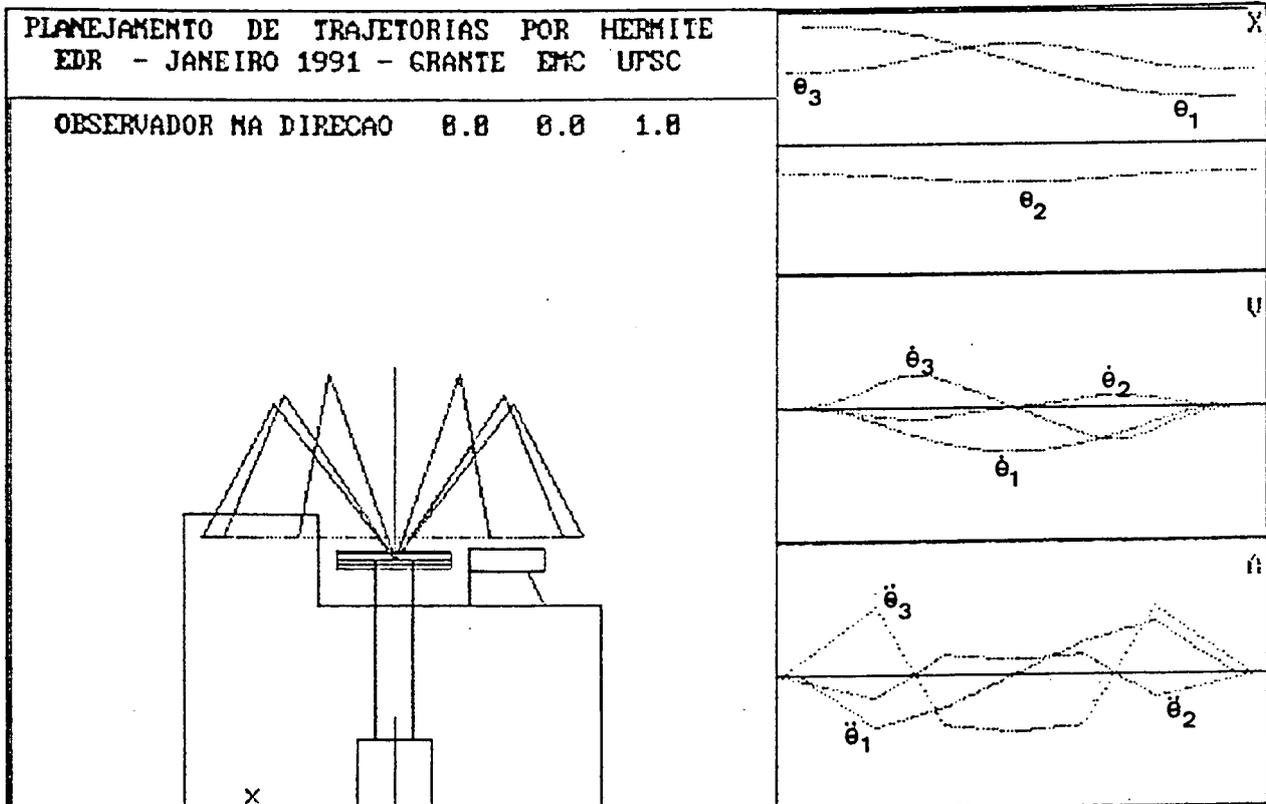


Figura 4.13 - Trajetória retilínea, para o exemplo descrito.

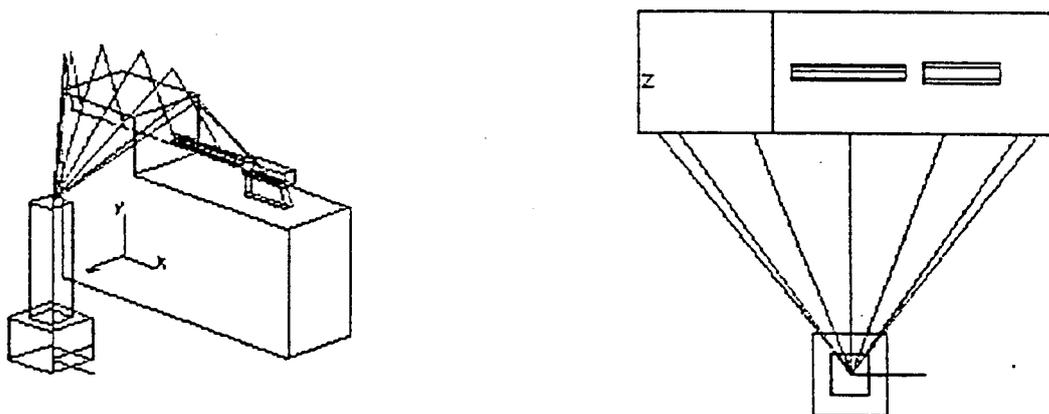


Figura 4.14 - Outras vistas da célula de trabalho, com a trajetória marcada. A primeira vista é para o observador na direção  $(2;1;2)$  e a segunda para o observador na direção  $(0;0;1)$ .

Os valores mostrados de posição, velocidade e aceleração são traçados, assim como para as figuras do tipo anterior, na mesma escala de valores. Pelas limitações da área da janela gráfica, se tem uma informação mais qualitativa, o que em muitas situações não é adequado. Deste modo, o sistema pode fornecer também uma listagem de posição, velocidade e aceleração, de cada junta, em cada instante de tempo, como ilustrado no Apêndice 5, tabela A5.3. Na janela de posição fica evidente que a junta 1 inicia o seu movimento alguns instantes após as juntas 2 e 3, pois  $\Delta t_1$  desta junta é menor, como indica a tabela 4.7.

## CAPÍTULO 5.

### TRAJETÓRIAS ADAPTATIVAS.

Para o problema de planejamento de trajetórias de sistemas robotizados, um aspecto fundamental nos dias de hoje diz respeito à possibilidade de redefinir os objetivos do sistema em tempo real, o que significa que o ponto final da trajetória é móvel, seja na sua posição no espaço cartesiano, seja no instante de tempo em que tal ponto deverá ser atingido. Para tal, é necessário fazer uso de formulações de trajetórias adaptativas, onde tipicamente é possível considerar duas situações básicas em que o objetivo do sistema é variável. Em um primeiro caso ocorre a situação onde o objetivo está perfeitamente definido em coordenadas cartesianas, mas não em coordenadas de junta, devido à necessidade da resolução da cinemática inversa. Assim, em algoritmos iterativos para resolver a cinemática inversa, ocorre a situação onde após um certo número de iterações a solução ainda não convergiu, mas encontra-se já em uma vizinhança da solução exata, a qual será melhor aproximada após mais um certo número de iterações. Neste caso, é perfeitamente viável usar uma solução aproximada para a cinemática inversa e definir assim um objetivo também aproximado, e enquanto a trajetória para este objetivo é calculada e mesmo efetuada, novas iterações de cinemática inversa são executadas e portanto uma melhor aproximação para o objetivo é disponível. Assim torna-se necessário redefinir o objetivo da trajetória por esta nova aproximação, exigindo um planejamento adaptativo da trajetória. Uma trajetória adaptativa também é necessária em situações onde ocorrem mudanças internas no manipulador, do tipo como a configuração, a carga aplicada no efetuador e outros casos.

Outra situação em que a trajetória adaptativa torna-se necessária é no caso de sistemas inteligentes, que dispõem de sensores de posição que permitem, por exemplo, detectar a posição de corpos e objetos que se venham a constituir obstáculos à livre movimentação do manipulador. Neste caso um algoritmo de análise de obstáculos torna-se necessário para redefinir o objetivo da trajetória, de forma a evitar o obstáculo, contornando-o. Assim, quando os sensores detectam os obstáculos já durante a movimentação do manipulador, é essencial a adoção de uma trajetória adaptativa, a qual deve então redefinir o percurso do manipulador, até a posição do novo objetivo.

## 5.1. CONCEITO.

De um modo geral, a figura 5.1 ilustra um dos possíveis casos de trajetória adaptativa, em que uma trajetória original é traçada, porém ocorre uma redefinição no instante  $t_R$ , quando é definido o novo objetivo. A bifurcação da trajetória porém só ocorre no instante  $t_B$ , devido a um tempo de retardo  $t_D$ , que corresponde ao tempo necessário para processar o algoritmo de análise de obstáculos, o qual redefine a trajetória, especificando o novo objetivo, para calcular a cinemática inversa do novo objetivo e com esta, finalmente, recalculando a nova trajetória. Este tempo de retardo corresponde ao tempo de reação do manipulador, não devendo ser maior do que algo da ordem de 0,1 a 0,2 s. por exemplo, que é análogo ao tempo de reação do ser humano, o qual pode ser tomado como referência.

De modo a viabilizar todo o processamento numérico dentro do tempo de reação, ou seja, torná-lo compatível com a aplicação do manipulador, é essencial o uso de formulações explícitas para os três itens de cálculo citados, quais sejam:

- Algoritmo de análise de obstáculos: redefine objetivos do manipulador;
- Cinemática inversa do objetivo, definindo-o em coordenadas de junta;
- Cálculo da nova trajetória, a partir do ponto de bifurcação.

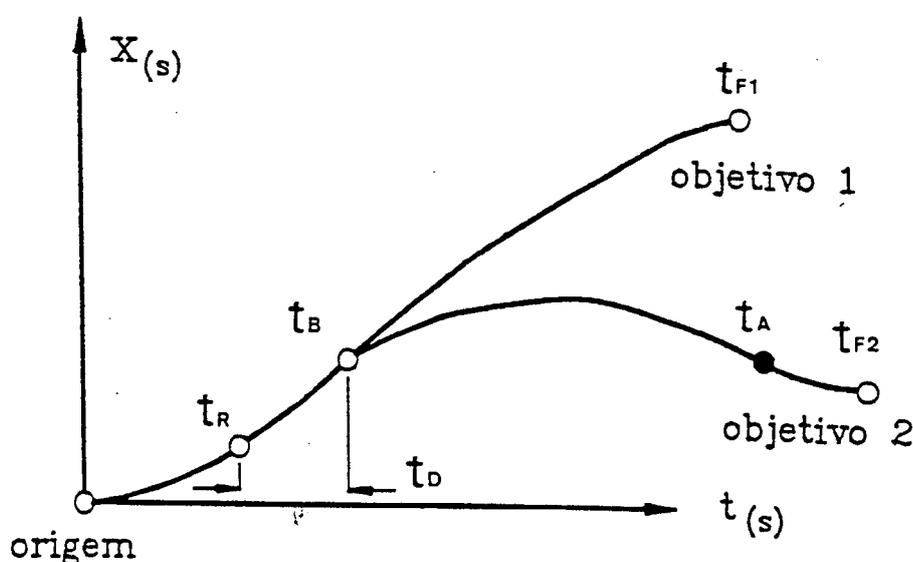


Figura 5.1 - Trajetória adaptativa com definição do tempo de redefinição  $t_R$ , tempo de retardo  $t_D$ , tempo de bifurcação  $t_B$ , tempo de aproximação  $t_A$ , e tempo final,  $t_F$ .

No presente trabalho é dada ênfase ao problema de cálculo da trajetória de forma explícita, usando tanto as formulações discutidas no Capítulo 4, como as aqui discutidas, na secção 5.2. Quanto ao problema da cinemática inversa, este depende da configuração do manipulador e existe na bibliografia especializada uma considerável quantidade de estudos. No caso do manipulador exemplo utilizado neste trabalho, a cinemática inversa explícita está apresentada no Apêndice 3. No caso em que a solução explícita não é possível para o manipulador, a melhor solução é um processo iterativo, onde a solução é refinada a cada iteração, sendo assim empregado um uso recursivo da solução da cinemática, aliando de forma ótima as peculiaridades dos dois enfoques, para a cinemática inversa e para o planejamento de trajetória.

## 5.2. FORMULAÇÃO.

Para viabilizar o desenvolvimento de uma formulação de trajetórias adaptativas, utilizando os PCH, é necessário definir as condições que a trajetória, após o ponto de bifurcação, deve satisfazer. No ponto de bifurcação, quatro variáveis são conhecidas, ou seja,  $x_B$ ;  $t_B$ ;  $\dot{x}_B$ ;  $\ddot{x}_B$ , a partir da trajetória original. No ponto final da trajetória, ou seja, no novo objetivo, são conhecidos também quatro valores,  $x_F$ ;  $t_F$ ;  $\dot{x}_F (= 0)$ ;  $\ddot{x}_F (= 0)$ . Para satisfazer as condições no ponto extremo da trajetória, quando o objetivo é atingido, o uso da formulação definida no Apêndice 2, item A2.1.2, para o último trecho, ou trecho de aproximação, é conveniente, já que satisfaz as condições de  $\dot{x}_F = 0$  e  $\ddot{x}_F = 0$ . Para compatibilizar estas condições no ponto de bifurcação, quanto à posição, tempo, velocidade e aceleração, com as mesmas condições no ponto de início do trecho de aproximação, é usado um trecho de transição, que deve, portanto, satisfazer às condições iniciais da trajetória adaptativa e do trecho de aproximação. Para não limitar de forma excessiva a possibilidade de ajuste da nova trajetória, a função  $t(s)$  será adotada como linear em  $s$ , o que elimina o problema de discussão da existência de  $t(s)$ . Finalmente, um problema adicional que surge é quando a nova trajetória define uma reversão em relação à trajetória original. Neste caso a continuidade de aceleração, que pode ser interpretada como continuidade de força ou de torque do atuador, não necessita ser satisfeita, pois no caso de uma reversão de movimento é lógico que a força (torque) do atuador deve mudar de sentido e assim pode-se abrir mão da continuidade de aceleração.

No ponto inicial da trajetória adaptativa, as condições que devem ser satisfeitas são, portanto, conforme figura 5.2 :

$$v_o = \frac{dx_1}{dt_1} \quad (5.1)$$

$$a_o = \frac{1}{\Delta t_1^2} (6\Delta x_1 - 4dx_1 - 2dx_2) \quad (5.2)$$

Para o ponto final do primeiro trecho, usando as equações do Apêndice 1, tem-se

$$\frac{dx_2}{dt_2} = 3 \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{\Delta t_1^2} (-6\Delta x_1 + 2dx_1 + 4dx_2) = -6 \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2^2} \quad (5.4)$$

Da solução das equações (5.1) a (5.4), chega-se a

$$\Delta x_2 = \frac{1}{6} \frac{2v_o \Delta t_1 + a_o \Delta t_1^2}{\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \left[ 1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right]} \quad (5.5)$$

$$\Delta x_1 = \Delta x - \Delta x_2 \quad (5.6)$$

$$a_o = \frac{1}{\Delta t_1^2} \frac{6\Delta x (1 + \Delta t_1 / \Delta t_2) - 2v_o \Delta t_1 (3 + 2\Delta t_1 / \Delta t_2 + \Delta t_2 / \Delta t_1)}{2 + \Delta t_1 / \Delta t_2 + \Delta t_2 / \Delta t_1} \quad (5.7)$$

onde se considera conhecidos  $v_o$ ;  $\Delta x$ ;  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$ . A figura 5.2 ilustra de forma genérica as variáveis usadas na formulação de uma trajetória adaptativa e a figura 5.3 mostra um exemplo numérico com a trajetória completa, onde ocorre uma bifurcação no instante  $t_B = 2,0s$ , com a redefinição do objetivo, que era de  $x = 100$ , para o novo ponto  $x = -100$ , mantendo o tempo final da trajetória.

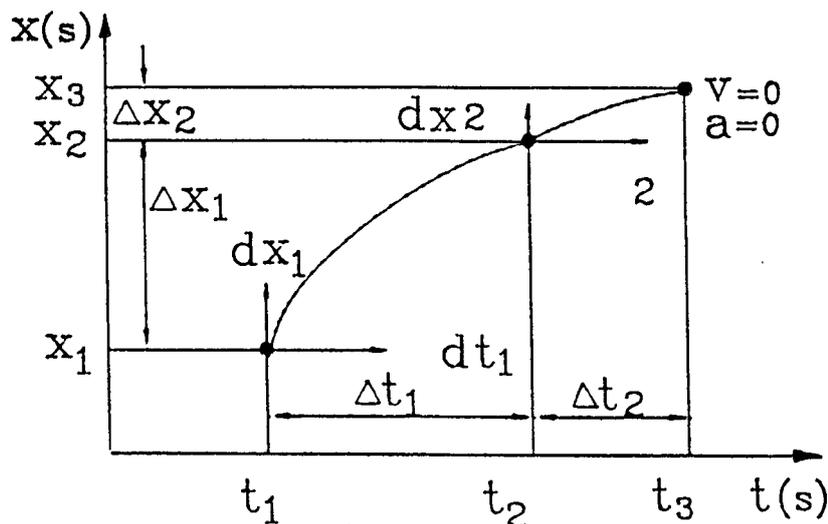


Figura 5.2 - Trajetória de dois trechos para definir o movimento final em uma trajetória adaptativa.

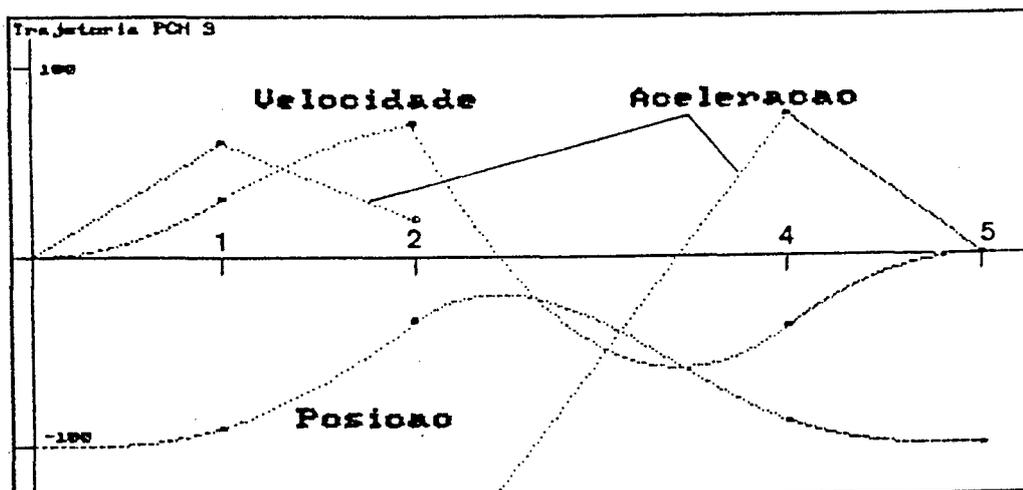


Figura 5.3 - Trajetória com bifurcação em  $t_B = 2s$ , redefinindo o objetivo para  $x_F = -100$ . A trajetória original é a da figura 5.5.

Para a implementação desta formulação é necessário que se tenham os valores de  $t_B$ ,  $x_B$ ;  $\dot{x}_B$  (igual a  $v_0$ ), no ponto de bifurcação, calculando-se  $\Delta x_1$ ;  $\Delta x_2$ ;  $a_0$  de acordo com (5.5); (5.6) e (5.7). A Tabela 5.1 apresenta um resumo das equações que são relevantes.

A figura 5.4 mostra o comportamento da formulação quando o objetivo da trajetória alternativa coincide com o objetivo da trajetória original, evidenciando-se a consistência da formulação, já que a trajetória adaptativa reproduz perfeitamente a trajetória original, mostrada na figura 5.5.

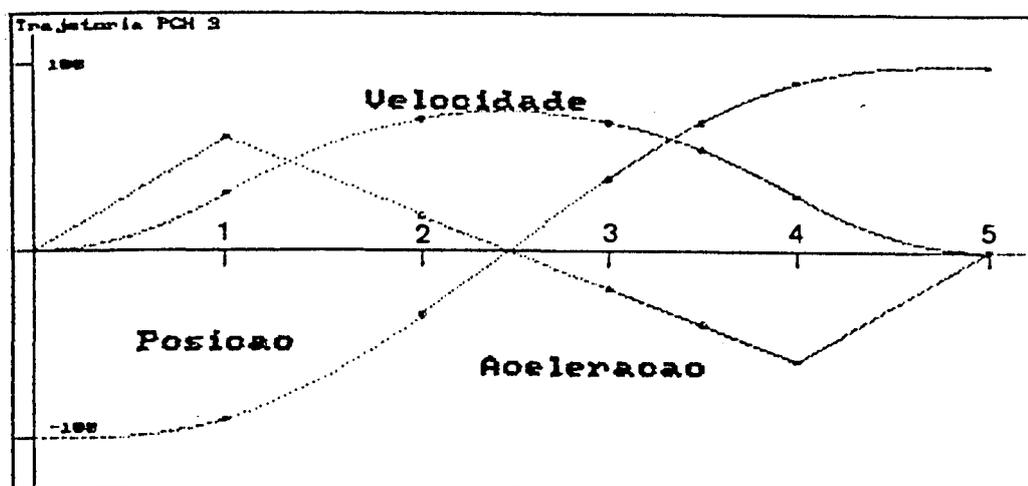


Figura 5.4 - Trajetórias adaptativas com objetivos comuns.

TABELA 5.1 Formulação para trajetória adaptativa.

DADOS :  $t_B ; t_F ; x_B ; \dot{x}_B ; x_F$

$$\Delta x = x_F - x_B$$

$$a_o = \frac{1}{\Delta t_1^2} \frac{6\Delta x (1+\Delta t_1/\Delta t_2) - 2v_o \Delta t_1 (3+2\Delta t_1/\Delta t_2 + \Delta t_2/\Delta t_1)}{2+\Delta t_1/\Delta t_2 + \Delta t_2/\Delta t_1}$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{6} \frac{2v_o \Delta t_1 + a_o \Delta t_1^2}{\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \left[ 1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right]}$$

$$\Delta x_1 = \Delta x - \Delta x_2$$

$$dx_1 = \dot{x}_B \Delta t_1$$

$$dx_2 = 3 \Delta x_2 \Delta t_1 / \Delta t_2$$

$$dt_1 = \Delta t_1$$

$$dt_2 = \Delta t_2$$

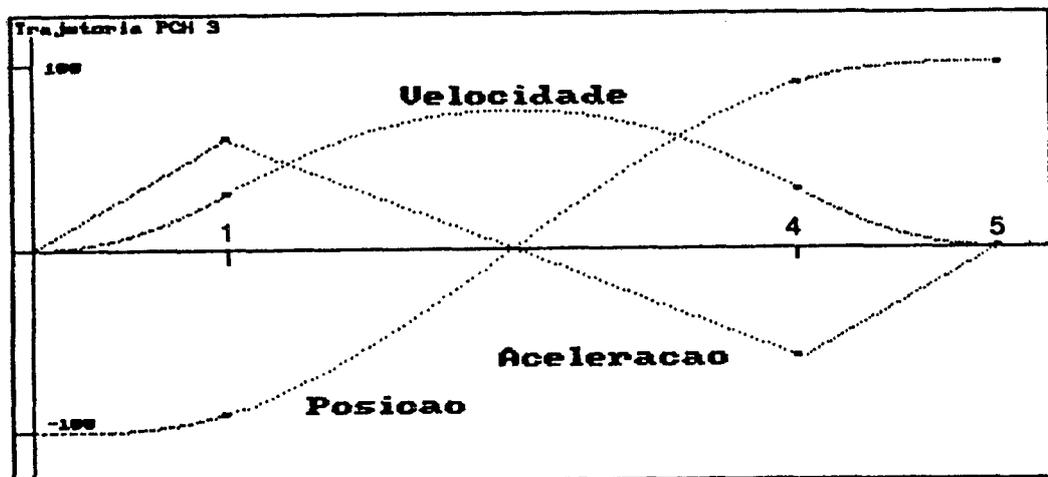


Figura 5.5 - Trajetória de referência para as figuras 5.3 e 5.4.

### 5.3. APLICAÇÕES.

Nesta secção é desenvolvido um exemplo para o uso da formulação de trajetórias adaptativas, onde é utilizada a célula de trabalho definida em A3.2. Este exemplo trata de uma trajetória que é retilínea, paralela ao eixo X do sistema de coordenadas do manipulador, a partir da qual é gerada uma trajetória de desvio, conforme ilustram as figuras 5.6 e 5.7. A figura 5.6 mostra a trajetória original e a figura 5.7 mostra a trajetória com os desvios. A figura 5.8 ilustra a mesma situação da figura 5.7, para uma nova posição do observador. A Tabela 5.2 mostra os pontos da trajetória original, em coordenadas cartesianas, em relação ao sistema de coordenadas do manipulador, enquanto que a Tabela 5.3 fornece os dados que especificam as trajetórias adaptativas geradas.

TABELA 5.2 Coordenadas dos pontos da trajetória original, [mm].

PONTO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	-1200	-1100	-900	-600	-300	0	300	600	900	1100	1200
Y	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Z	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200

TABELA 5.3 Trajetórias adaptativas.

## TRAJETORIA 1

TEMPO DE BIFURCAÇÃO	1,0
TEMPO DE APROXIMAÇÃO	4,0
TEMPO DE CHEGADA	5,0
PONTO FINAL	300, -400, 1200

## TRAJETORIA 2

TEMPO DE BIFURCAÇÃO	2,0
TEMPO DE APROXIMAÇÃO	4,0
TEMPO DE CHEGADA	5,0
PONTO FINAL	1200, 1000, 1200

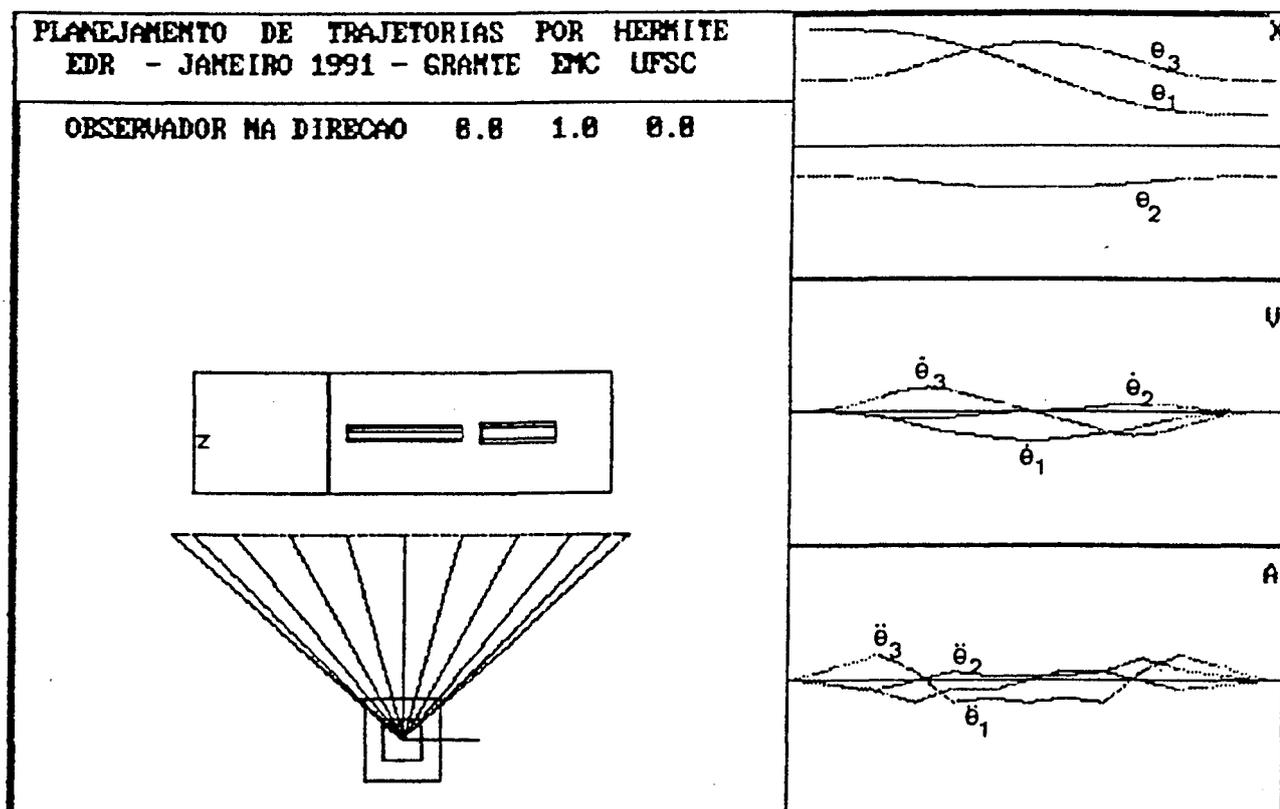


Figura 5.6 - Trajetória retilínea definida por onze pontos.

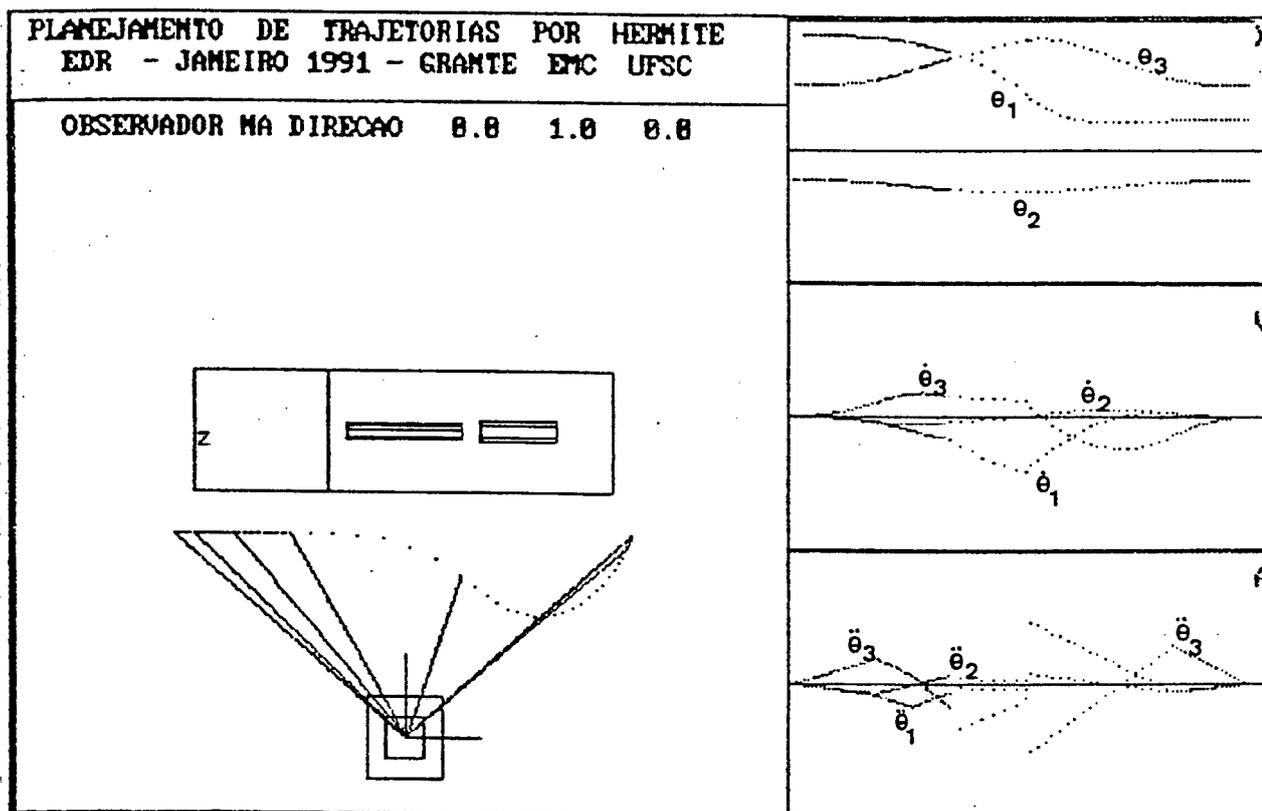


Figura 5.7 - Trajetória adaptativa, sobre a trajetória original da figura 5.6.

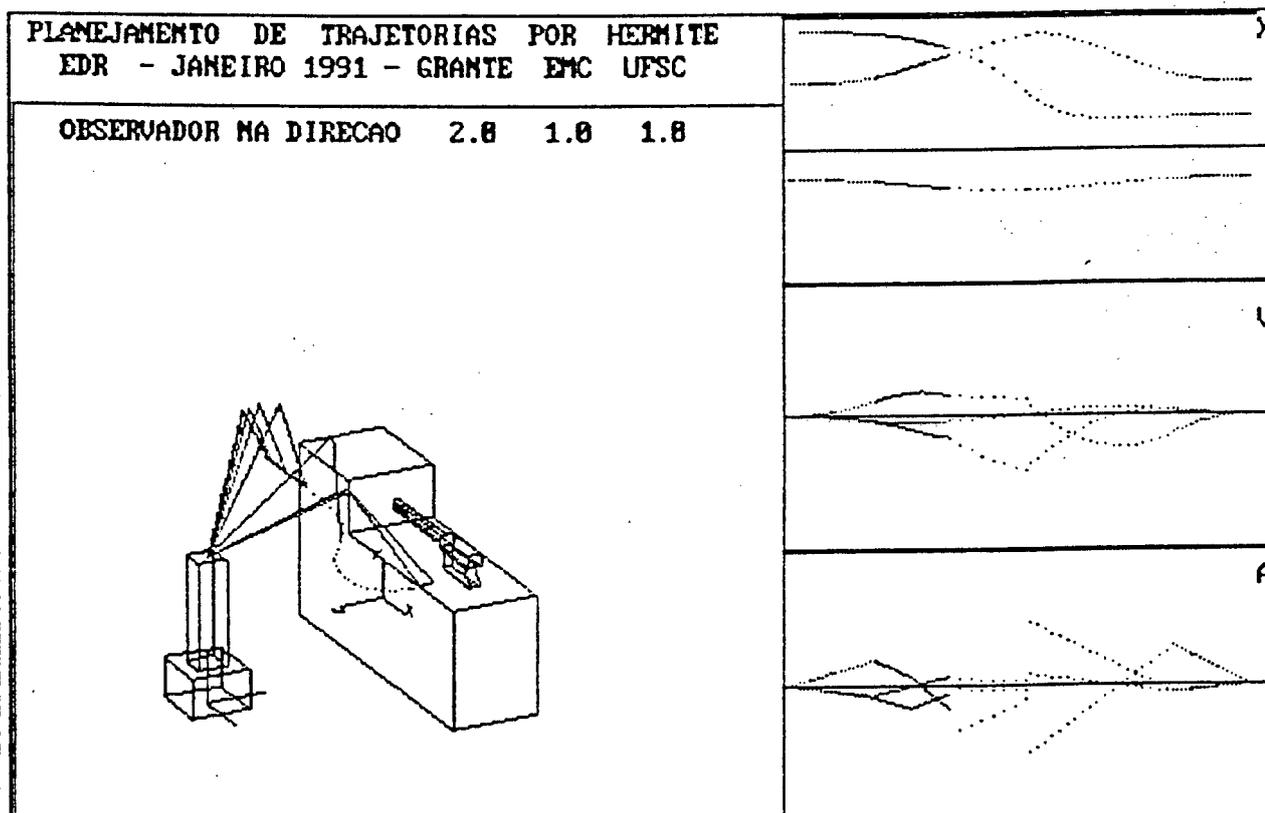


Figura 5.8 - Trajetória da figura 5.7, vista de outra posição .

Para o caso da trajetória original, figura 5.6, definida por onze pontos, se vê que o processo de geração fornece realmente uma trajetória que é retilínea, a menos da resolução gráfica do vídeo. Para a trajetória adaptativa, figura 5.7, o manipulador inicialmente faz uma trajetória de desvio e após uma trajetória de retorno ao objetivo original, ponto (1200,1000,1200), relativo ao sistema de coordenadas do manipulador. Nesta trajetória de retorno ocorre uma significativa descontinuidade de aceleração, nas juntas 1 e 3, podendo isso trazer problemas em uma aplicação prática, como a excitação de modos naturais de vibração do manipulador e conseqüente comprometimento da exatidão do movimento.

## CAPÍTULO 6.

### RESULTADOS COMPARATIVOS.

Este Capítulo tem por objetivo apresentar resultados obtidos com as diversas formulações de trajetórias desenvolvidas com base nos polinômios cúbicos de Hermite e comparar estas com as trajetórias obtidas com uso de formulações existentes na bibliografia, em especial a trajetória do tipo 4-3-4 e a do tipo 3-5-3, [12].

#### Exemplo 6.1.

De forma similar ao exemplo 4.1, aqui é tratada uma trajetória que parte de uma coordenada -200 e atinge o ponto final com uma coordenada de -350, com uma duração do movimento de 3 segundos. Neste exemplo foram geradas trajetórias usando as diferentes formulações, como discutido a seguir.

#### Trajétoria de três trechos.

Esta trajetória é calculada para duas situações, uma como trajetória de movimentação, onde os pontos extremos são especificados, adotando um valor da constante  $K = 4,3$ , que fornece o menor valor de pico para a aceleração. A outra situação é de uma trajetória de precisão, com os pontos medios fornecidos, de  $K = 3,3$ .

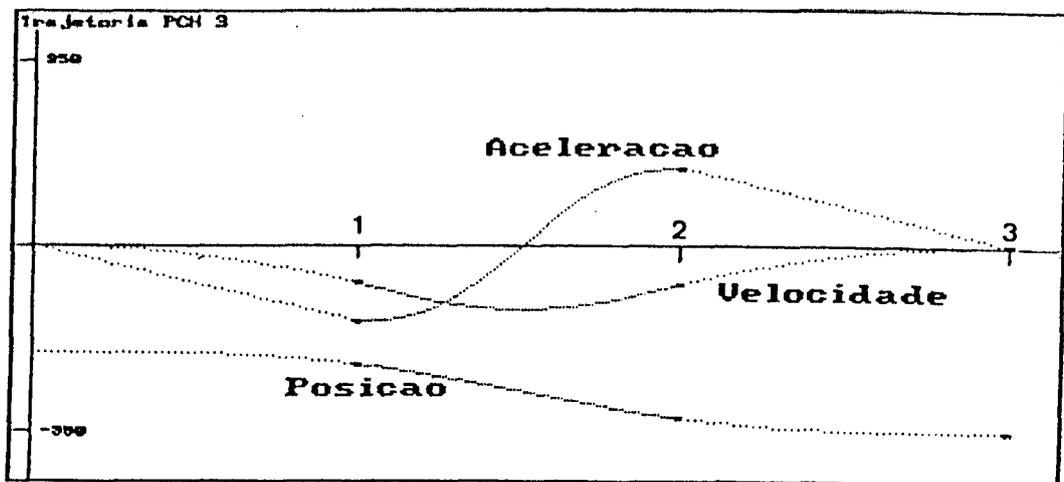


Figura 6.1 - Trajetória PCH - 3 de movimentação,  $K = 4,3$ .

A figura 6.1 mostra a trajetória obtida, quando formulada como trajetória de movimentação. A figura 6.2 mostra a trajetória de precisão, já

que agora as coordenadas dos pontos intermediários foram diretamente especificadas. Neste último caso vale ressaltar a duração relativa dos trechos de afastamento e de aproximação, quando comparados com o trecho central, com  $\Delta t_1 = 1,30$ ,  $\Delta t_2 = 0,40$  e  $\Delta t_3 = 1,30$ .

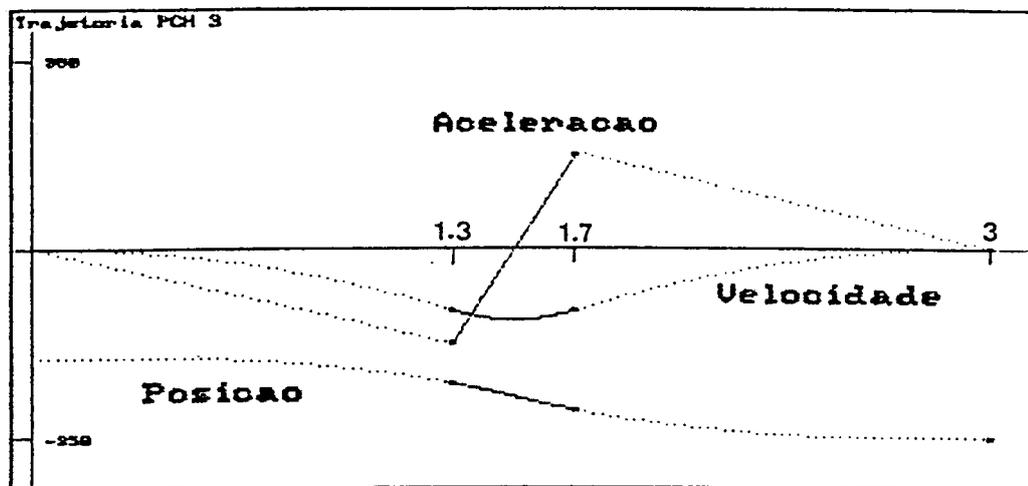


Figura 6.2 - Trajetória PCH - 3 de precisão,  $K = 3,3$ .

Trajétória de quatro trechos.

A trajetória de quatro trechos foi gerada colocando os cinco pontos desta trajetória uniformemente espaçados no intervalo de -200 a -350, afastados no tempo de 0,329 segundos, para os dois pontos centrais. Isto leva a uma trajetória com uma duração total de 3,0015 s. A figura 6.3 mostra as curvas desta trajetória.

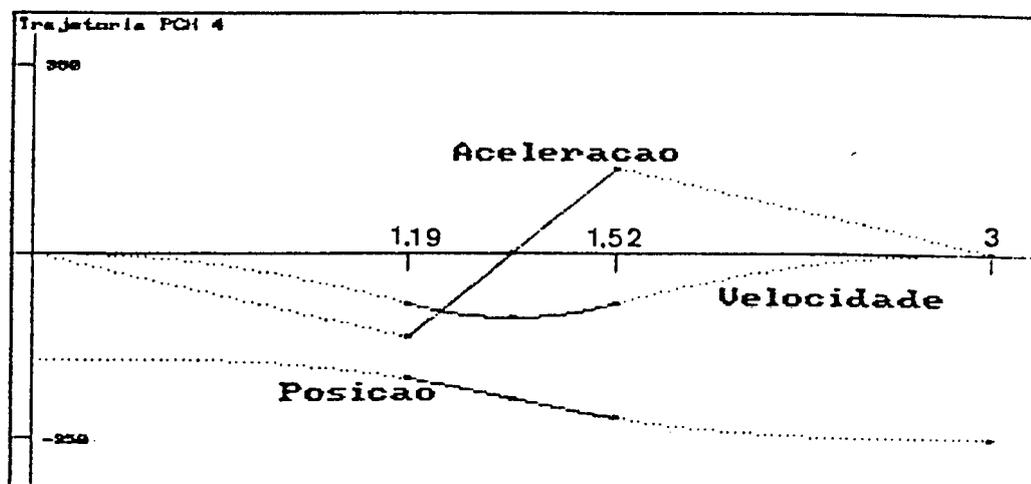


Figura 6.3 - Trajetória PCH de quatro trechos.

Trajétória do tipo 4-3-4.

Para este tipo de trajetória os quatro pontos foram espaçados uniformemente no intervalo de -200 a -350. A duração da trajetória é de 3 segundos. As curvas obtidas estão na figura 6.4.

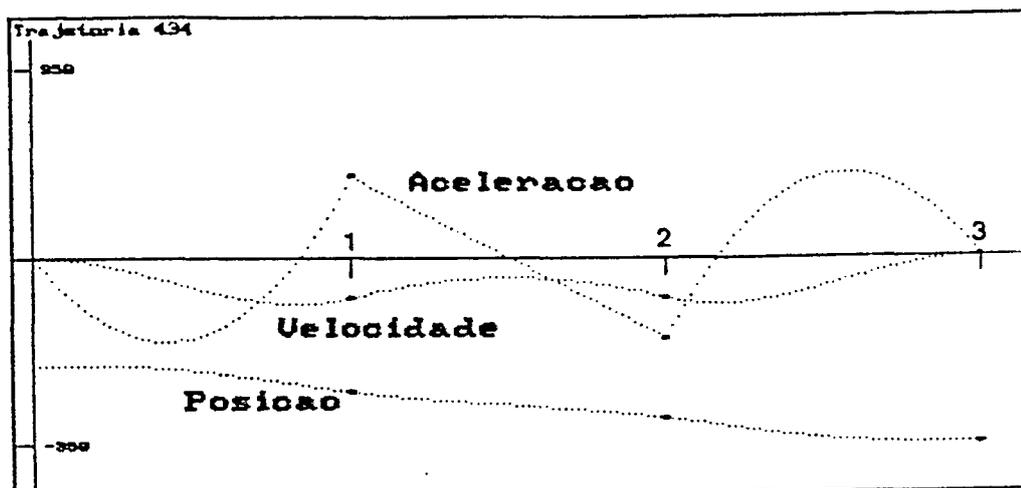


Figura 6.4 - Trajetória do tipo 4-3-4.

Trajetória do tipo 3-5-3.

A trajetória 3-5-3 é calculada exatamente para o mesmo conjunto de dados da trajetória 4-3-4, levando às curvas que estão mostradas na figura 6.5.

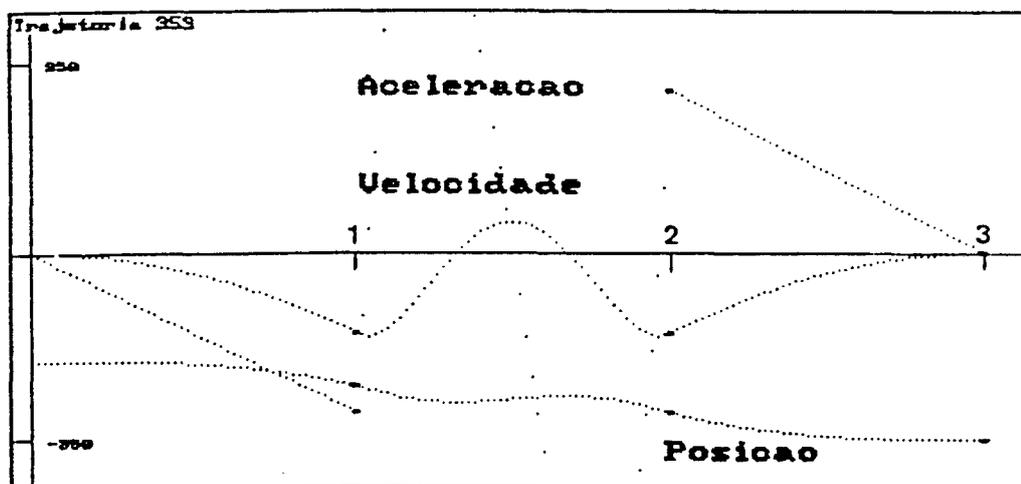


Figura 6.5 - Trajetória do tipo 3-5-3.

Algumas considerações são relevantes, quanto às curvas obtidas, bem como quanto aos valores limites de velocidade e aceleração resultantes e ainda o tempo de processamento para as diferentes formulações, no caso tendo como hardware um microcomputador tipo IBM PC com processador 8086 a 8 MHz e o software sendo processado no modo interpretado e não compilado. Este tempo de processamento considera os cálculos iniciais, de obtenção dos coeficientes e constantes que definem os vários polinômios que, por sua vez, formam a trajetória. Não está considerado no tempo de processamento o tempo de cálculo dos pontos da trajetória, já que estes podem ser calculados simultaneamente com o movimento do manipulador, ou então pré-calculados, quando toda a trajetória é descarregada na memória do sistema de controle do manipulador. A Tabela 6.1 resume os principais dados para cada um dos tipos de trajetória estudados.

TABELA 6.1 Alguns dados característicos das diferentes trajetórias.

TIPO DE TRAJETORIA	VELOCIDADE MINIMA	ACELERACAO MAXIMA	TEMPO PROCESSAMENTO
PCH-3 MOVIMENTACAO	-121,36	143,32	0,21875
PCH-3 PRECISAO	-132,30	176,80	0,32812
PCH-4	-121,37	159,64	0,38280
4-3-4	- 86,79	156,24	0,44569
3-5-3	-154,88	697,63	0,05468

Das curvas mostradas, figuras 6.1 a 6.5, fica flagrante, nas curvas de aceleração, as formulações com polinômios do terceiro grau, onde portanto a aceleração é linear. Para a trajetória de três trechos, com polinômios cúbicos de Hermite, embora o trecho central seja também do terceiro grau, apresenta uma aceleração que não varia linearmente com o tempo, consequência de que a função  $t(s)$  neste caso é não linear, passando a curva de aceleração a ser função da constante  $K$ . Este efeito permite, para uma mesma trajetória, controlar o valor da máxima aceleração, pela escolha adequada do valor de  $K$ . Um ponto importante a salientar é o pico de aceleração que surge na trajetória 3-5-3, que neste caso leva a velocidade a passar por valores positivos inclusive, figura 6.5. Este tipo de comportamento é decorrência direta do uso de um polinômio de quinto grau para o trecho central. Este tipo de comportamento da aceleração leva a problemas em aplicações práticas, sobrecarregando os atuadores, mancais e demais componentes mecânicos, possibilitando ainda a excitação de alguns modos naturais de vibração do manipulador. A trajetória 3-5-3 se destaca por um baixo tempo de processamento inicial dos dados, quase que insignificante, já que as expressões dos polinômios é que fazem todo o cálculo pesado, como mostram as expressões do Apêndice 4.

#### Exemplo 6.2.

A trajetória deste exemplo considera ainda o caso de apenas um grau de liberdade, para permitir a comparação entre os diferentes tipos de formulação. A trajetória tem como ponto inicial a coordenada -100, devendo atingir a posição de coordenada 100 após 4.5 segundos. Estes dados foram usados pelas diferentes formulações, adaptando as coordenadas dos pontos intermediários em -90 e 90, para as trajetórias 4-3-4 e 3-5-3. Para a trajetória de quatro trechos, os pontos intermediários foram -90, 0 e 90, enquanto que para a trajetória genérica, no caso com seis pontos, estes foram -100, -90, -30, 30, 90 e 100. Estes dados forneceram então as trajetórias das figuras que seguem.

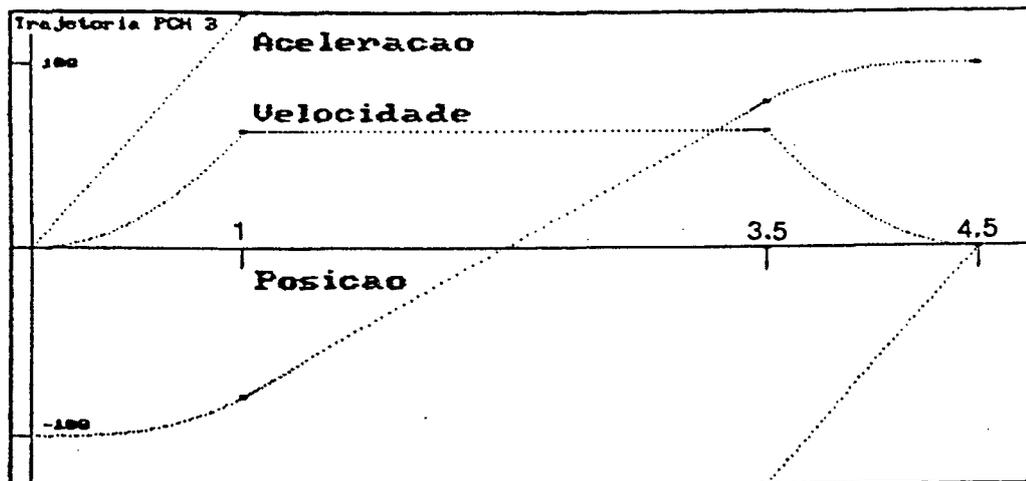


Figura 6.6 - Trajetória de três trechos, de movimentação,  $K = 3$ .

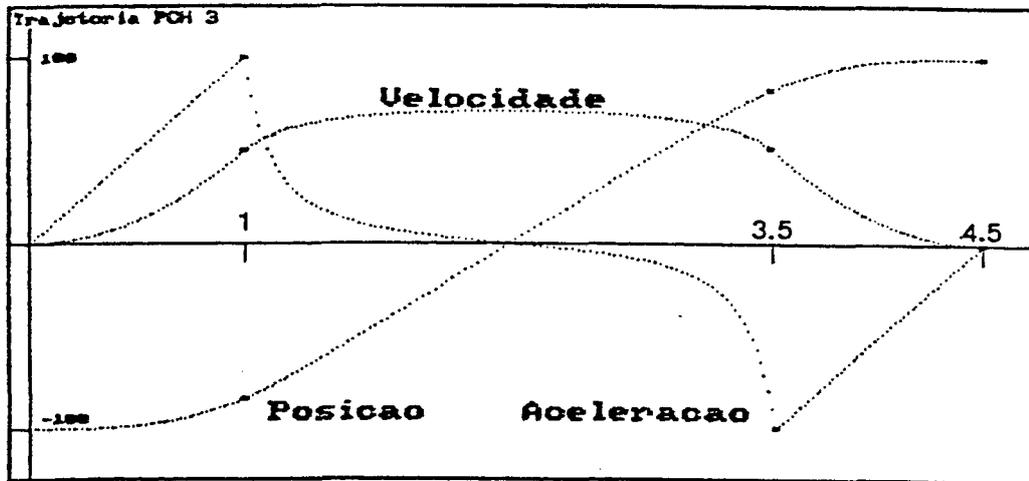


Figura 6.7 - Trajetória de três trechos, de movimentação,  $K = 4$ .

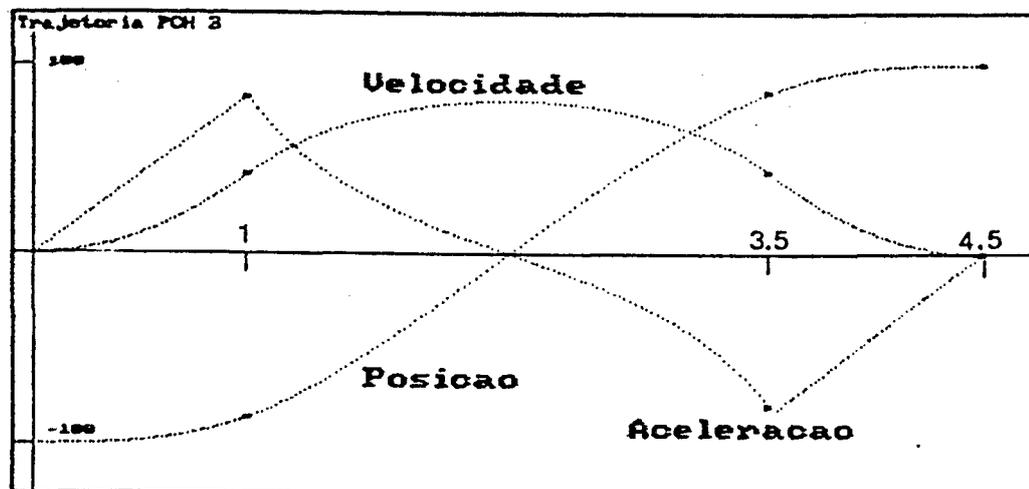


Figura 6.8 - Trajetória de três trechos, de movimentação,  $K = 5$ .

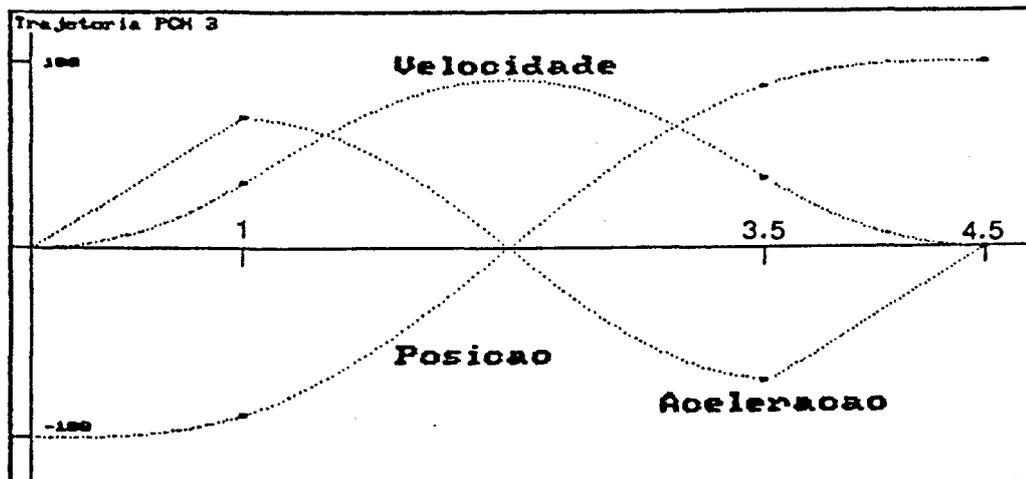


Figura 6.9 - Trajetória de três trechos, de movimentação,  $K = 6$ .

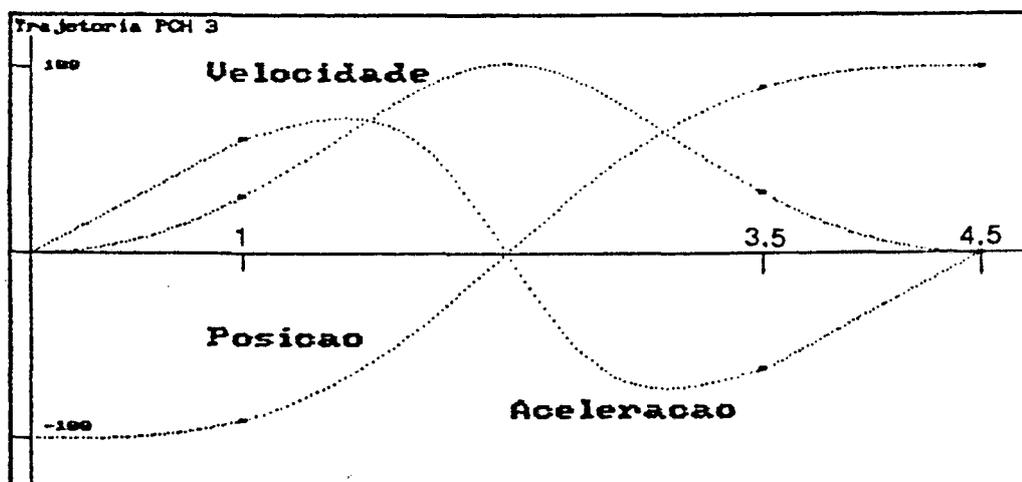


Figura 6.10 - Trajetória de três trechos, de movimentação,  $K = 7$ .

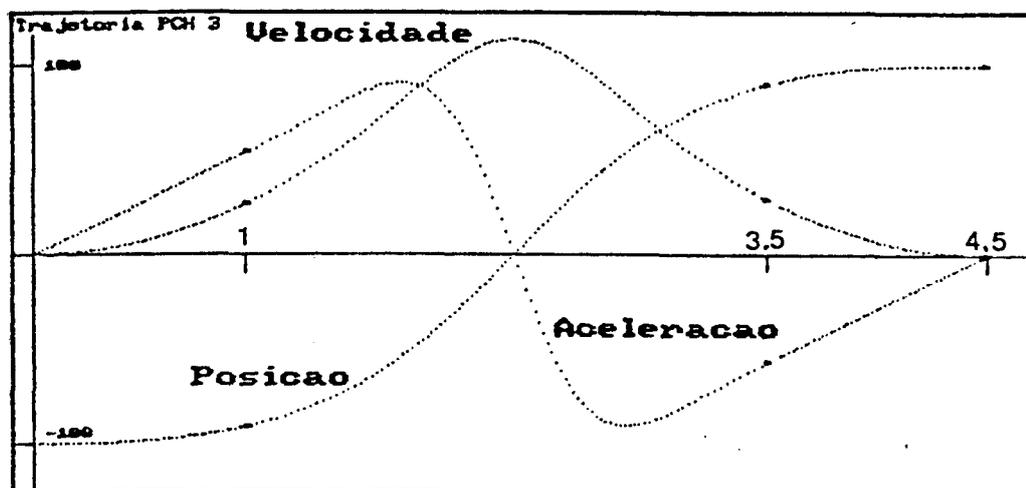


Figura 6.11 - Trajetória de três trechos, de movimentação,  $K = 8$ .

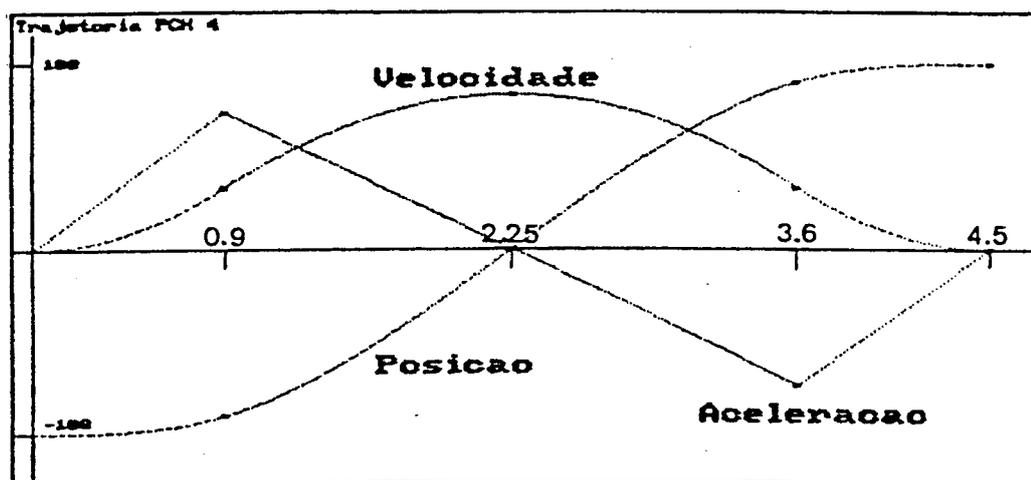


Figura 6.12 - Trajetória PCH de quatro trechos, com cinco pontos.

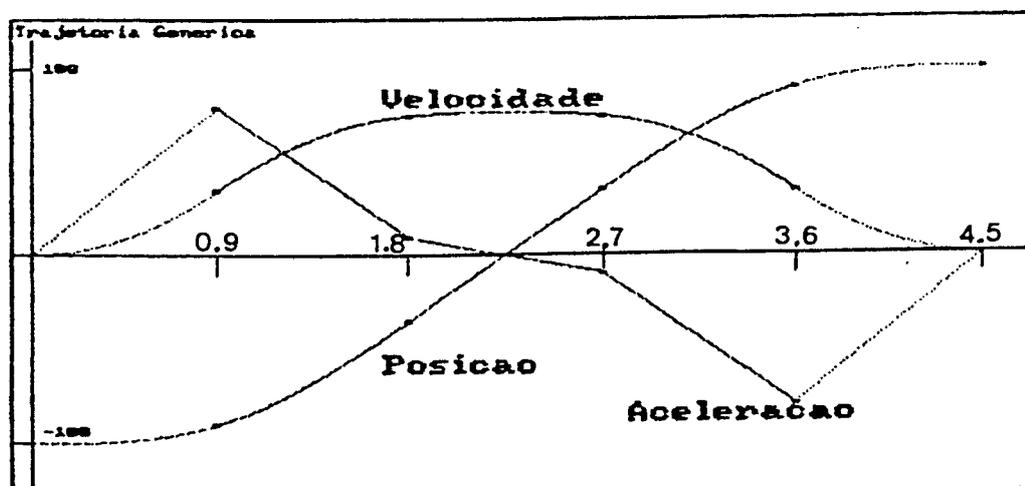


Figura 6.13 - Trajetória PCH genérica, com seis pontos.

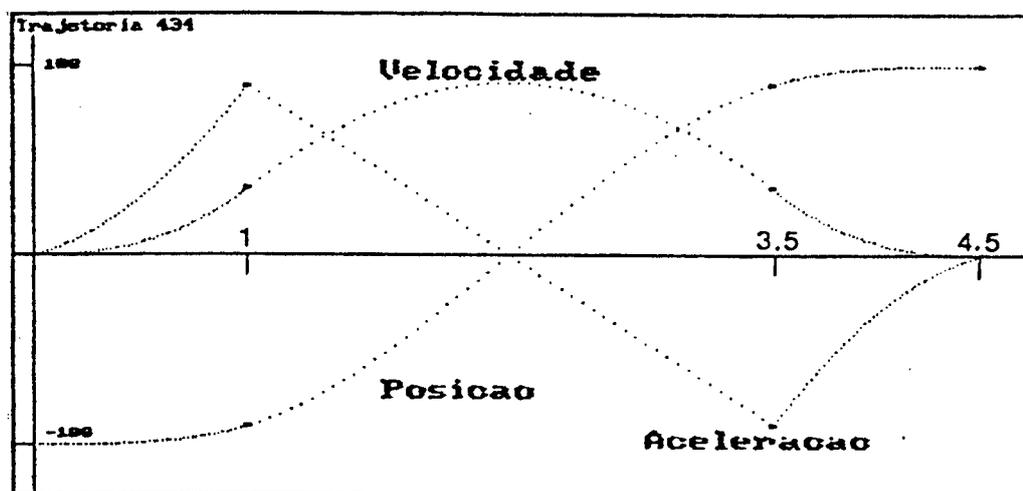


Figura 6.14 - Trajetória do tipo 4-3-4.

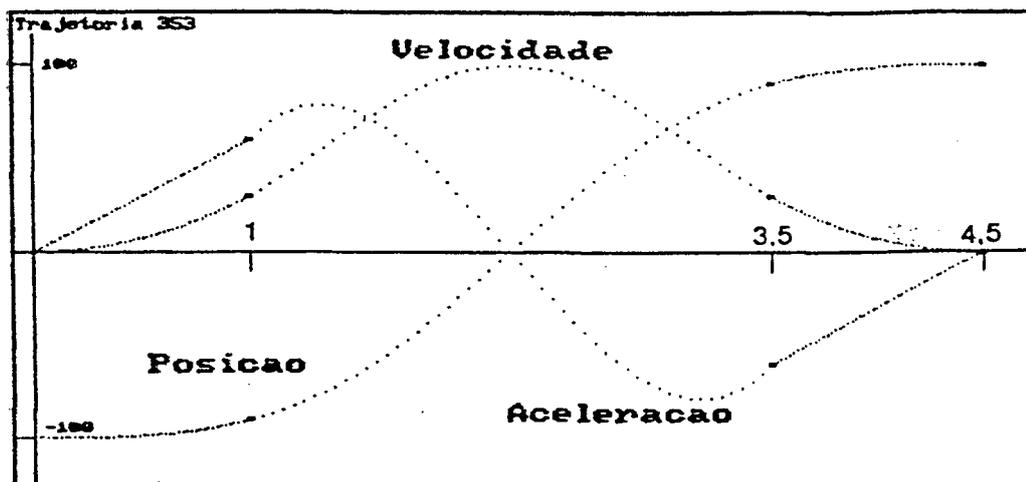


Figura 6.15 - Trajetória do tipo 3-5-3.

TABELA 6.2 Alguns dados característicos das diferentes trajetórias.

TIPO DE TRAJETORIA	VELOCIDADE MÁXIMA	ACELERAÇÃO MÁXIMA	TEMPO PROCESSAMENTO
	[s <sup>-1</sup> ]	[s <sup>-2</sup> ]	[s]
PCH-3 K = 3	63,16	126,32	0,17187
PCH-3 K = 4	71,12	100,00	0,26953
PCH-3 K = 5	80,68	82,76	0,21875
PCH-3 K = 6	90,89	70,59	0,21875
PCH-3 K = 7	101,70	72,94	0,28125
PCH-3 K = 8	113,26	90,48	0,27344
PCH-4	83,33	74,07	0,27734
GENÉRICA	76,97	78,78	0,60156
4-3-4	90,57	89,14	0,17187
3-5-3	99,37	78,57	0,05468

Dos dados colocados pela Tabela 6.2, pode-se ver alguns aspectos interessantes, como por exemplo o fato de que a trajetória 3-5-3 teve agora um bom comportamento, com uma curva de aceleração similar à da curva da trajetória PCH com  $K = 7$ , figuras 6.10 e 6.15. Das trajetórias PCH de três trechos, a que apresenta menor tempo de processamento é a que tem  $K = 3$ , para a qual o trecho intermediário é percorrido com aceleração zero, gerando assim um tipo de trajetória que pode ser considerada como "ramp-coast-ramp", segundo [6]. Deve ser observado que com  $K = 3$  a trajetória passa a ter na realidade uma descontinuidade de aceleração, o que não ocorre com  $K > 3$ .

A trajetória genérica, no caso definida por seis pontos, é a que apresenta maior tempo de processamento, pois deve resolver o sistema de equações não lineares de forma iterativa, ficando este tempo da ordem de duas e meia

vezes maior do que o tempo médio das outras formulações. Caso a trajetória tivesse um maior número de pontos, o tempo de processamento aumentaria, decorrendo de um sistema com maior número de equações.

Neste exemplo a trajetória do tipo 3-5-3 teve mais uma vez um pequeno tempo de processamento inicial, decorrendo da estratégia da formulação, onde as expressões dos polinômios executam todo o cálculo, como pode ser depreendido das equações mostradas no Apêndice 4. Assim, para verificar o tempo de processamento da trajetória propriamente dita, foi obtido o tempo de cálculo da trajetória, para a formulação PCH - 3, com  $K = 6$ , e para a formulação 3-5-3, com os dados do presente exemplo. A trajetória PCH - 3 consumiu 24,7734 segundos, para o cálculo de 400 pontos da trajetória (100 pontos para os trechos extremos e 200 pontos para o trecho central), enquanto que a trajetória 3-5-3 necessitou de 36,4887 segundos. Se for descontado o tempo de plotagem, o tempo de cálculo puro passa a ser de 13,7890 e de 25,4922, com uma diferença de 11,7032 segundos. Assim fica flagrante a vantagem da trajetória programada por Hermite, com um tempo de processamento que é a metade do tempo da trajetória 3-5-3. Estes tempos devem ser tratados de uma forma relativa, pois foram obtidos para o software rodando no modo interpretado, como comentado no exemplo 6.1.

Para este exemplo vale o mesmo comentário feito no exemplo 4.1, no que diz respeito à forma de como  $K$  afeta o comportamento da trajetória, em especial as curvas de aceleração. Isto tem efeito direto sobre o comportamento nos trechos extremos, bem como sobre os picos de aceleração que ocorrem no trecho de movimentação.

## CAPÍTULO 7.

### CONCLUSÕES.

Conforme discutido ao longo do trabalho, o uso de trajetórias baseadas em polinômios cúbicos de Hermite permite que sejam desenvolvidas formulações de trajetórias de movimentação, de precisão, bem como trajetórias adaptativas. Um ponto forte da presente formulação diz respeito à uma solução explícita para os parâmetros e coeficientes que definem a trajetória, permitindo assim um processamento da trajetória em tempo real, aspecto de fundamental importância em sistemas de controle para desvio de obstáculos, para correção de posição do ponto objetivo e inúmeras outras situações.

Em todas as formulações apresentadas a trajetória é descrita em coordenadas de junta, permitindo que as informações geradas sejam diretamente acessadas pelo sistema de controle, que por sua vez faz o acionamento das juntas, através dos atuadores. Esta forma de desenvolver a trajetória dispensa o cálculo da cinemática inversa para cada ponto calculado, o que seria necessário caso a trajetória fosse planejada em coordenadas cartesianas.

Das comparações realizadas se verifica que o comportamento das curvas de aceleração mostra-se muito mais suave nas trajetórias baseadas nos polinômios cúbicos de Hermite do que nas trajetórias do tipo 4-3-4 ou do tipo 3-5-3, devido ao maior grau de alguns trechos, nestes dois tipos de trajetória. Este efeito é flagrante para a trajetória do tipo 3-5-3, no exemplo 6.1.

Quanto ao tempo de processamento de cada uma das trajetórias, pode-se dizer que as trajetórias por Hermite, de três e quatro trechos, tem o seu tempo menor do que uma trajetória do tipo 4-3-4, Tabela 6.1, embora a trajetória do tipo 3-5-3 pareça ter um comportamento mais favorável. Isto no entanto é decorrência de que todo o cálculo é realizado diretamente pelas expressões dos polinômios, tendo assim uma nítida desvantagem, como comentado no exemplo 6.2. Quanto à trajetória por Hermite para um número qualquer de pontos, tem um tempo de processamento substancialmente superior, como é de se esperar, pela necessidade de solução do sistema de equações.

A formulação das trajetórias adaptativas mostrou que possui versatilidade para atingir o novo ponto objetivo, partindo da posição correspondente ao ponto de bifurcação. Esta trajetória permite assim interessantes aplicações, como o uso em paralelo com algoritmos iterativos da cinemática inversa, processando em tempo real. Outra aplicação é o uso junto a estratégias de análise de obstáculos e de busca de caminho, entre várias outras possibilidades.

Das trajetórias formuladas com base nos polinômios cúbicos de Hermite, a trajetória de quatro trechos mostrou-se com uma formulação pouco robusta, pois, dependendo das coordenadas particulares dos pontos fornecidos, existe a possibilidade de que ocorra uma singularidade, zerando a variável  $r_{x1}$  ou  $r_{x4}$ , equações (4.33) e (4.37), o que leva a intervalos de tempo infinitos para o trecho de afastamento, (4.32) ou para o trecho de aproximação, (4.36), respectivamente.

Quanto à continuidade da presente linha de trabalho, um primeiro ponto sugerido é o de formular uma trajetória adaptativa com mais do que dois trechos, na tentativa de reduzir o salto de aceleração que ocorre em algumas situações.

Um critério adicional que pode ser usado na comparação entre as diferentes formulações, para uma dada especificação de trajetória, é quanto a terceira derivada em relação ao tempo, ou "jerk", que corresponde fisicamente a uma medida da taxa de aplicação de carga. Esta medida pode então ser interpretada como a "suavidade" do movimento. Deste modo, uma extensão que imediatamente ocorre é de uma formulação onde se busca, além de uma continuidade  $C^0$ ,  $C^1$  e  $C^2$ , também uma continuidade  $C^3$ , ou que a descontinuidade eventual em  $C^3$  seja limitada a valores estabelecidos.

Um outro ponto de desenvolvimento é o de um sistema de simulação de uma célula de trabalho, com elementos geométricos previamente definidos, onde o usuário define a disposição destes dentro do espaço da célula. Neste ambiente é simulado um manipulador onde os seus graus de liberdade são programados com o uso de trajetórias como as aqui descritas. Adicionalmente pode ser desenvolvida, ou adaptada, uma linguagem textual de programação do manipulador e de descrição do meio ambiente.

Outro aspecto de interesse é quanto às consequências que um tipo de trajetória como o discutido tem sobre o comportamento e desempenho do sistema de controle, no que diz respeito a sua dinâmica e nos erros que se podem desenvolver. Estes aspectos são relevantes, em especial se for considerado que o manipulador é um sistema eletro-mecânico não linear, com parâmetros variáveis, função da configuração, e ainda com elementos flexíveis.

Finalmente, um ponto ainda de interesse é, por exemplo, a inclusão dos aspectos dinâmicos do manipulador, bem como, ainda, o efeito da flexibilidade dos seus vários elementos construtivos, fazendo com que a trajetória considere de uma forma explícita estes efeitos.

## REFERÊNCIAS:

- [1] - ARATO Junior, A., Aplicação de Computador Digital no Projeto de Robôs. Tese de Doutorado. COPPE, 1988.
- [2] - ASADA, H., Slotine, J.-J. E., Robot Analysis and Control, John Wiley & Sons, 1986.
- [3] - BACK, N., Introdução ao Projeto de Robôs. Notas de Aula, UFSC, 1988.
- [4] - BENHABIB, B., Zak, G., Tabarah, E., Position Control of Two-Arm Manipulator for Coordinated Point-to-Point Motion. Journal of Robotic Systems, 5(2), 103-124, 1988.
- [5] - BERGER, M., Computer Graphics with Pascal, Benjamin Cummings, 1986.
- [6] - BRADY, M., Ed., Robot Motion, Planning and Control. MIT Press, 1984.
- [7] - CARNAHAN, B., Luther, H. A., Wilkes, J. O., Applied Numerical Methods. John Wiley 1969.
- [8] - CHASEN, S.H., Geometric Principles and Procedures for Computer Graphic Applications. Prentice Hall, 1978.
- [9] - CHUNG, T. J., Finite Element Analysis in Fluid Dynamic. MacGraw Hill, 1977.
- [10] - CRAIG, J. J., Introduction to Robotics. Mechanics and Control. Addison-Wesley, 1986.
- [11] - FOLEY, J. D., Van Dam, A., Fundamentals of Interactive Computer Graphics. Addison Wesley, 1982.
- [12] - FU, K. S., Gonzalez, R. C., Lee, C. S. G., Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence. McGraw Hill, 1987.
- [13] - GILOI, W. K., Interactive Computer Graphics. Prentice Hall, 1978.
- [14] - GOLDENBERG, A. A., Lawrence, D. L., A Generalized Solution to the Inverse Kinematics of Robotic Manipulators. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, March 1985, (107), 103-106.
- [15] - HARRINGTON, S., Computer Graphics, A Programming Approach, McGraw Hill, 1987.
- [16] - HEER, E., Robots and Manipulators. Mechanical Engineering, Nov. 1981, 42-49.

- [17] - KAZEROUNIAN, K., On the Numerical Inverse Kinematics of Robotic Manipulators, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, March 1987, 8-13.
- [18] - KOREM, Y., Robotics for Engineers, McGraw Hill, 1985.
- [19] - LIN, C.S., Chang, P.R., Joint Trajectories of Mechanical Manipulators for Cartesian Path Approximation, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 6(13), 1094-1102, 1983.
- [20] - LUH, J. Y. S., Lin, C. S., Approximate Joint Trajectories for Control of Industrial Robots Along Cartesian Path, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 3(14), 444-450, 1984.
- [21] - Máquinas e Metalls, Julho 1986, pp 8-17.
- [22] - MATOS, L. M. C., Geração de Planos em Robótica. Publicação UNL-DI7/85, Universidade Nova de Lisboa, 1985.
- [23] - MAYORGA, R. V., Wong, A. K. C., Ma, K. S., An Efficient Local Approach for the Path Generation of Robot Manipulators, Journal of Robotic Systems, 1(7), 23-56, 1989.
- [24] - MAYORGA, R. V., Wong, A. K. C., A Global Approach for the Optimal Path Generation of Redundant Robot Manipulators, Journal of Robotic Systems, 1(7), 107-128, 1990.
- [25] - MEIROVITCH, L, Elements of Vibration Analysis, McGraw Hill, 1975.
- [26] - MURASKI, S., Working with Systems Integrators. Machine Design, September 22, 1988, 107-110.
- [27] - NEWMAN, W. M., Sproull, R. F., Principles of Interactive Computer Graphics. McGraw Hill, 1979.
- [28] - PAUL, R. P., Manipulator Cartesian Path Control, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 9(1979), 702-711.
- [29] - PAUL, R.P., Robot Manipulators. Mathematics, Programming and Control. MIT Press, 1981.
- [30] - PINTO, F.A.N.C., Belivacqua, L., Método Geométrico Iterativo para Solução da Cinemática Inversa de Manipuladores Mecânicos. X COBEM, Rio de Janeiro, 1989. Vol. 2, pp 447-449.
- [31] - POBLET, J. M., Ed., Sistemas CAD/CAM/CAE, Marcombo, 1986.
- [32] - RAMOS, J. J. G., Geração de Trajetórias Contínuas para Robos. Dissertação de Mestrado, UNICAMP 1986.
- [33] - ROGERS, D. F., Adams, J. A., Mathematical Elements for Computer Graphics. McGraw Hill, 1990.

- [34] - ROSA, E. da, Erthal, J. L., Back, N., Planejamento de Trajetórias de Manipuladores usando Polinômios Cúbicos de Hermite. X COBEM, Rio de Janeiro, 1989, Vol. 2, pp 463-466.
- [35] - ROSA, E. da, Planejamento de Trajetórias de Manipuladores Através de Polinômios Cúbicos de Hermite. Relatório de pesquisa, UFSC, 1990.
- [36] - ROSA, E. da, Manipuladores com Trajetória Adaptativa. 4<sup>a</sup> FENASOFT, São Paulo, 1990.
- [37] - SERAJI, H., Lee, T., Delpech, M., Experimental Study on Direct Adaptive Control of a PUMA 560 Industrial Robot, Journal of Robotic Systems, 1(7), 81-106, 1990.
- [38] - SUSNJARA, K. J., Robots for Small Manufacturers, Machine Design, May 1988, 40-44.
- [39] - TAYLOR, R. H., Planning and Execution of Straight Line Manipulator Trajectories. IBM Journal of Research and Development, 23(1979), 424-436.
- [40] - VANDERGRAFT, J. S., Introduction to Numerical Computations, Academic Press, 1983.
- [41] - VUKOBRATOVIC, M., Kircanski, M., Scientific Fundamentals of Robotics. Vol. 1, 3, 6. Springer Verlag, 1986.
- [42] - WHITNEY, D. E., The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators. ASME Journal of Dynamics Systems, Measurements and Control, (1972), 303-309.

## APÊNDICE 1.

### A1. FORMULAÇÃO DE TRAJETÓRIAS.

#### A1.1. UMA MANEIRA DE OBTER UM POLINÔMIO CÚBICO DE HERMITE.

Seja um polinômio de terceiro grau em  $s$ , na forma :

$$f(s) = a s^3 + b s^2 + c s + d \quad (\text{A1.1})$$

e sua primeira derivada,  $f'(s)$  :

$$f'(s) = 3 a s^2 + 2 b s + c \quad (\text{A1.2})$$

Deseja-se obter uma nova função polinomial, de terceiro grau, tal que

$$x(s) = f_1(s) x_1 + f_2(s) x_2 + f_3(s) x'_1 + f_4(s) x'_2 \quad (\text{A1.3})$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são os valores da função para  $s = 0$  e  $s = 1$ , respectivamente e  $x'_1$  e  $x'_2$  são suas correspondentes derivadas em relação a  $s$ . Assim, vem que  $x(s)$  deve satisfazer às condições :

$$\begin{aligned} \text{Para } s = 0, \quad x(s) &= x_1 \\ x'(s) &= x'_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } s = 1, \quad x(s) &= x_2 \\ x'(s) &= x'_2 \end{aligned}$$

Sendo  $f_1(s)$  na forma de um polinômio em  $s$ , para que ocorra  $x(0) = x_1$  é necessário que:

$$f_1(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 1$$

$$f_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 0$$

$$f_3(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_3 = 0$$

$$f_4(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_4 = 0$$

para  $x(1) = x_2$ , é necessário que:

$$f_1(1) = 0 \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 + 1 = 0$$

$$f_2(1) = 1 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 + 0 = 1$$

$$f_3(1) = 0 \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 + 0 = 0$$

$$f_4(1) = 0 \Rightarrow a_4 + b_4 + c_4 + 0 = 0$$

para  $x'(0) = x'_1$ , é necessário que:

$$f'_1(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$f'_2(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$f'_3(0) = 1 \Rightarrow c_3 = 1$$

$$f'_4(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

para  $x'(1) = x'_2$ , é necessário que:

$$f'_1(1) = 0 \Rightarrow 3a_1 + 2b_1 = 0$$

$$f'_2(1) = 0 \Rightarrow 3a_2 + 2b_2 = 0$$

$$f'_3(1) = 0 \Rightarrow 3a_3 + 2b_3 + 1 = 0$$

$$f'_4(1) = 1 \Rightarrow 3a_4 + 2b_4 = 1$$

Resolvendo quanto aos valores ainda não calculados, vem :

$$f_1(s) = 3s^3 - 3s^2 + 1$$

$$f_2(s) = -2s^3 + 3s^2 \quad (\text{A1.4})$$

$$f_3(s) = s^3 - 2s^2 + s$$

$$f_4(s) = s^3 - s^2$$

e portanto  $x(s)$  será dado por:

$$x(s) = (3s^3 - 3s^2 + 1)x_1 + (-2s^3 + 3s^2)x_2 + (s^3 - 2s^2 + s)x_1' + (s^3 - s^2)x_2' \quad (A1.5)$$

ou ainda,

$$x(s) = x_1 + (-2s^3 + 3s^2)\Delta x + (s^3 - 2s^2 + s)x_1' + (s^3 - s^2)x_2' \quad (A1.6)$$

onde

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (A1.7)$$

## A1.2. FORMULAÇÃO DE TRAJETÓRIAS USANDO OS POLINÔMIOS CÚBICOS DE HERMITE .

O objetivo da presente secção é detalhar a formulação de uma trajetória que usa os polinômios cúbicos de Hermite, PCH, em uma representação paramétrica, de modo a facilitar o desenvolvimento das várias trajetórias descritas ao longo do trabalho.

Conforme citado na secção 3.2, a idéia é a de descrever a trajetória usando um PCH para cada coordenada, representada parametricamente, e outro PCH para o tempo, também representado parametricamente, conforme as equações (A1.8) e (A1.9).

$$x(s) = x_1 + \Delta x (-2s^3 + 3s^2) + dx_1 (s^3 - 2s^2 + s) + dx_2 (s^3 - s^2) \quad (A1.8)$$

$$t(s) = t_1 + \Delta t (-2s^3 + 3s^2) + dt_1 (s^3 - 2s^2 + s) + dt_2 (s^3 - s^2) \quad (A1.9)$$

Estas expressões gerais são usadas incondicionalmente em todas as formulações de trajetórias que são desenvolvidas neste trabalho, o que demonstra a grande potencialidade e versatilidade da formulação de trajetórias através do uso dos PCH. Para a formulação da trajetória em trechos é fundamental o conceito de continuidade de posição, tempo, velocidade e aceleração entre cada dois trechos consecutivos. A continuidade de posição e de tempo é imediatamente obtida fazendo com que a posição final de um trecho ( $x_2$ ), seja igual à posição inicial do trecho seguinte ( $x_1$ ) e de igual forma quanto ao tempo. Já para a continuidade de velocidade e de aceleração a questão não é tão trivial, já que é necessário calcular a primeira e a segunda derivada de  $x$  em relação a  $t$ , onde ambas as funções estão definidas de forma paramétrica. Neste caso, vem :

$$\dot{x} = \frac{x_{,s}}{t_{,s}} \quad (\text{A1.10})$$

$$\ddot{x} = \frac{t_{,s} x_{,ss} - t_{,ss} x_{,s}}{t_{,s}^3} \quad (\text{A1.11})$$

e assim é necessário calcular  $x_{,s}$ ;  $x_{,ss}$ ;  $t_{,s}$  e  $t_{,ss}$  para se obter a velocidade e a aceleração. As equações abaixo indicam a primeira e segunda derivadas das funções (A1.8) e (A1.9).

$$\begin{aligned} x_{,s} &= \Delta x (-6s^2 + 6s) + dx_1 (3s^2 - 4s + 1) + dx_2 (3s^2 - 2s) \\ x_{,ss} &= \Delta x (-12s + 6) + dx_1 (6s - 4) + dx_2 (6s - 2) \end{aligned} \quad (\text{A1.12})$$

$$\begin{aligned} t_{,s} &= \Delta t (-6s^2 + 6s) + dt_1 (3s^2 - 4s + 1) + dt_2 (3s^2 - 2s) \\ t_{,ss} &= \Delta t (-12s + 6) + dt_1 (6s - 4) + dt_2 (6s - 2) \end{aligned} \quad (\text{A1.13})$$

Particularizando para o caso em que  $s = 0$  e para  $s = 1$ , que são os pontos de início e fim da trajetória, de interesse fundamental para assegurar a continuidade da velocidade e da aceleração, vem, para  $s = 0$ ,

$$\begin{aligned} x_{,s}(0) &= dx_1 \\ x_{,ss}(0) &= 6\Delta x - 4dx_1 - 2dx_2 \end{aligned} \quad (\text{A1.14})$$

$$\begin{aligned} t_{,s}(0) &= dt_1 \\ t_{,ss}(0) &= 6\Delta t - 4dt_1 - 2dt_2 \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

De modo semelhante para  $s = 1$ , vem

$$\begin{aligned} x_{,s}(1) &= dx_2 \\ x_{,ss}(1) &= -6\Delta x + 2dx_1 + 4dx_2 \end{aligned} \quad (\text{A1.16})$$

$$\begin{aligned} t_{,s}(1) &= dt_2 \\ t_{,ss}(1) &= -6\Delta t + 2dt_1 + 4dt_2 \end{aligned} \quad (\text{A1.17})$$

Tem-se assim que a velocidade nos pontos extremos da trajetória é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= \frac{dx_1}{dt_1} \\ \dot{x}(1) &= \frac{dx_2}{dt_2} \end{aligned} \quad (\text{A1.18})$$

e quanto à aceleração, após alguma simplificação :

$$\ddot{x}(0) = \frac{dt_1 (6\Delta x - 2dx_2) - dx_1 (6\Delta t - 2dt_2)}{dt_1^3} \quad (A1.19)$$

$$\ddot{x}(1) = \frac{dt_2 (-6\Delta x + 2dx_1) - dx_2 (-6\Delta t + 2dt_1)}{dt_2^3}$$

Uma simplificação que pode ser feita diz respeito a uma particularização de (A1.9), onde se adota

$$dt_1 = dt_2 = \Delta t \quad (A1.20)$$

o que simplifica a formulação da trajetória, bem como facilita a especificação dos pontos que definem esta trajetória, já que estão uniformemente espaçados no tempo. Nestas circunstâncias, vem:

$$t(s) = t_1 + s\Delta t \quad (A1.21)$$

e assim a função  $t(s)$  passa a ser linear. Neste caso as expressões da aceleração reduzem-se a

$$\ddot{x}(0) = \frac{6\Delta x - 4dx_1 - 2dx_2}{\Delta t^2} \quad (A1.22)$$

$$\ddot{x}(1) = \frac{-6\Delta x + 2dx_1 + 4dx_2}{\Delta t^2} \quad (A1.23)$$

e as de velocidade a

$$\dot{x}(0) = \frac{dx_1}{\Delta t} \quad (A1.24)$$

$$\dot{x}(1) = \frac{dx_2}{\Delta t} \quad (A1.25)$$

Resumindo, para o trecho de afastamento,

$$dx_{11} = 0$$

$$dx_{12} = 3\Delta x_1$$

$$\dot{x}(1) = 3 \frac{\Delta x_1}{\Delta T_1} \quad \ddot{x}(1) = 6 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2}$$

Os índices adotados para dx indicam, em primeiro lugar, o trecho em análise, e, em segundo lugar, se primeiro ou segundo ponto do trecho.

Para o trecho de aproximação,

$$dx_{n,2} = 0$$

$$dx_{n,1} = 3\Delta x_n$$

$$\dot{x}(0) = 3 \frac{\Delta x_n}{\Delta T_n} \quad \ddot{x}(0) = -6 \frac{\Delta x_n}{\Delta t_n^2}$$

## APÊNDICE 2.

### A2. DESENVOLVIMENTO DETALHADO DA FORMULAÇÃO DE TRAJETÓRIAS.

Neste Apêndice a formulação geral mostrada no Apêndice 1, é detalhada e particularizada para cada um dos tipos de trajetórias abordadas neste trabalho, procurando resolver a trajetória quanto aos valores de  $dx$  e  $dt$ , considerando que são especificados normalmente  $\Delta x$  ou  $\Delta t$ , isto para cada trecho que irá formar a trajetória completa.

#### A2.1. Trajetória de três trechos.

Conforme comentado na secção 4.1, a trajetória de três trechos é formada por um primeiro trecho, de afastamento do ponto de partida, de um trecho central de movimentação e de um trecho final de aproximação ao ponto terminal, onde nos trechos extremos a função  $t(s)$  é utilizada na sua forma linear. As condições que a trajetória deve satisfazer nos pontos extremos são :

no ponto inicial

$$\dot{x} = 0 \quad (A2.1)$$

$$\ddot{x} = 0 \quad (A2.2)$$

no ponto final

$$\dot{x} = 0 \quad (A2.3)$$

$$\ddot{x} = 0 \quad (A2.4)$$

##### A2.1.1 Trecho de afastamento.

Usando (A2.1), para o primeiro trecho, e considerando que a velocidade inicial é zero, vem

$$\frac{dx_{11}}{dt_{11}} = 0$$

e portanto

$$dx_{11} = 0 \quad (A2.5)$$

Quanto à (A2.2), de acordo com (A1.22), sendo a aceleração inicial nula tem-se

$$\frac{6\Delta x_{11} - 2dx_{12}}{dt_{11}^2} = 0$$

e portanto resulta :

$$dx_{12} = 3\Delta x_1 \quad (A2.6)$$

Considerando agora a situação onde  $\dot{x}(0) = v_I$ , velocidade inicial do movimento diferente de zero, e  $\ddot{x}(0) = 0$ ,

$$\dot{x}(0) = \frac{dx_{11}}{\Delta t_1}$$

e portanto

$$dx_{11} = v_I \cdot \Delta t_1$$

$$\ddot{x}(0) = \frac{6\Delta x_1 - 4dx_{11} - 2dx_{12}}{\Delta t_1^2}$$

$$2dx_{12} = 6\Delta x_1 - \ddot{x}(0)\Delta t_1^2 - 4dx_{11}$$

$$dx_{12} = 3\Delta x_1 - 2 v_I \Delta t_1$$

Os valores no fim do intervalo de afastamento passam a ser

$$\dot{x}(1) = \frac{3\Delta x_1}{\Delta t_1} - 2 v_I$$

$$\ddot{x}(1) = \frac{-6\Delta x_1 + 2v_I \Delta t_1 + 4(3\Delta x_1 - 2v_I \Delta t_1)}{\Delta t_1^2}$$

$$\ddot{x}(1) = \frac{6\Delta x_1 - 6v_I \Delta t_1}{\Delta t_1^2}$$

#### A2.1.2 Trecho de aproximação.

Quanto ao último trecho, de modo similar ao feito para o trecho de afastamento, vem :

$$dx_{32} = 0 \quad (A2.7)$$

e para a aceleração, de acordo com (A1.16), vem :

$$\frac{-6\Delta x_3 + 2dx_{31}}{dt_{32}^2} = 0$$

e portanto :

$$dx_{31} = 3\Delta x_3 \quad (A2.8)$$

ficando assim perfeitamente definidos os dois trechos extremos, já que (A1.13) se aplica.

Para a condição agora em que  $\dot{x}(1) = v_F$ , velocidade final da trajetória, e  $\ddot{x}(1) = 0$ ,

$$\dot{x}(1) = \frac{dx_{n2}}{\Delta t_n}$$

e assim vem :

$$dx_{n2} = v_F \cdot \Delta t_n$$

$$\ddot{x}(1) = \frac{-6\Delta x_n + 2dx_{n1} + 4dx_{n2}}{\Delta t_n^2}$$

$$2dx_{n1} = \ddot{x}(1) \Delta t_n^2 + 6\Delta x_n - 4dx_{n2}$$

$$dx_{n1} = 3\Delta x_n - 2v_F \Delta t_n$$

Os valores no início do intervalo de aproximação são :

$$\dot{x}(0) = \frac{3\Delta x_n}{\Delta t_n^2} - 2v_F$$

$$\ddot{x}(0) = \frac{6\Delta x_n - 4(3\Delta x_n - 2v_F \Delta t_n) - 2v_F \Delta t_n}{\Delta t_n^2}$$

$$\ddot{x}(0) = \frac{6v_F \Delta t_n - 6\Delta x_n}{\Delta t_n^2}$$

### A2.1.3 Trecho de movimentação.

Quanto ao trecho central de movimentação, este fica definido pelas condições de continuidade de velocidade e de aceleração nos pontos de transição. Esta continuidade no ponto final do primeiro trecho leva a:

velocidade final do primeiro trecho

$$\dot{x} = \frac{dx_{12}}{dt_{12}} = 3 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$$

velocidade inicial do segundo trecho

$$\dot{x} = \frac{dx_{21}}{dt_{21}}$$

e a condição de continuidade de velocidade leva à :

$$3 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{dx_{21}}{dt_{21}} \quad (\text{A2.9})$$

onde  $\Delta x_1$  e  $\Delta t_1$  se referem ao primeiro trecho e  $dx_{21}$  e  $dt_{21}$  são parâmetros da representação de  $x(t)$  para o segundo trecho, no primeiro ponto deste, fig. A2.1.

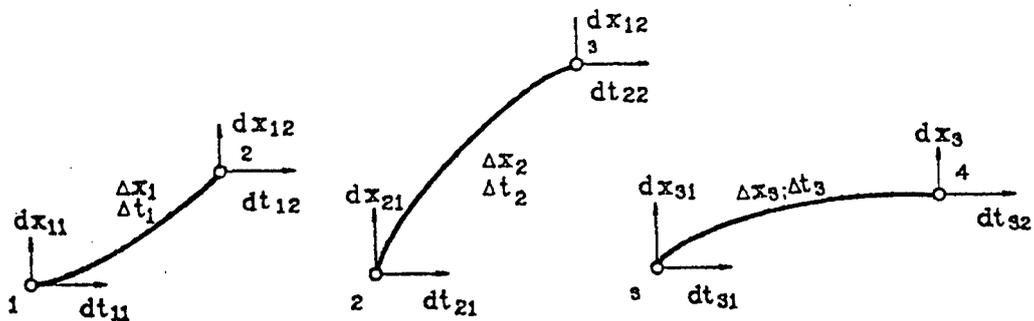


Figura A2.1 - Trajetória de três trechos.

Quanto à continuidade de aceleração, para o trecho inicial vem :

$$\ddot{x} = 6 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2}$$

e para o trecho de movimentação, no primeiro ponto,

$$\ddot{x} = \frac{dt_{21} (6\Delta x_2 - 2dx_{22}) - dx_{21} (6\Delta t_2 - 2dt_{22})}{dt_{21}^3}$$

onde  $\Delta x_2$  e  $\Delta t_2$  referem-se ao segundo trecho e  $dx_{22}$ ;  $dt_{22}$  referem-se ao segundo ponto do segundo trecho. A continuidade de aceleração exige portanto que :

$$6 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} = \frac{dt_{21} (6\Delta x_2 - 2dx_{22}) - dx_{21} (6\Delta t_2 - 2dt_{22})}{dt_{21}^3} \quad (\text{A2.10})$$

Raciocinando de forma análoga para o outro ponto de transição, as condições de continuidade levam às equações

$$\frac{dx_{22}}{dt_{22}} = 3 \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \quad (\text{A2.11})$$

$$\frac{dt_{22}(-6\Delta x_2 + 2dx_{21}) - dx_{22}(-6\Delta t_2 + 2dt_{21})}{dt_{22}^3} = -6 \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3^2} \quad (\text{A2.12})$$

As equações (A2.9) a (A2.12) formam um sistema de equações em  $dx_{21}$ ;  $dx_{22}$ ;  $dt_{21}$ ;  $dt_{22}$ . Usando (A2.9) e (A2.11) para isolar  $dx_{21}$  e  $dx_{22}$  e substituindo em (A2.10) e (A2.12), vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6dt_{21}^2 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} = 6\Delta x_2 - 6\frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} dt_{22} - 3\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} (6\Delta t_2 - 2dt_{22}) \\ 6dt_{21}^2 \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3^2} = 6\Delta x_2 - 6\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} dt_{21} - 3\frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} (6\Delta t_2 - 2dt_{21}) \end{array} \right. \quad (\text{A2.13})$$

Reagrupando os termos das equações do sistema (A2.13), chega-se ao sistema (A2.14)

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_{21}^2 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} + dt_{22} \left( \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} - \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \right) - \Delta x_2 + 3 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Delta t_2 = 0 \\ dt_{22}^2 \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3^2} + dt_{21} \left( \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} - \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \right) - \Delta x_2 + 3 \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \Delta t_2 = 0 \end{array} \right.$$

ou então, na forma :

$$\left\{ \begin{array}{l} C dt_{21}^2 + B dt_{22} + A = 0 \\ F dt_{22}^2 + E dt_{21} + D = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A2.14})$$

com evidente definição das constantes A, B, C, D, E e F.

A solução deste sistema, embora apenas de duas incógnitas, não é trivial já que as equações são não lineares. Para viabilizar a solução do sistema, de forma simples e elegante, o mesmo pode ter as suas equações desacopladas desde que:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \quad (\text{A2.15})$$

o que fisicamente significa que a velocidade média no trecho inicial deve ser igual à velocidade média no trecho final, uma condição facilmente obtida.

Com a condição (A2.15) satisfeita, o sistema reduz-se a duas equações do segundo grau, em  $dt_{21}$  e  $dt_{22}$

$$dt_{21}^2 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} - \Delta x_2 + 3 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Delta t_2 = 0 \quad (\text{A2.16})$$

$$dt_{22}^2 \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3^2} - \Delta x_2 + 3 \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \Delta t_2 = 0 \quad (\text{A2.17})$$

As soluções de (A2.16) e (A2.17) são, portanto,

$$dt_{21} = \sqrt{\left( \Delta x_2 - 3 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Delta t_2 \right) \left( \frac{\Delta t_1^2}{\Delta x_1} \right)} \quad (\text{A2.18})$$

$$dt_{22} = \sqrt{\left( \Delta x_2 - 3 \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \Delta t_2 \right) \left( \frac{\Delta t_3^2}{\Delta x_3} \right)} \quad (\text{A2.19})$$

ou, então,

$$dt_{21} = \sqrt{-A / C}$$

$$dt_{22} = \sqrt{-D / F}$$

Para a existência da solução, ou seja, que  $dt_{21}$  e  $dt_{22}$  sejam definidos e positivos, de modo a assegurar a existência da função  $t(s)$  crescente, é necessário, primeiro, que existam os intervalos  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_3$ , ou seja, sejam diferentes de zero e em segundo lugar, que, para a equação (A2.18),

$$\Delta x_2 \geq 3 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Delta t_2$$

Reagrupando esta equação, vem :

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \geq 3 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad (\text{A2.20})$$

De forma semelhante, para assegurar a solução de (A2.19) é necessário que :

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \geq 3 \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \quad (\text{A2.21})$$

e já que para chegar à solução a equação (A2.15) foi utilizada, então a condição (A2.20) leva de imediato à condição (A2.21). Em termos práticos, (A2.20) e (A2.21) representam a exigência de que a velocidade média no trecho de movimentação seja ao menos três vezes maior do que a velocidade média nos trechos de afastamento e de aproximação e de um modo geral é possível escrever :

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = K \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad (\text{A2.22})$$

$$K \geq 3$$

Reescrevendo as equações (A2.18) e (A2.19), a solução da trajetória é portanto obtida como

$$dt_{21} = \Delta t_1 \sqrt{\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} - 3 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}} \quad (\text{A2.23})$$

$$dt_{22} = \Delta t_3 \sqrt{\frac{\Delta x_2}{\Delta x_3} - 3 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_3}} \quad (\text{A2.24})$$

enquanto que, usando (A2.9), (A2.11), (A2.23) e (A2.24), resulta :

$$dx_{21} = 3\Delta x_1 \sqrt{\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} - 3 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}} \quad (\text{A2.25})$$

$$dx_{22} = 3\Delta x_3 \sqrt{\frac{\Delta x_2}{\Delta x_3} - 3 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_3}} \quad (\text{A2.26})$$

ficando assim totalmente especificado o segundo trecho em função das condições de continuidade de velocidade e aceleração nos seus pontos extremos.

Os valores de  $\Delta x_1$ ;  $\Delta x_2$ ;  $\Delta x_3$ ;  $\Delta t_1$ ;  $\Delta t_2$  e  $\Delta t_3$  são calculados preliminarmente com a especificação de valores globais, como por exemplo  $\Delta x$  e  $\Delta t$  entre o ponto de partida e o ponto de chegada (ponto 1 e 4, figura A2.1). Usando (A2.15) e (A2.22), juntamente com um valor específico de  $K$ , obtém-se os dados necessários para (A2.23) a (A2.26). Assim, conhecidos  $\Delta x$  e  $\Delta t_1$ ;  $\Delta t_2$  e  $\Delta t_3$ , bem como :

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = \Delta x \quad (\text{A2.27})$$

é possível escrever :

$$\Delta x_1 + \Delta x_1 k \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} + \Delta x_1 \frac{\Delta t_3}{\Delta t_1} = \Delta x$$

e isolando  $\Delta x_1$ ,

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x}{1 + k \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} + \frac{\Delta t_3}{\Delta t_1}} \quad (\text{A2.28})$$

Quanto à  $\Delta x_2$  e  $\Delta x_3$ , são calculados através do uso de (A2.15) e (A2.27). No caso em que forem especificados  $\Delta x_1$ ;  $\Delta x_2$ ;  $\Delta x_3$  e  $\Delta t$ , já que

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \Delta t \quad (\text{A2.29})$$

os intervalos de tempo podem ser obtidos com o uso de (A2.15) e (A2.22), como

$$\Delta t_1 + \Delta t_1 \frac{1}{K} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} + \Delta t_1 \frac{\Delta x_3}{\Delta x_1} = \Delta t$$

Isolando  $\Delta t_1$ ,

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t}{1 + \frac{1}{K} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} + \frac{\Delta x_3}{\Delta x_1}} \quad (\text{A2.30})$$

e  $\Delta t_2$  e  $\Delta t_3$  são calculados com o uso de (A2.15) e (A2.22). Assim, dependendo da aplicação, usa-se (A2.28) quando é necessário especificar  $\Delta t_1$ ;  $\Delta t_2$ ;  $\Delta t_3$  e calcular  $\Delta x_1$ ;  $\Delta x_2$ ;  $\Delta x_3$ , ou de modo inverso para o uso de (A2.30), calculando-se  $\Delta t_1$ ;  $\Delta t_2$  e  $\Delta t_3$ .

## A2.2. Trajetória de quatro trechos.

Uma uma formulação para um maior número de pontos no espaço, é de uma trajetória de quatro trechos, onde além dos pontos extremos mais três pontos intermediários são fornecidos, definindo assim dois trechos de movimentação, além dos trechos extremos de afastamento e de aproximação. Esta formulação permite um melhor controle sobre o trecho de movimentação, possibilitando assim o seu uso como trajetória de precisão, com a alocação adequada dos pontos intermediários. Esta formulação se opõe à trajetória de três trechos, onde

tipicamente apenas os pontos extremos são definidos, o que a caracteriza como uma trajetória de movimentação ou trans- porte apenas. Nesta formulação todos os trechos são considerados com  $t(s)$  linear, o que viabiliza a formulação e elimina o problema de verificação da existência da função  $t(s)$ , conforme discutido nos itens 3.3 e 4.1, levando às equações (4.24) e (4.25).

A figura A2.2 mostra o esquema de uma trajetória de quatro trechos, com a especificação das variáveis usadas.

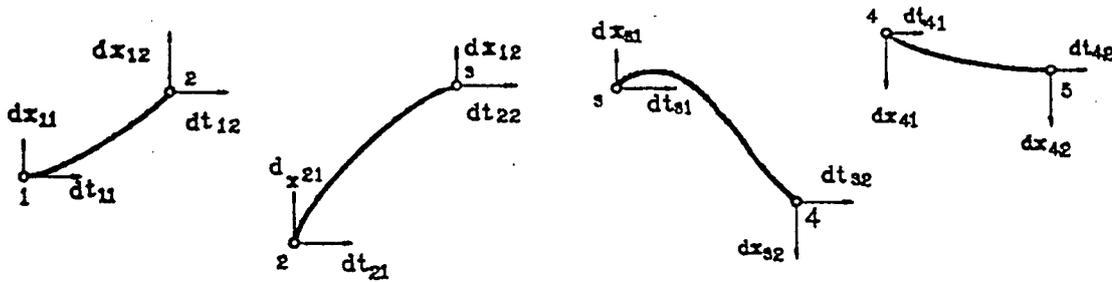


Figura A2.2 - Trajetória de quatro trechos.

Nesta formulação as condições extremas nos pontos 1 e 5 continuam as mesmas discutidas em A2.1 e portanto as equações (A2.5), (A2.6), (A2.7) e (A2.8) se aplicam para os trechos extremos, devendo-se usar  $\Delta x_1$  em (A2.6) e  $\Delta x_4$  em (A2.8). No cálculo de  $dx$  e  $dt$  para os trechos intermediários, é necessário considerar a continuidade de velocidade e de aceleração nos pontos 2; 3 e 4. As condições de continuidade no ponto 2 levam às equações :

$$3 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{dx_{21}}{\Delta t_2} \quad (\text{A2.31})$$

$$6 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} = \frac{1}{\Delta t_2^2} (6\Delta x_2 - 4dx_{21} - 2dx_{22}) \quad (\text{A2.32})$$

já que, como  $t(s)$  é linear, ocorre  $dt_{21} = dt_{22} = \Delta t_2$ . Para a continuidade de velocidade no ponto 3 tem-se as equações

$$\frac{dx_{22}}{\Delta t_2} = \frac{dx_{31}}{\Delta t_3} \quad (\text{A2.33})$$

$$\frac{1}{\Delta t_2^2} (-6\Delta x_2 + 2dx_{21} + 4dx_{22}) = \frac{1}{\Delta t_3^2} (6\Delta x_3 - 4dx_{31} - 2dx_{33}) \quad (\text{A2.34})$$

Finalmente para a transição entre o trecho 3 e o trecho 4, no ponto 4, vem

$$\frac{dx_{32}}{\Delta t_3} = 3 \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} \quad (\text{A2.35})$$

$$\frac{1}{\Delta t_3^2} (-6\Delta x_3 + 2dx_{31} + 4dx_{32}) = -6 \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} \quad (\text{A2.36})$$

Uma consideração adicional que é feita nesta formulação, de forma a viabilizar a sua solução explícita, é a de que os intervalos de tempo nos dois trechos centrais de movimentação sejam iguais, ou seja,

$$\Delta t_2 = \Delta t_3 \quad (\text{A2.37})$$

Isolando os valores de dx das equações (A2.31) e (A2.35), e substituindo nas equações de continuidade de aceleração, (A2.32); (A2.34) e (A2.36), resulta :

$$6 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} = \frac{1}{\Delta t_2^2} (6\Delta x_2 - 12 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \Delta x_1 - 2dx_{22}) \quad (\text{A2.38})$$

$$\frac{1}{\Delta t_2^2} \left( -6\Delta x_2 + 6 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \Delta x_1 + 4dx_{22} \right) = \frac{1}{\Delta t_3^2} \left( 6\Delta x_3 - 4dx_{31} - 6 \frac{\Delta t_3}{\Delta t_4} \Delta x_4 \right) \quad (\text{A2.39})$$

$$6 \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4^2} = \frac{1}{\Delta t_3^2} (6\Delta x_3 - 2dx_{31} - 12 \frac{\Delta t_3}{\Delta t_4} \Delta x_4) \quad (\text{A2.40})$$

Isolando  $dx_{31}$  de (A2.33) e substituindo em (A2.38) a (A2.40), resulta :

$$\Delta t_2^2 \cdot 6 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} + \Delta t_2 \cdot 12 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} + 2dx_{22} - 6 \Delta x_2 = 0 \quad (\text{A2.41})$$

$$\Delta t_2^2 \cdot 6 \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4^2} + \Delta t_2 \cdot 12 \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} + 2dx_{22} - 6 \Delta x_3 = 0 \quad (\text{A2.42})$$

$$\left( 6\Delta x_3 - 4dx_{22} - 6 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_4} \Delta x_4 \right) + \left( 6\Delta x_2 - 6\Delta x_1 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} - 4dx_{22} \right) = 0 \quad (\text{A2.43})$$

onde já foi considerado  $\Delta t_2 = \Delta t_3$ . A equação (A2.43) pode ser escrita como :

$$6(\Delta x_2 + \Delta x_3) - 8dx_{22} - 6\Delta t_2 \left( \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} + \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \right) = 0 \quad (\text{A2.44})$$

Isolando  $dx_{22}$  desta equação, vem :

$$dx_{22} = \frac{3}{4} \left( \left( \Delta x_2 + \Delta x_3 \right) - \Delta t_2 \left( \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} + \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \right) \right) \quad (\text{A2.45})$$

e substituindo em (A2.41) e (A2.42), resulta,

$$\begin{cases} \Delta t_1^2 \frac{6}{4} \left[ \Delta x_3 - 3\Delta x_2 - \Delta t_2 \left( \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} + \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \right) \right] + \Delta t_1 \Delta t_2 12 \Delta x_1 + \Delta t_2^2 6 \Delta x_1 = 0 \\ \Delta t_4^2 \frac{6}{4} \left[ \Delta x_2 - 3\Delta x_3 - \Delta t_2 \left( \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} + \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \right) \right] + \Delta t_4 \Delta t_2 12 \Delta x_4 + \Delta t_2^2 6 \Delta x_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.46})$$

De forma similar ao item A2.1, o sistema de equações representado por (A2.46) pode ser desacoplado fazendo

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} \quad (\text{A2.47})$$

e assim (A2.46) passam a ser, após algumas manipulações,

$$\Delta t_1^2 \left[ \frac{3}{2} (\Delta x_3 - 3\Delta x_2) \right] + \Delta t_1 [9 \Delta t_2 \Delta x_1] + \left[ \Delta t_2^2 6 \Delta x_1 \right] = 0 \quad (\text{A2.48})$$

$$\Delta t_4^2 \left[ \frac{3}{2} (\Delta x_2 - 3\Delta x_3) \right] + \Delta t_4 [9 \Delta t_2 \Delta x_4] + \left[ 6 \Delta t_2^2 \Delta x_4 \right] = 0 \quad (\text{A2.49})$$

A solução de (A2.48) leva à expressão :

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \frac{3 \mp \sqrt{9 + 4(3\Delta x_2 - \Delta x_3)/\Delta x_1}}{(3\Delta x_2 - \Delta x_3)/\Delta x_1}$$

e para que  $\Delta t_1$  seja positivo, é lógico que se deve adotar apenas a raiz obtida com o sinal positivo; usando a nomenclatura:

$$r_{x1} = \frac{3\Delta x_2 - \Delta x_3}{\Delta x_1} \quad (\text{A2.50})$$

a solução quanto a  $\Delta t_1$  passa a ser :

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{3 + \sqrt{9 + 4r_{x1}}}{r_{x1}} \quad (\text{A2.51})$$

Por outro lado, a solução da equação (A2.49) quanto a  $\Delta t_4$ , leva à expressão :

$$\Delta t_4 = \Delta t_2 \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4(3\Delta x_3 - \Delta x_2)/\Delta x_4}}{(3\Delta x_3 - \Delta x_2)/\Delta x_4}$$

e, também, para que  $\Delta t_4$  seja um acréscimo de tempo positivo, apenas a raiz calculada com o sinal positivo é relevante; assim a solução de  $\Delta t_4$  é :

$$\frac{\Delta t_4}{\Delta t_2} = \frac{3 + \sqrt{9 + 4r_{x4}}}{r_{x4}} \quad (\text{A2.52})$$

onde foi usada a notação :

$$r_{x4} = \frac{3\Delta x_3 - \Delta x_2}{\Delta x_4} \quad (\text{A2.53})$$

Adicionalmente, deve ser satisfeita a condição de desacoplamento (A2.47) , o que é feito com o uso de (A2.51) e (A2.52), que leva à :

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_4} = \frac{r_{x4}}{r_{x1}} \frac{3 + \sqrt{9 + 4r_{x1}}}{3 + \sqrt{9 + 4r_{x4}}}$$

e pode ser colocada na forma :

$$r_{x4} = \frac{9}{4} \left\{ \left[ \frac{3\Delta x_3 - \Delta x_2}{3\Delta x_2 - \Delta x_3} \left( 1 + \sqrt{1 + 4r_{x1}/9} \right) - 1 \right]^2 - 1 \right\} \quad (\text{A2.54})$$

Assim, dados  $\Delta x_1$ ;  $\Delta x_2$  e  $\Delta x_3$ , (A2.54) e (A2.53) permitem calcular  $\Delta x_4$  de modo a satisfazer (A2.47).

No caso da trajetória de quatro trechos apresentar uma reversão, onde o segundo trecho de movimentação é de sentido oposto ao do primeiro, o sistema (A2.46) continua válido e pode ser desacoplado usando  $\Delta x_1/\Delta t_1 = -\Delta x_4/\Delta t_4$ ,

levando como resultado, quanto a  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_4$ ,

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{4 + \sqrt{16 + 4 r_{x1}}}{r_{x1}} \quad (A2.55)$$

$$\frac{\Delta t_4}{\Delta t_2} = \frac{4 + \sqrt{16 + 4 r_{x4}}}{r_{x4}} \quad (A2.56)$$

com  $r_{x1}$  e  $r_{x2}$  dados ainda por (A2.50) e (A2.53) respectivamente. De modo a garantir a nova condição de desacoplamento de (A2.46), que leva à solução para a trajetória com reversão, chega-se a

$$r_{x4} = 4 \left\{ \left[ \frac{3\Delta x_3 - \Delta x_2}{3\Delta x_2 - \Delta x_3} \left( 1 + \sqrt{1 + r_{x1}/4} \right) + 1 \right]^2 - 1 \right\} \quad (A2.57)$$

equação que permite, dados  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  e  $\Delta x_3$ , obter  $\Delta x_4$  de modo a desacoplar (A2.46) e também obter (A2.55) e (A2.56), de forma coerente. Cabe observar que a solução acima pode vir a apresentar problemas, pela possibilidade de que  $r_{x1}$  e  $r_{x4}$  se anulem, dependendo dos valores de  $\Delta x_2$  e  $\Delta x_3$ .

### A2.3. Trajetória genérica.

Para o planejamento de uma trajetória usando os PCH, com um número qualquer de pontos, é necessário considerar uma sequência de trechos, como ilustrado na figura A2.3, onde cada um tem sua própria função  $x(s)$  e  $t(s)$ . Quanto à função  $t(s)$ , esta é aqui tratada como sendo linear, de modo a, em primeiro lugar, simplificar o equacionamento, usando (A1.15) e (A1.16) para o cálculo das acelerações, e em segundo lugar, eliminar a necessidade de verificar as condições de existência de  $t(s)$ , desde que  $\Delta t_1$  seja positivo.

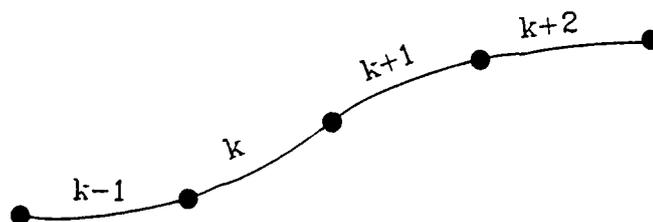


Figura A2.3 - Trajetória genérica, com quatro trechos consecutivos.

A continuidade de velocidade entre dois trechos consecutivos, como  $k-1$  e  $k$ , considerando adicionalmente que os pontos estão igualmente afastados no tempo, ou seja,  $\Delta t_i = \text{cte} = \Delta t$ , pode ser escrita como

$$\frac{dx_{k-1;2}}{\Delta t_{k-1}} = \frac{dx_{k;1}}{\Delta t_k}$$

e em consequência do afastamento uniforme no tempo entre pontos consecutivos, resulta :

$$dx_{k-1;2} = dx_{k;1} \quad (\text{A2.58})$$

Assim, em um dado ponto,  $dx$  é igual, quando se considera o trecho à esquerda e o trecho à direita, passando a ser assim uma característica do ponto e não do trecho. Deste modo, para simplificar um pouco a notação, esta será alterada quanto à designação de  $dx$ , adotando-se  $dx_k$  para o ponto inicial do trecho  $k$  e portanto  $dx_{k+1}$  para o ponto final deste mesmo trecho, porém inicial do trecho  $k+1$ , como mostra a figura A2.4. Nos pontos extremos a notação normal é mantida, pois não é possível assegurar que (A2.58) seja válida, já que depende da formulação dos trechos extremos aos considerados.

Quanto à continuidade de aceleração, esta pode ser então escrita, para a transição  $k-1; k$ , como :

$$\frac{-6\Delta x_{k-1} + 2dx_{k-1;1} + 4dx_k}{\Delta t_{k-1}^2} = \frac{6\Delta x_k - 4dx_k - 2dx_{k+1}}{\Delta t_k^2}$$

que pode ser simplificada, considerando que  $\Delta t_{k-1} = \Delta t_k$ , para :

$$-6\Delta x_{k-1} + 2dx_{k-1;1} + 4dx_k = 6\Delta x_k - 4dx_k - 2dx_{k+1} \quad (\text{A2.59})$$

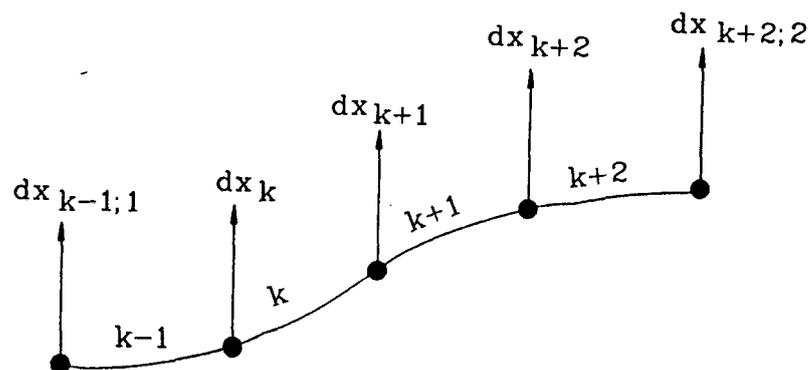


Figura A2.4 - Notação simplificada para  $dx$  no caso de intervalos com igual amplitude  $\Delta t$ .

De forma similar, é possível escrever para as transições nos outros pontos, como entre o trecho  $k$  e o trecho  $k + 1$ , :

$$-6\Delta x_k + 2dx_k + 4dx_{k+1} = 6\Delta x_{k+1} - 4dx_{k+1} - 2dx_{k+2} \quad (A2.60)$$

Para a transição entre o trecho  $k + 1$  e o trecho  $k + 2$ , tem - se :

$$-6\Delta x_{k+1} + 2dx_{k+1} + 4dx_{k+2} = 6\Delta x_{k+2} - 4dx_{k+2} - 2dx_{k+2;2} \quad (A2.61)$$

As equações (A2.59) a (A2.61) podem ser reescritas e formam na realidade um sistema de equações como (A2.62) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2dx_{k-1;1} + 8dx_k + 2dx_{k+1} = 6(\Delta x_{k-1} + \Delta x_k) \\ 2dx_k + 8dx_{k+1} + 2dx_{k+2} = 6(\Delta x_k + \Delta x_{k+1}) \\ 2dx_{k+1} + 8dx_{k+2} + 2dx_{k+2;2} = 6(\Delta x_{k+1} + \Delta x_{k+2}) \end{array} \right. \quad (A2.62)$$

Neste sistema de equações os termos extremos,  $dx_{k-1;1}$  e  $dx_{k+2;2}$ , são os termos que permitem o acoplamento com o restante da trajetória, e devem ser obtidos pelas condições de continuidade de velocidade naqueles pontos, sendo neles a velocidade dada por :

$$\dot{x}_{k-1;1} = \frac{dx_{k-1;1}}{\Delta t_{k-1}} \quad (A2.63)$$

$$\dot{x}_{k+2;2} = \frac{dx_{k+2;2}}{\Delta t_{k+2}} \quad (A2.64)$$

A compatibilidade de aceleração nestes pontos extremos deve ser suprida pelos trechos externos, através da definição de valores adequados para  $dx$  e  $dt$ , já que a trajetória, nos quatro trechos da figura A2.4, está perfeitamente definida, através de (A2.62) e das equações (A2.63) e (A2.64).

De modo a exemplificar o procedimento de acoplamento com os trechos externos, estes serão considerados como trechos terminais, um primeiro de afastamento, usando a formulação descrita em A2.1 e o último de aproximação, formando assim uma trajetória com seis trechos no total, ou seja, com quatro trechos de movimentação. Conforme visto na secção A2.1, para o trecho de afastamento, as condições no seu ponto final, ou seja, no seu ponto de acoplamento, vem

$$\dot{x}(1) = \frac{3\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad (\text{A2.65})$$

$$\ddot{x}(1) = 6 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} \quad (\text{A2.66})$$

De forma similar, para o primeiro ponto do trecho de aproximação,

$$\dot{x}(0) = 3 \frac{\Delta x_6}{\Delta t_6} \quad (\text{A2.67})$$

$$\ddot{x}(0) = -6 \frac{\Delta x_6}{\Delta t_6^2} \quad (\text{A2.68})$$

onde esta notação para o último trecho foi mudada, já que a trajetória considerada como exemplo é de seis trechos.

Quanto aos pontos extremos dos trechos de movimentação, para o primeiro ponto, vem

$$\dot{x}(0) = \frac{dx_{k-1;1}}{\Delta t_{k-1}} \quad (\text{A2.69})$$

$$\ddot{x}(0) = \frac{6\Delta x_{k-1} - 4dx_{k-1;1} - 2dx_k}{\Delta t_{k-1}^2} \quad (\text{A2.70})$$

e para o último ponto dos trechos de movimentação,

$$\dot{x}(1) = \frac{dx_{k+2;2}}{\Delta t_{k+2}} \quad (\text{A2.71})$$

$$\ddot{x}(1) = \frac{-6\Delta x_{k+2} + 2dx_{k+2} + 4dx_{k+2;2}}{\Delta t_{k+2}^2} \quad (\text{A2.72})$$

Igualando as expressões de velocidade e de aceleração nos citados pontos extremos, com a velocidade e aceleração do trecho de afastamento, resulta

$$3 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{dx_{22}}{\Delta t_2} \quad (\text{A2.73})$$

$$6 \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2} = \frac{6\Delta x_2 - 4dx_{21} - 2dx_3}{\Delta t_2^2}$$

bem como, para a continuidade com o trecho de aproximação,

$$3 \frac{\Delta x_6}{\Delta t_6} = \frac{dx_{52}}{\Delta t_5} \quad (\text{A2.74})$$

$$-6 \frac{\Delta x_6}{\Delta t_6} = \frac{-6\Delta x_3 + 2dx_5 + 4dx_{52}}{\Delta t_5^2}$$

onde foi considerado que a trajetória é de seis trechos.

Passa-se assim a ter sete equações, três do sistema (A2.62) e mais quatro (A2.73) e (A2.74), onde as incógnitas, em (A2.62) são  $dx_{21}$ ;  $dx_3$ ;  $dx_4$ ;  $dx_5$  e  $dx_{52}$  e as incógnitas em (A2.73) e (A3.74) podem ser selecionadas como  $\Delta x_1$ ;  $\Delta x_6$  ou  $\Delta t_1$ ;  $\Delta t_6$ , conforme a situação específica. De um modo geral a escolha lógica é adotar  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_6$  como incógnitas, pois  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_6$  especificam o ponto de partida e o ponto de chegada. Assim, tratando  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_6$  como novas incógnitas, existem assim sete incógnitas para as sete equações, onde reescrevendo (A2.73) e (A2.74), tem-se, além das equações de (A2.62), mais as quatro equações seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_{21} \quad \Delta t_1 \\ (6\Delta x_2 - 4dx_{21} - 2dx_3) \Delta t_1^2 \\ dx_{52} \quad \Delta t_6 \\ (-6\Delta x_5 + 2dx_5 + 4dx_{52}) \Delta t_6^2 \end{array} \right. = \begin{array}{l} 3\Delta x_1 \Delta t_2 \\ 6\Delta x_1 \Delta t_2^2 \\ 3\Delta x_6 \Delta t_5 \\ -6\Delta x_6 \Delta t_5^2 \end{array} \quad (\text{A2.75})$$

Deste modo, o sistema formado pelo conjunto de equações (A2.62) mais (A2.75) passa a ser um sistema com sete equações, com a peculiaridade de que quatro destas são não lineares. A presença destas equações não lineares exige uma estratégia específica na solução da trajetória, o que compromete assim o objetivo final que é o de uma formulação explícita, que viabilize o uso de forma acoplada com um sistema de controle em tempo real. Deste modo, a formulação de uma trajetória genérica, aqui deduzida e após particularizada para seis trechos, não é uma forte candidata a ser empregada junto a sistemas de manipuladores com controles em tempo real e em trajetórias adaptativas, a menos que um algoritmo suficientemente rápido viabilize a solução dos parâmetros que definem univocamente a trajetória. Para o caso de uma programação off line, no entanto, esta formulação não fica comprometida e portanto a solução deve ser detalhada.

Assim, a formulação completa de uma trajetória genérica, com um número qualquer de pontos, é dada pelo sistema de equações abaixo, onde quatro equações são não lineares. Para a resolução deste sistema, um procedimento específico foi

desenvolvido, adaptado aos detalhes conforme descrito a seguir. O sistema de equações tem a forma

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_{2,1} \Delta t_1 = 3 \Delta x_1 \Delta t \\ (6\Delta x_2 - 4dx_{2,1} - 2dx_3) \Delta t_1^2 = 6\Delta x_1 \Delta t^2 \\ 2dx_{2,1} + 8dx_3 + 2dx_4 = 6(\Delta x_2 + \Delta x_3) \\ 2dx_3 + 8dx_4 + 2dx_5 = 6(\Delta x_3 + \Delta x_4) \\ \vdots \\ 2dx_{N-2} + 8dx_{N-1} + 2dx_{N,2} = 6(\Delta x_{N-2} + \Delta x_{N-1}) \\ (6\Delta x_{N-1} + 4dx_{N-1,7} - 2dx_{N-1}) \Delta t_N^2 = 6\Delta x_N \Delta t^2 \\ dx_{N-1,2} \Delta t_N = 3\Delta x_N \Delta t \end{array} \right. \quad (A2.76)$$

sendo  $\Delta t$  e  $\Delta x_i$  dados da trajetória e  $\Delta t_1$ ;  $\Delta t_N$ ;  $dx_i$  as incógnitas a determinar para definir analiticamente as equações dos vários trechos que formam a trajetória. Assim, as primeiras duas e as últimas duas equações são não lineares, enquanto que as restantes formam um subsistema linear. A estratégia adotada na solução é de, em primeiro lugar, isolar  $dx_{2,1}$  e  $dx_{N-1,2}$ , substituindo-os nas outras equações, passando, assim, o sistema a ser

$$\left\{ \begin{array}{l} 6\Delta x_1 \tau_1^2 + 12\Delta x_1 \tau_1 + 2dx_3 = 6\Delta x_2 \\ 6\Delta x_1 \tau_1 + 8dx_3 - 2dx_4 = 6(\Delta x_2 + \Delta x_3) \\ 2dx_3 + 8dx_4 + 2dx_5 = 6(\Delta x_3 + \Delta x_4) \\ \vdots \\ 6\Delta x_N \tau_N + 2dx_{N-2} + 8dx_{N-1} = 6(\Delta x_{N-2} + \Delta x_{N-1}) \\ 6\Delta x_N \tau_N^2 + 12\Delta x_N \tau_N + 2dx_{N-1} = 6\Delta x_N \end{array} \right. \quad (A2.77)$$

mais as equações

$$\begin{aligned} dx_{2,1} &= 3\Delta x_1 \tau_1 \\ dx_{N-1,2} &= 3\Delta x_N \tau_N \\ \tau_1 &= \Delta t / \Delta t_1 \\ \tau_N &= \Delta t / \Delta t_N \end{aligned} \quad (A2.78)$$

O sistema, colocado na forma matricial, fica, após algumas

manipulações algébricas,

$$\begin{bmatrix} 6\Delta x_1 (2+\tau_1) & 0 & 2 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 6\Delta x_N (2+\tau_N) & 0 & 0 & 0 \dots 2 \\ 6\Delta x_1 & 0 & 8 & 2 & 0 \dots 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 2 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 2 \\ 0 & 6\Delta x_N & 0 & 0 & 0 \dots 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_n \\ dx_3 \\ dx_4 \\ \vdots \\ dx_{N-2} \\ dx_{N-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta x_{N-1} \\ \Delta x_2 + \Delta x_3 \\ \Delta x_1 + \Delta x_4 \\ \vdots \\ \Delta x_{N-3} + \Delta x_{N-2} \\ \Delta x_{N-2} + \Delta x_{N-1} \end{bmatrix}$$

(A2.79)

Colocando desta forma, torna-se evidente a conveniência de realizar um particionamento do sistema, isolando as duas primeiras equações das restantes, na forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{A2.80}$$

onde

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 6\Delta x_1 (2 + \tau_1) & 0 \\ 0 & 6\Delta x_N (2+\tau_N) \end{bmatrix} \tag{A2.81}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 8 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 2 & 8 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \tag{A2.82}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix} \tag{A2.83}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 6\Delta x_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 6\Delta x_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.84})$$

$$u_1 = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.85})$$

$$u_2 = \begin{Bmatrix} dx_3 \\ \vdots \\ dx_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.86})$$

$$C_1 = 6 \begin{Bmatrix} \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.87})$$

$$C_2 = 6 \begin{Bmatrix} \Delta x_2 + \Delta x_3 \\ \vdots \\ \Delta x_{N-2} + \Delta x_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.88})$$

A solução do sistema pode então ser dada, inicialmente, pela solução da parte não linear, obtida, a partir de (A2.80), como

$$\begin{cases} A_{11} u_1 + A_{12} u_2 = C_1 \\ A_{21} u_1 + A_{22} u_2 = C_2 \end{cases}$$

Da segunda equação,

$$A_{22} u_2 = C_2 - A_{21} u_1$$

e isolando o vetor  $u_2$ , vem:

$$u_2 = A_{22}^{-1} [C_2 - A_{21} u_1]$$

Substituindo agora na primeira equação,

$$A_{11} u_1 + A_{12} A_{22}^{-1} [C_2 - A_{21} u_1] = C_1$$

ou

$$A_{11} u_1 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} u_1 = C_1 - A_{12} A_{22}^{-1} C_2$$

e reagrupando,

$$[A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}] u_1 = C_1 - A_{12} A_{22}^{-1} C_2$$

obtem-se o sistema equivalente :

$$A_1^* u_1 = C_1^* \quad (A2.89)$$

Este sistema de duas equações contém toda a parte não linear, que requer agora um procedimento iterativo para a sua solução, o que é feito com o uso do Método de Newton-Raphson, conforme referências [7], [9] e [40].

Seja um sistema não linear :

$$B_{ij} U_j = F_i$$

onde  $B_{ij}$  é uma matriz,  $U_j$  é o vetor incógnita e  $F_i$  é o vetor excitação. Definindo o resíduo  $R_i$ ,

$$R_i(U) = B_{ij} U_j - F_i$$

vem, no vetor solução,

$$R_i(U) = 0$$

Pela expansão em Taylor, mantendo apenas os termos lineares,

$$R_i(U) = R_i(U^0 + \Delta U) = R_i(U^0) + \frac{\partial R_i(U^0)}{\partial U_j} (U_j - U_j^0) = 0$$

ou

$$R_i(U^0) + \frac{\partial R_i(U^0)}{\partial U_j} (U_j - U_j^0) = 0$$

onde tem-se:

$$\frac{\partial R_i(U^0)}{\partial U_j} = J_{ij}^0$$

que é a matriz jacobiana do problema. Substituindo  $J$  na expressão acima,

$$R_i(U^0) + J_{ij}^0 (U_j - U_j^0) = 0$$

$$R_i(U^0) = J_{ij}^0 (U_j^0 - U_j)$$

$$U_j^0 - U_j = (J_{ij}^0)^{-1} R_i(U^0)$$

$$U_j = U_j^0 - (J_{ij}^0)^{-1} R_i(U^0)$$

Para uma iteração  $r + 1$ ,

$$U_j^{r+1} = U_j^r - (J_{ij}^r)^{-1} R_i(U^r) \quad (A2.90)$$

Assim, o processo iterativo descrito pela equação (A2.90) é repetido até que o resíduo  $R(U^r)$  seja tão pequeno quanto necessário.

Obtendo a solução do subsistema não linear, é possível retornar ao sistema particionado e buscar a solução da parte linear, na forma que segue. Substituindo  $u_1$  da solução da parte não linear,

$$A_{21} u_1 + A_{22} u_2 = C_2$$

$$A_{22} u_2 = C_2 - A_{21} u_1$$

Isolando  $u_2$ ,

$$u_2 = A_{22}^{-1} [C_2 - A_{21} u_1]$$

$$u_2 = A_{22}^{-1} C_2^* \quad (A2.91)$$

Assim, determinado  $u_1$ , por Newton-Raphson,  $u_2$  é calculado pela solução do sistema, com a definição de  $C_2^*$ , o qual é igual a  $C_2$ , à exceção dos elementos extremos, pela forma de  $A_{21}$ .

Computacionalmente falando, a velocidade de solução do sistema completo depende da solução do subsistema não linear, o qual é fracamente acoplado, função da forma de  $A_{12}$ ;  $A_{21}$  e da estrutura tridiagonal de  $A_{22}$ , dependendo ainda da inversão de  $A_{22}$ . Quanto a esta, como é formada por elementos constantes, é possível ter sua forma invertida já armazenada, para diversos

números de pontos que definem a trajetória, já que a dimensão de  $A_{22}$  é dada pelo número de pontos menos quatro. As tabelas A.2.2 até A.2.7 apresentam a matriz e a sua correspondente inversa.

Deste modo, estando, por exemplo,  $A_{22}^{-1}$  pré-calculada para o número de pontos de trajetória, esta pode ser rapidamente calculada, uma vez obtida a solução do subsistema não linear, o que também não chega a comprometer o tempo de processamento, devido à rápida convergência ao resultado, geralmente em duas ou três iterações, função do fraco acoplamento existente.

A Tabela A2.1 mostra a relação entre os coeficientes relevantes das equações do subsistema não linear, para cinco e para dez pontos, evidenciando que com um maior número de pontos o acoplamento enfraquece rapidamente.

TABELA A2.1 - Coeficientes da equação em  $\tau_1$ ;  $\tau_N$ , para 5 e 10 pontos, considerando  $\Delta X_1$  constante. A equação fica na forma a seguir.

$$a\tau_1^2 + b\tau_1 + c\tau_N + d = 0$$

	a	b	c	d
5 pontos	1,00000	1,75000	-0,25000	2,00000
10 pontos	1,00000	1,73205	0,00034	3,46479

#### A2.4. Trajetória de dois trechos.

A trajetória de dois trechos é desenvolvida especificamente para uso com o conceito de trajetória adaptativa, para definir o percurso desde o ponto onde ocorre a bifurcação, até o ponto correspondente ao novo objetivo. As condições que a trajetória deve satisfazer no novo ponto final são idênticas às do objetivo original ( $\dot{x} = 0$  e  $\ddot{x} = 0$ ), que são satisfeitas pelo trecho de aproximação, de forma similar ao desenvolvido na seção A2.1.

Quanto à trajetória de movimentação, esta deve permitir ao manipulador, partindo das condições existentes no ponto de bifurcação, atingir o objetivo sob as condições impostas. A trajetória de dois trechos é assim formada de um primeiro trecho de movimentação, ou de transição, e um trecho final de aproximação. De modo a viabilizar a formulação, a continuidade de aceleração no ponto de bifurcação é dispensada, já que a força que o atuador que aciona uma dada junta pode mudar bruscamente de intensidade ou mesmo de sentido, embora isto não ocorra com frequência nos casos reais. Deste modo, as condições iniciais que existem no primeiro ponto do trecho de movimentação, figura A2.5, são :

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (\text{A2.92})$$

$$\ddot{x}(0) = a_0$$

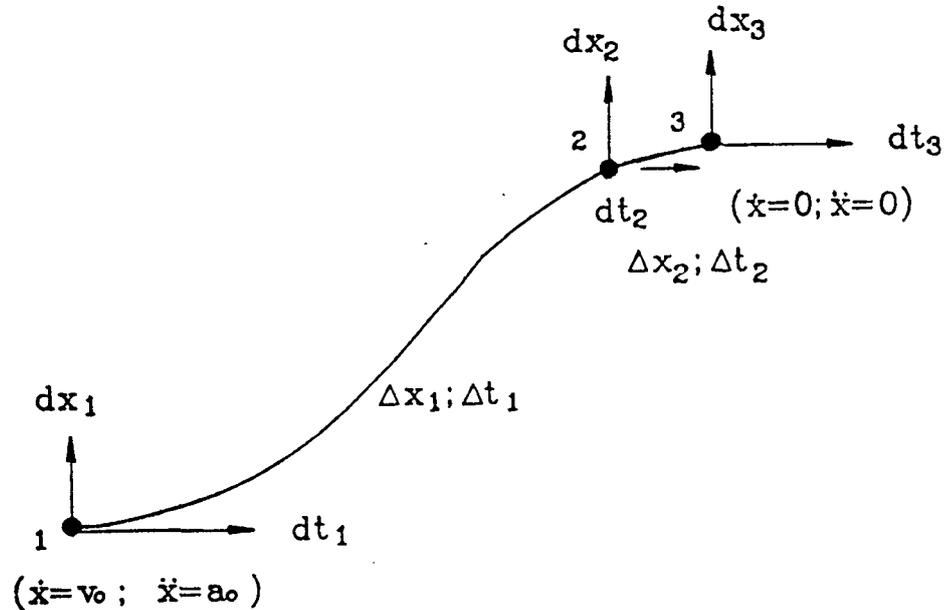


Figura A2.5 - Trajetória de dois trechos, um de movimentação e outro de aproximação. No ponto inicial a velocidade e a aceleração não são nulas.

As condições finais que devem ocorrer no extremo do trecho de aproximação, são

$$\dot{x}(1) = 0 \quad (\text{A2.93})$$

$$\ddot{x}(1) = 0$$

onde  $v_0$  é a velocidade da trajetória original no ponto de bifurcação e  $a_0$  é a aceleração necessária para cumprir a missão, de atingir o novo objetivo no tempo especificado.

Considerando  $t(s)$  linear nos dois trechos, e usando a solução para o trecho de aproximação, já detalhada em A2.1, para o primeiro ponto do trecho de movimentação, vem

$$v_0 = \frac{dx_1}{\Delta t_1} \quad (\text{A2.94})$$

$$a_0 = \frac{6\Delta x_1 - 4dx_1 - 2dx_2}{\Delta t_1^2} \quad (\text{A2.95})$$

e para o ponto 2, figura A2.5,

$$\frac{dx_2}{\Delta t_1} = 3 \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \quad (\text{A2.96})$$

$$\frac{-6\Delta x_1 + 2dx_1 + 4dx_2}{\Delta t_1^2} = -6 \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2^2} \quad (\text{A2.97})$$

Das equações (A2.93) e (A2.96) resulta de imediato:

$$dx_1 = v_0 \Delta t_1 \quad (\text{A2.98})$$

$$dx_2 = 3 \Delta x_2 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \quad (\text{A2.99})$$

O problema a ser resolvido é, em primeiro lugar, definido o objetivo, conhecer-se  $\Delta x$  e este deve então ser dividido nos dois intervalos,  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$ . Em segundo lugar, é necessário calcular qual a aceleração inicial,  $a_0$ , que deve ser usada para viabilizar a trajetória. Substituindo (A2.98) e (A2.99) em (A2.95) e (A2.97), resulta:

$$\begin{cases} 6\Delta x_1 - 4v_0\Delta t_1 - 6\Delta x_2 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} - \Delta t_1^2 a_0 = 0 \\ 6\Delta x_1 - 4v_0\Delta t_1 - 12\Delta x_2 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} - 6 \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2^2} \Delta t_1^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.100})$$

Considera-se conhecidos em (A2.100),  $v_0$ ;  $a_0$ ;  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$ , logo devem ser obtidos  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$ . Assim, subtraindo uma equação da outra, vem :

$$6 \Delta x_2 \left[ -\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} + 2 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} + \frac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2^2} \right] = 2v_0\Delta t_1 + a_0\Delta t_1^2$$

e portanto, isolando  $\Delta x_2$ ,

$$\Delta x_2 = \frac{1}{6} \frac{2v_0\Delta t_1 + a_0\Delta t_1^2}{\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \left[ 1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right]} \quad (\text{A2.101})$$

e  $\Delta x_1$  pode ser calculado como

$$\Delta x_1 = \Delta x - \Delta x_2 \quad (\text{A2.102})$$

ou então, substituindo  $\Delta x_2$  na última equação de (A2.100), resulta

$$\Delta x_1 = \frac{1}{6} \left[ 2v_0 \Delta t_1 + \frac{2 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}}{1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}} (2v_0 \Delta t_1 + a_0 \Delta t_1^2) \right] \quad (\text{A2.103})$$

Usando agora (A2.101), (A2.102) e (A2.103), resulta finalmente a expressão para  $a_0$ , que é a aceleração inicial necessária para atingir o objetivo no tempo especificado.

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t_1^2} \frac{6\Delta x (1 + \Delta t_1 / \Delta t_2) - 2v_0 \Delta t_1 (3 + 2\Delta t_1 / \Delta t_2 + \Delta t_2 / \Delta t_1)}{2 + \Delta t_1 / \Delta t_2 + \Delta t_2 / \Delta t_1} \quad (\text{A2.104})$$

Deste modo a solução da trajetória fica completa, devendo-se determinar, portanto, pela ordem,  $a_0$ ;  $\Delta x_2$ ;  $\Delta x_1$ ;  $dx_1$  e  $dx_2$ , usando respectivamente (A2.104); (A2.101); (A2.102); (A2.98) e (A2.99).

#### A2.5. Tabelas da matriz $A_{22}$ e sua inversa.

Esta secção apresenta a forma da matriz  $A_{22}$ , para uma trajetória genérica, bem como sua correspondente inversa, para até onze pontos especificados na trajetória.

TABELA A2.2 Matriz  $A_{22}$  e sua inversa. (Trajetória de 6 pontos)

MATRIZ 2 X 2

8.00000 2.00000

2.00000 8.00000

0.13333 -0.03333

-0.03333 0.13333

TABELA A2.3 Matriz  $A_{22}$  e sua inversa. (Trajetória de 7 pontos)

MATRIZ 3 X 3

8.00000 2.00000 0.00000

2.00000 8.00000 2.00000

0.00000 2.00000 8.00000

0.13393 -0.03571 0.00893

-0.03571 0.14286 -0.03571

0.00893 -0.03571 0.13393

TABELA A2.4 Matriz  $A_{22}$  e sua inversa. ( Trajetória de 8 pontos)

MATRIZ 4 X 4

8.00000	2.00000	0.00000	0.00000
2.00000	8.00000	2.00000	0.00000
0.00000	2.00000	8.00000	2.00000
0.00000	0.00000	2.00000	8.00000
0.13397	-0.03589	0.00957	-0.00239
-0.03589	0.14354	-0.03828	0.00957
0.00957	-0.03828	0.14354	-0.03589
-0.00239	0.00957	-0.03589	0.13397

TABELA A2.5 Matriz  $A_{22}$  e sua inversa. ( Trajetória de 9 pontos)

MATRIZ 5 X 5

8.00000	2.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2.00000	8.00000	2.00000	0.00000	0.00000
0.00000	2.00000	8.00000	2.00000	0.00000
0.00000	0.00000	2.00000	8.00000	2.00000
0.00000	0.00000	0.00000	2.00000	8.00000
0.13397	-0.03590	0.00962	-0.00256	0.00064
-0.03590	0.14359	-0.03846	0.01026	-0.00256
0.00962	-0.03846	0.14423	-0.03846	0.00962
-0.00256	0.01026	-0.03846	0.14359	-0.03590
0.00064	-0.00256	0.00962	-0.03590	0.13397

TABELA A2.6 Matriz  $A_{22}$  e sua inversa. ( Trajetória de 10 pontos)

MATRIZ 6 X 6

8.00000	2.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2.00000	8.00000	2.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	2.00000	8.00000	2.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	2.00000	8.00000	2.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	2.00000	8.00000	2.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	2.00000	8.00000
0.13397	-0.03590	0.00962	-0.00258	0.00069	-0.00017
-0.03590	0.14359	-0.03847	0.01031	-0.00275	0.00069
0.00962	-0.03847	0.14428	-0.03865	0.01031	-0.00258
-0.00258	0.01031	-0.03865	0.14428	-0.03847	0.00962
0.00069	-0.00275	0.01031	-0.03847	0.14359	-0.03590
-0.00017	0.00069	-0.00258	0.00962	-0.03590	0.13397

TABELA A2.7 Matriz  $A_{22}$  e sua inversa. ( Trajetória de 11 pontos)

MATRIZ 7 X 7

8.00000	2.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2.00000	8.00000	2.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	2.00000	8.00000	2.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	2.00000	8.00000	2.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	2.00000	8.00000	2.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	2.00000	8.00000	2.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	2.00000	8.00000
0.13397	-0.03590	0.00962	-0.00258	0.00069	-0.00018	0.00005
-0.03590	0.14359	-0.03848	0.01031	-0.00276	0.00074	-0.00018
0.00962	-0.03848	0.14428	-0.03866	0.01036	-0.00276	0.00069
-0.00258	0.01031	-0.03866	0.14433	-0.03866	0.01031	-0.00258
0.00069	-0.00276	0.01036	-0.03866	0.14428	-0.03848	0.00962
-0.00018	0.00074	-0.00276	0.01031	-0.03848	0.14359	-0.03590
0.00005	-0.00018	0.00069	-0.00258	0.00962	-0.03590	0.13397

## APÊNDICE 3.

### A3. MANIPULADOR EXEMPLO.

#### A3.1. CINEMÁTICA.

Nos exemplos de aplicação dos Capítulos 4 e 5, onde são detalhadas, respectivamente, as trajetórias pré-programadas e as trajetórias adaptativas, foi utilizado um manipulador de três graus de liberdade, com juntas rotativas, conforme ilustrado na figura A3.1, o que permite a localização de qualquer ponto dentro do seu espaço de trabalho, porém não permite controlar a orientação do efetuador, ou elemento ativo do manipulador. Esta deficiência do manipulador escolhido não é significativa, já que ele é utilizado tipicamente para ilustrar o procedimento proposto para o planejamento de trajetória e assim o uso, com um manipulador com três ou mais graus de liberdade, é idêntico quanto ao objetivo final pretendido, de ilustrar a formulação proposta.

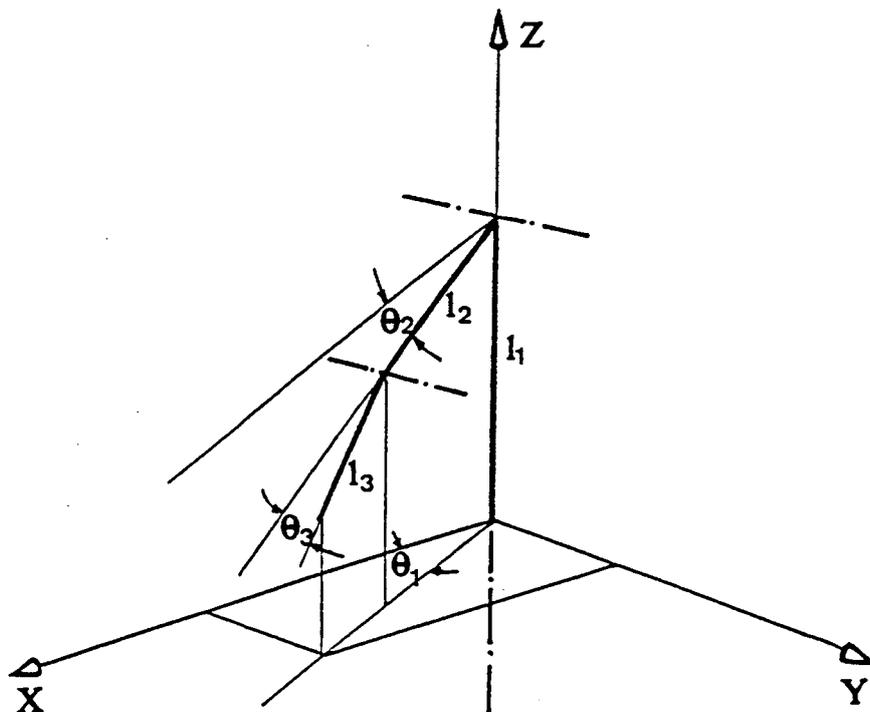


Figura A3.1 - Configuração do manipulador exemplo.

A cinemática direta para esta configuração, pode ser obtida como, [6,8].

$$x = (\ell_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos (\theta_2 + \theta_3)) \cos \theta_1 \quad (\text{A3.1})$$

$$y = (\ell_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos (\theta_2 + \theta_3)) \operatorname{sen} \theta_1 \quad (\text{A3.2})$$

$$z = \ell_1 - (\ell_2 \operatorname{sen} \theta_2 + \ell_3 \operatorname{sen} (\theta_2 + \theta_3)) \quad (\text{A3.3})$$

A cinemática inversa deste tipo de manipulador é dada pelas equações, [4,6].

$$\theta_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (y/x) \quad (\text{A3.4})$$

$$\theta_2 = \operatorname{actg} \left[ \frac{\ell_1 - z}{x/\cos \theta_1} \right] - \operatorname{arcos} \frac{[\ell_1 - z]^2 + [x/\cos \theta_1]^2 + \ell_2^3 - \ell_3^2}{2\ell_2 \sqrt{(\ell_1 - z)^2 + (x/\cos \theta_1)^2}} \quad (\text{A3.5})$$

$$\theta_3 = \operatorname{arcos} \frac{(x/\cos \theta_1)^2 + (\ell_1 - z)^2 - (\ell_2^2 + \ell_3^2)}{2\ell_2 \ell_3} \quad (\text{A3.6})$$

onde  $\theta_1$ ;  $\theta_2$  e  $\theta_3$  estão definidos na figura A3.1.

Para que a solução exista, é necessário que

$$x^2 + y^2 + (z - \ell_1)^2 \leq (\ell_2 + \ell_3)^2 \quad (\text{A3.7})$$

o que define os pontos internos ao espaço de trabalho.

### A3.2. CÉLULA DE TRABALHO E VISUALIZAÇÃO.

O manipulador articulado usado para exemplificar o procedimento de planejamento de trajetória está inserido em uma célula de trabalho fictícia, formada pelo manipulador e por um torno, modelado este pela sua base, cabeçote, contraponto e uma peça de trabalho cilíndrica. A figura A3.2 mostra um esquema da célula de trabalho com suas principais dimensões e a figura A3.3 mostra uma vista em perspectiva da célula.

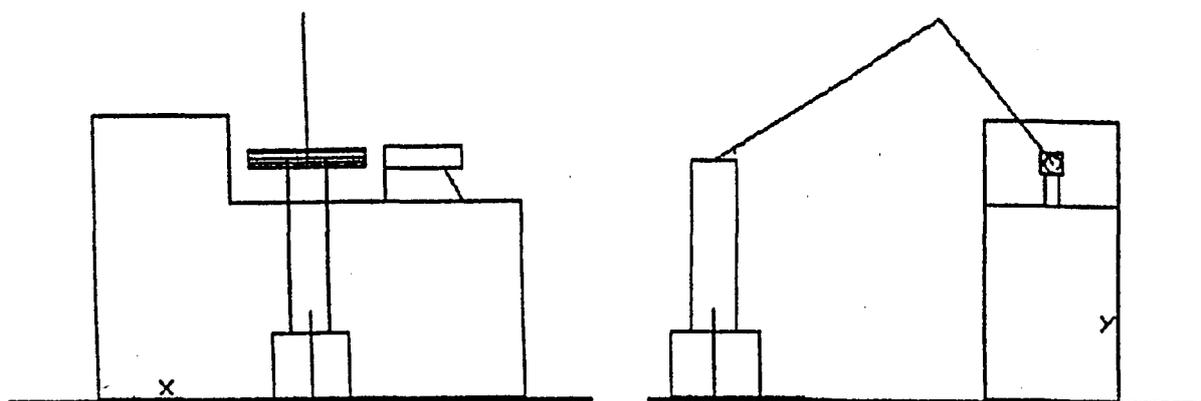


Figura A3.2 - Esquema da célula de trabalho usada como exemplo.

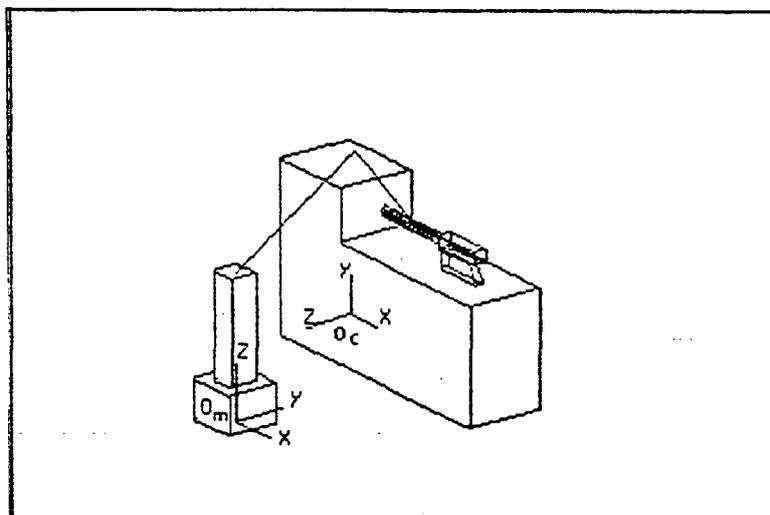


Figura A3.3 - Vista em perspectiva da célula de trabalho.

Um aspecto importante no modelamento da célula de trabalho é o uso de dois diferentes sistemas de coordenadas, o sistema da célula, com origem  $O_c$ , e o sistema do manipulador, com origem em  $O_m$ , conforme figura A3.3. Deve ser observado que os sistemas possuem não só origens distintas, mas também as orientações dos eixos são diferentes. O sistema da célula é o sistema básico para o processamento gráfico, onde é feito todo o cálculo para realizar o display, bem como para posicionar a direção segundo a qual o observador se orienta em relação à célula. Já o sistema de coordenadas do manipulador é usado para especificar a trajetória e, assim, os pontos fornecidos, por onde a trajetória deve passar, são dados em relação ao sistema de coordenadas do manipulador. Este sistema é portanto utilizado em todos os cálculos da cinemática inversa, a partir dos pontos especificados e também da cinemática direta, agora sobre cada um dos pontos calculados da trajetória, de modo a permitir o display da trajetória cartesiana sobre a célula de trabalho.

## APÊNDICE 4.

### TRAJETÓRIAS DO TIPO 4-3-4 E 3-5-3.

#### A4.1. FORMULAÇÃO DE UMA TRAJETÓRIA DO TIPO 4-3-4.

A trajetória do tipo 4-3-4, [12], é em tudo similar aos tipos de trajetórias que estão formuladas no presente trabalho. A trajetória é formada por três trechos, sendo em cada trecho definida, parametricamente, uma função polinomial, do quarto grau nos trechos extremos e do terceiro grau no trecho central, daí advindo a sua designação de trajetória 4-3-4. De um modo resumido, a formulação apresentada abaixo permite uma visão sobre os detalhes do algebrismo envolvido.

A trajetória consiste de três polinômios  $h_i(t)$ , que definem a trajetória de uma dada junta. Cada uma das equações polinomiais são expressas em um tempo adimensionalizado, definido entre 0 e 1 para cada trecho, coincidindo portanto com o parâmetro  $s$  usado no presente trabalho, quando uma função  $t(s)$  linear é adotada. As equações polinomiais para cada coordenada de junta, para os três trechos da trajetória, com tempo adimensional, são:

$$\begin{aligned} h_1(\tau) &= a_{14}\tau^4 + a_{13}\tau^3 + a_{12}\tau^2 + a_{11}\tau + a_{10} && \text{(primeiro trecho)} \\ h_2(\tau) &= a_{23}\tau^3 + a_{22}\tau^2 + a_{21}\tau + a_{20} && \text{(segundo trecho)} \\ h_3(\tau) &= a_{34}\tau^4 + a_{33}\tau^3 + a_{32}\tau^2 + a_{31}\tau + a_{30} && \text{(terceiro trecho)} \end{aligned} \tag{A4.1}$$

O tempo adimensionalizado,  $\tau$ , é definido a partir do tempo real  $t$ , em segundos, na forma

$$\tau = \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \tag{A4.2}$$

onde então  $t_i$  corresponde ao instante de tempo no fim do intervalo  $i$ .

As condições que as equações (A4.1) devem satisfazer podem ser listadas como abaixo, [12]:

Posição inicial,  $\theta_0$ .  
 Velocidade inicial,  $v_0$ , em geral nula.  
 Aceleração inicial,  $a_0$ , em geral nula.  
 Posição de afastamento,  $\theta_1$ , "lift-off".  
 Continuidade de posição em  $t_1$ .  
 Continuidade de velocidade em  $t_1$ .  
 Continuidade de aceleração em  $t_1$ .  
 Posição de aproximação,  $\theta_2$ , "set-down".  
 Continuidade de posição em  $t_2$ .  
 Continuidade de velocidade em  $t_2$ .  
 Continuidade de aceleração em  $t_2$ .  
 Posição final,  $\theta_f$ .  
 Velocidade final,  $v_f$ , em geral nula.  
 Aceleração final,  $a_f$ , em geral nula.

Aplicando estas condições para as equações (A4.1), vem:

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= \theta_0 \\
 a_{11} &= v_0 \tau_1 \\
 a_{12} &= a_0 \tau_1^2 / 2
 \end{aligned}
 \tag{A4.3}$$

$$\begin{aligned}
 a_{20} &= \theta_2 \\
 a_{21} &= v_2 \tau_2 \\
 a_{22} &= a_2 \tau_2^2 / 2
 \end{aligned}
 \tag{A4.4}$$

$$\begin{aligned}
 a_{30} &= \theta_f \\
 a_{31} &= v_f \tau_3 \\
 a_{32} &= a_f \tau_3^2 / 2
 \end{aligned}
 \tag{A4.5}$$

onde foi adotada a notação  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ . O desenvolvimento de todas as condições previamente citadas leva ao sistema de equações

$$C X = Y \tag{A4.6}$$

onde

$$Y = \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 - \frac{a_0 \tau_1^2}{2} - v_0 \tau_1 \\ -a_0 \tau_1 - v_0 \\ -a_0 \\ \Delta_2 \\ -a_f \tau_3 + v_f \\ a_f \\ \Delta_3 + \frac{a_f \tau_3^2}{2} - v_f \tau_3 \end{array} \right\} \quad (\text{A4.7})$$

$$C = \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/\tau_1 & 4/\tau_1 & -1/\tau_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6/\tau_1^2 & 12/\tau_1^2 & 0 & -2/\tau_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau_2 & 2/\tau_2 & 3/\tau_2 & -3/\tau_3 & 4/\tau_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/\tau_2^2 & 6/\tau_2^2 & 6/\tau_3^2 - 12/\tau_3^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad (\text{A4.8})$$

$$X = \left\{ \begin{array}{l} a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{34} \end{array} \right\} \quad (\text{A4.9})$$

A solução do sistema (A4.8) leva portanto à solução da trajetória, já que todos os coeficientes das equações (A4.1), estão definidos numericamente. O Apêndice A5 apresenta algumas curvas correspondentes às trajetórias geradas pela presente formulação. Deve ser salientado que a matriz coeficiente (A4.8)

apresenta-se mal condicionada, o que exigiu o uso de um algoritmo para a solução baseado no método de Gauss, mas com pivotamento parcial [40].

#### A4.2. FORMULAÇÃO DE UMA TRAJETÓRIA DO TIPO 3-5-3.

A trajetória do tipo 3-5-3, [12], é também similar aos tipos de trajetórias que estão formuladas no presente trabalho. A trajetória é formada por três trechos, onde em cada trecho é definida, parametricamente, uma função polinomial, sendo do terceiro grau nos trechos extremos e do quinto grau no trecho central, daí advindo a sua designação de trajetória 3-5-3. A formulação apresentada abaixo fornece diretamente as expressões dos polinômios que especificam os três trechos.

Primeiro trecho.

$$h_1(t) = ( \Delta x_1 - v_0 \Delta t_1 - a_0 \Delta t_1^2 / 2 ) t^3 + ( a_0 \Delta t_1^2 / 2 ) t^2 + ( v_0 \Delta t_1 ) t + x_0 \quad (A4.10)$$

$$v_1 = 3 \Delta x_1 / \Delta t_1 - 2 v_0 - a_0 \Delta t_1 / 2$$

$$a_1 = 6 \Delta x_1 / \Delta t_1^2 - 6 v_0 / \Delta t_1 - 2 a_0$$

Segundo trecho.

$$h_2(t) = ( 6 \Delta x_2 - 3 v_1 \Delta t_2 - 3 v_2 \Delta t_2 - a_1 \Delta t_2^2 / 2 + a_2 \Delta t_2^2 / 2 ) t^5 + ( -15 \Delta x_2 + 8 v_1 \Delta t_2 + 7 v_2 \Delta t_2 + 3 a_1 \Delta t_2^2 / 2 + a_2 \Delta t_2^2 ) t^4 + ( 10 \Delta x_2 - 6 v_1 \Delta t_2 - 4 v_2 \Delta t_2 - 3 a_1 \Delta t_2^2 / 2 + a_2 \Delta t_2^2 / 2 ) t^3 + ( a_1 \Delta t_2^2 / 2 ) t^2 + ( v_1 \Delta t_2 ) t + x_1 \quad (A4.11)$$

$$v_2 = 3 \Delta x_3 / \Delta t_3 - 2 v_f - a_f \Delta t_3 / 2$$

$$a_2 = -6 \Delta x_3 / \Delta t_3^2 - 6 v_f / \Delta t_3 - 2 a_f$$

Terceiro trecho.

$$\begin{aligned}h_2(t) &= ( \Delta x_2 - v_f \Delta t_3 + a_f \Delta t_3^2 / 2 ) t^3 \\ &+ ( - 3 \Delta x_3 + 3 v_f \Delta t_3 - a_f \Delta t_3^2 ) t^2 \\ &+ ( 3 \Delta x_3 - 2 v_f \Delta t_3 + a_f \Delta t_3^2 / 2 ) t + x_2\end{aligned}\tag{A4.12}$$

## APÊNDICE 5.

### A5. OUTROS RESULTADOS.

O presente Apêndice apresenta um conjunto de resultados adicionais de trajetórias geradas pelas diversas formulações discutidas ao longo do texto, com o objetivo de ilustrar de forma mais completa as diferentes possibilidades que são disponíveis.

#### A5.1. TRAJETÓRIAS PARA UM GRAU DE LIBERDADE.

As figuras A5.1 a A5.6 mostram vários exemplos para as formulações de trajetórias de três trechos, de quatro trechos, bem como para a trajetória genérica. As formulações de trajetórias do tipo 4-3-4 e 3-5-3 também estão presentes. Para melhor clareza dos exemplos, estes foram sempre feitos considerando um único grau de liberdade, o que facilita a análise dos resultados obtidos em cada exemplo. A figura A5.2 mostra o conjunto de três telas que o sistema TRA-GEN fornece para cada trajetória que é rodada, mas que na maioria dos exemplos apresentados neste trabalho não foram mostradas, por questões de redução do volume de dados apresentados. A primeira tela corresponde aos dados fornecidos, iniciando com a escolha do tipo de trajetória e logo após com a entrada dos dados necessários. A tela encerra com alguns valores de controle calculados. A segunda tela é a tela gráfica que fornece as curvas de posição, velocidade e aceleração, função do tempo. A terceira tela resume os valores de mínimo e máximo para as três curvas, com os correspondentes instantes de tempo em que ocorrem.

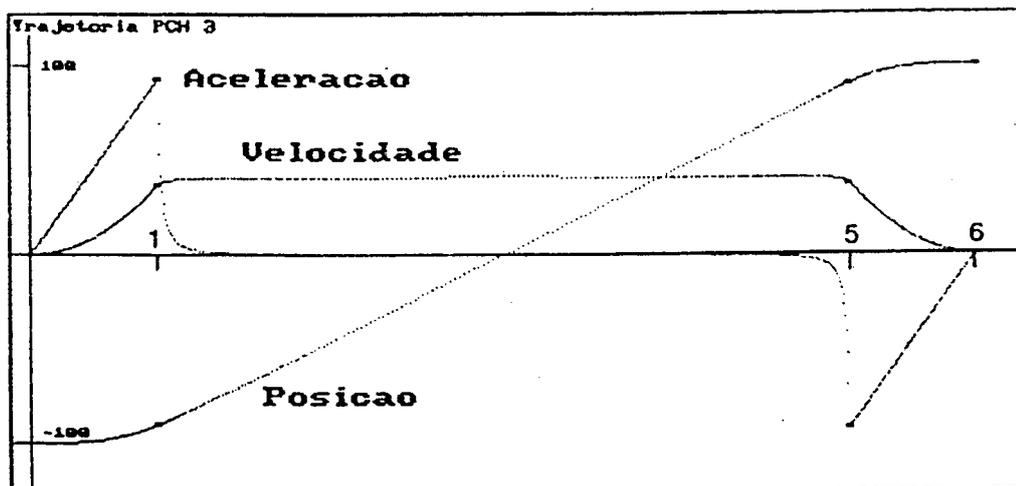


Figura A5.1 - Trajetória de três trechos, de precisão. O valor da constante  $K$  usada foi de 3,3, com um tempo total da trajetória de 6 segundos, posição do ponto inicial de -100 e do ponto final de 100.

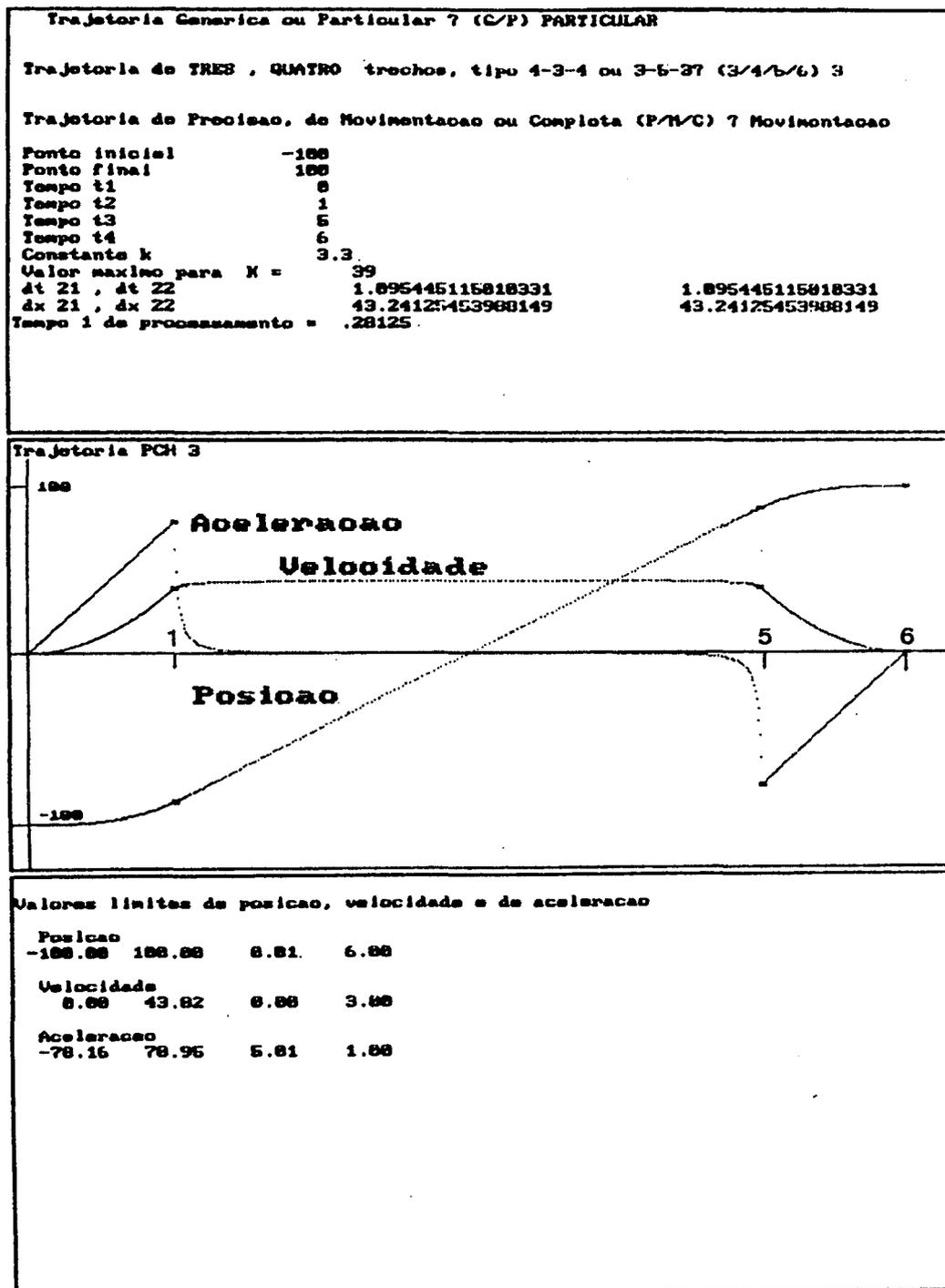


Figura A5.2 - Trajetória de três trechos, de movimentação, com valor de  $K = 3,3$ . São mostradas as três janelas de dados que o sistema fornece.

O exemplo de trajetória de quatro trechos da figura A5.3 foi selecionado para ilustrar certos aspectos que estão ocultos pela formulação deste tipo de trajetória. Para os dados fornecidos, mantendo constantes os pontos dados (primeiro, segundo e quarto pontos), a trajetória final obtida é muito sensível ao valor do terceiro ponto, no caso com coordenada  $-57,5$ .

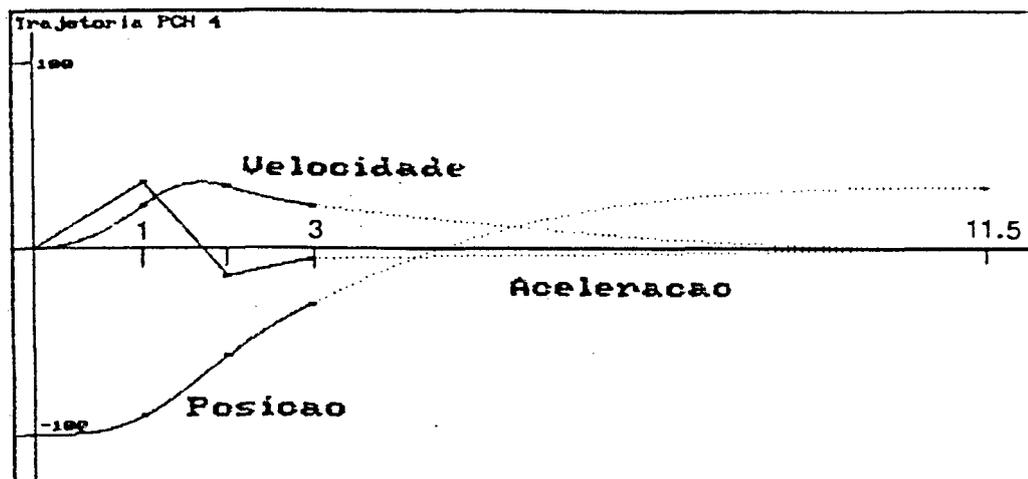


Figura A5.3 - Trajetória de quatro trechos. Os pontos especificados foram, na ordem, -100, -90, -57,5 e -30. O intervalo de tempo entre cada ponto intermediário é de 1 segundo.

Este efeito é decorrência da formulação adotada, onde os intervalos de tempo extremos são calculados a partir dos dados, equações (A2.51) e (A2.52); também a coordenada do ponto final é calculada, equação (A2.47). Assim, dependendo dos valores relativos dos pontos fornecidos, ocorrem duas situações críticas, uma quando a equação (A2.50) fica zero, outra quando a equação (A2.52) fica zero. Isto leva a que os intervalos de tempo calculados, para o trecho de afastamento ou para o trecho de aproximação tendam a infinito. Deste modo, a posição final varia consideravelmente, quando os dados estão na vizinhança da condição crítica. A Tabela A5.1 ilustra esta sensibilidade, para os dados da figura A5.3.

TABELA A5.1 - Valores da posição e do tempo final da trajetória da figura A5.3. dependendo da coordenada do terceiro ponto.

Coordenada do ponto	Posição final	Tempo final
-56,9	1339,0	176,5
-57,0	288,7	43,76
-57,5	33,21	11,50
-58,0	3,70	7,79

As figuras A5.4 a A5.6 mostram agora o efeito de uma velocidade inicial não nula sobre a trajetória. A velocidade adotada foi de -20, para uma trajetória partindo de -100 e atingindo 100 após 4,5 segundos. A trajetória do tipo 4-3-4 teve o menor valor extremo de aceleração, de  $91,35 \text{ s}^{-2}$ , enquanto que a trajetória 3-5-3 apresentou um pico de aceleração  $180,00 \text{ s}^{-2}$  e a PCH teve sua aceleração máxima de  $180,00 \text{ s}^{-2}$  também.

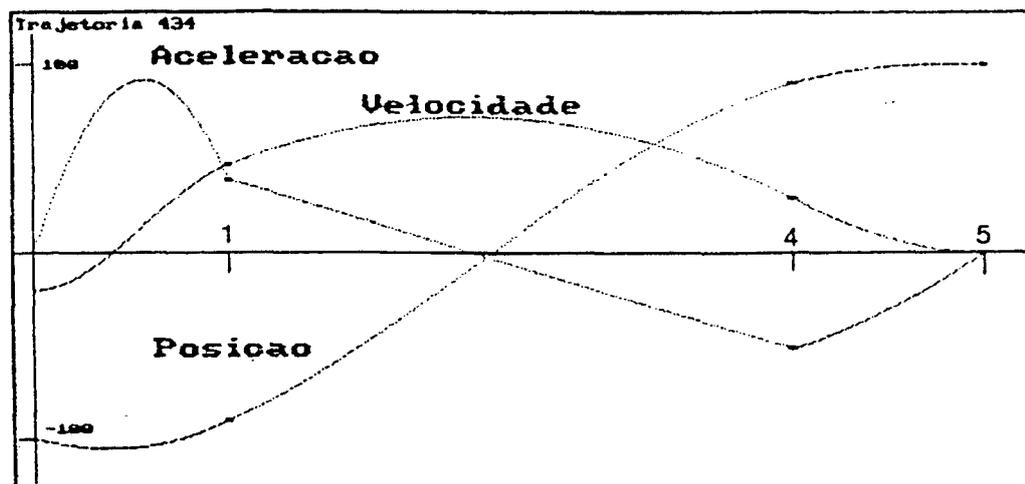


Figura A5.4 - Trajetória do tipo 4-3-4, com velocidade inicial de -20.

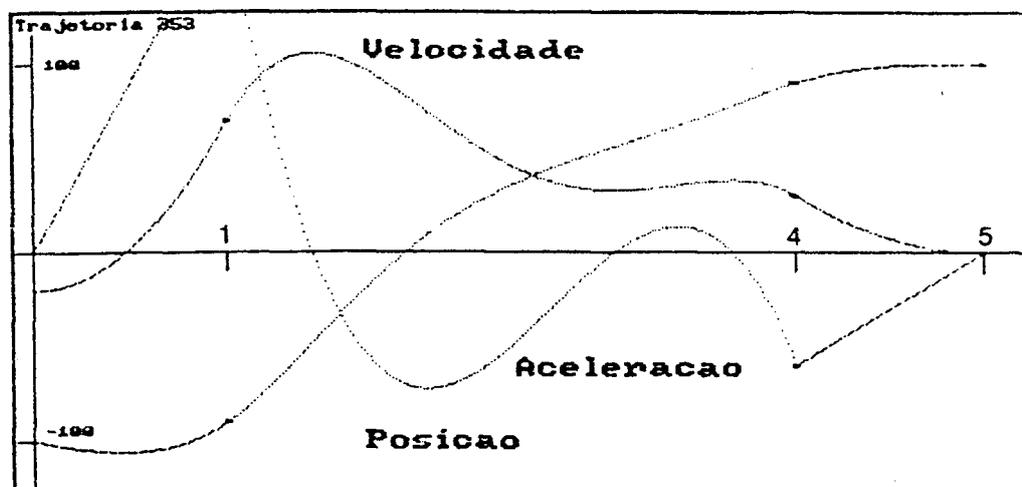


Figura A5.5 - Trajetória do tipo 3-5-3, com velocidade inicial de -20.

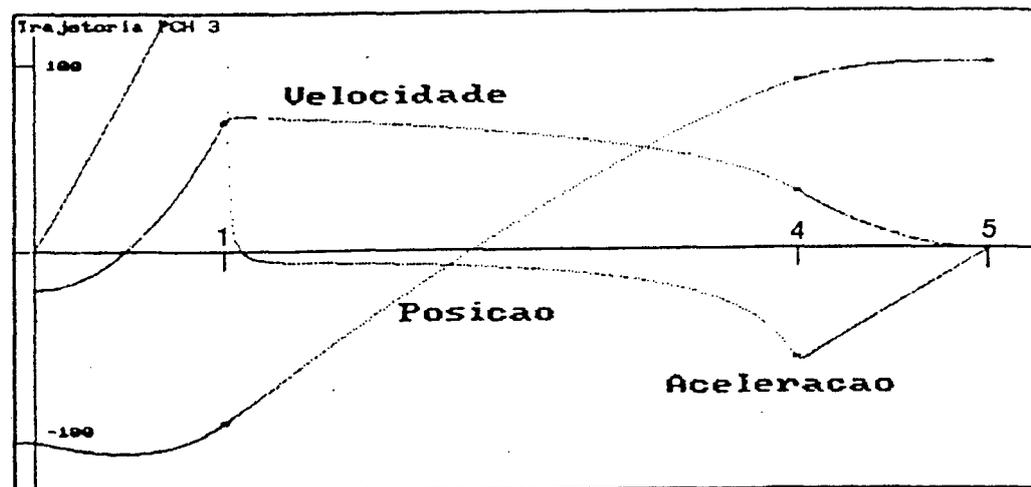


Figura A5.6 - Trajetória PCH de três trechos, com velocidade inicial de -20.

## A5.2. TRAJETÓRIAS NO ESPAÇO 3D.

Os exemplos que seguem consideram agora o manipulador descrito no Apêndice A3. A figura A5.7 mostra uma comparação entre uma trajetória retilínea definida por seis pontos e uma similar, agora definida por sete pontos. Dos valores de coordenadas cartesianas do extremo do manipulador, vem que, para a trajetória de seis pontos, o máximo desvio, em Y, foi de 60,90 mm, enquanto que na de sete pontos, não ultrapassou 3.22 mm. Assim, com a inclusão de apenas mais um ponto, o desvio da trajetória retilínea foi reduzido em praticamente vinte vezes.

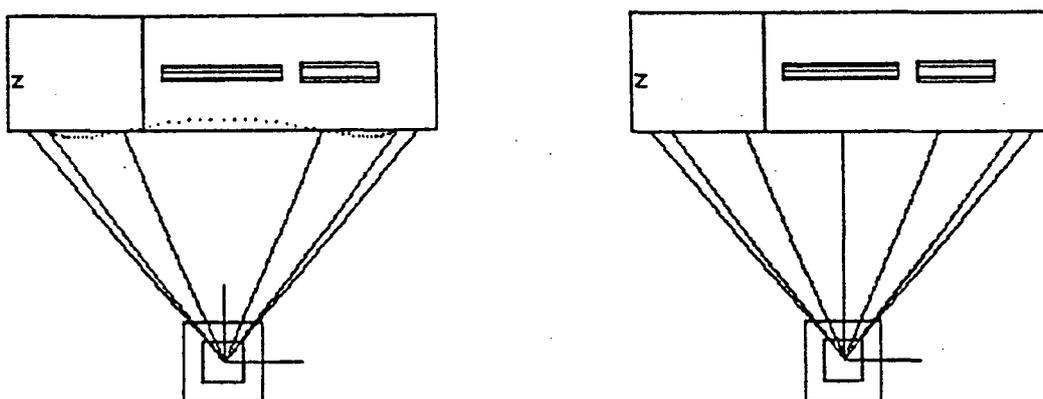


Figura A5.7 - Trajetória genérica de seis pontos e de sete pontos.

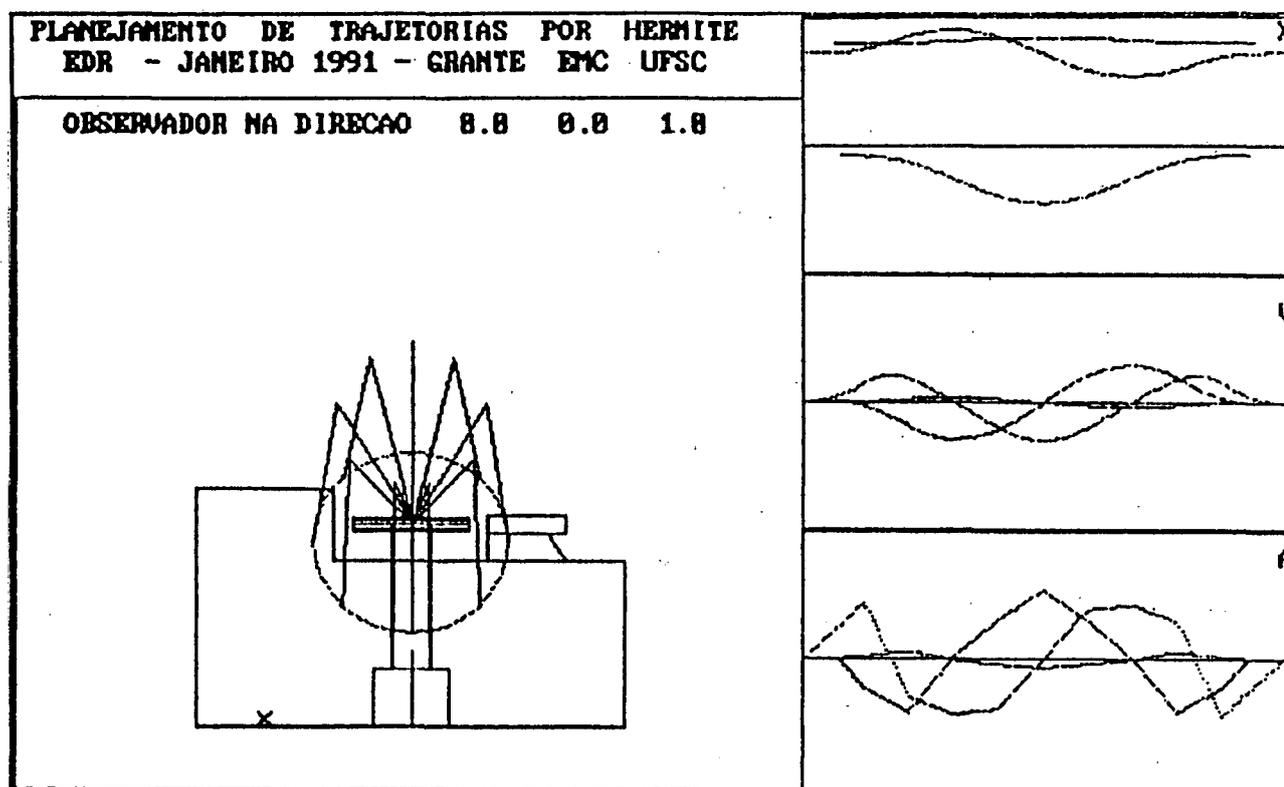


Figura A5.8 - Trajetória genérica de percurso circular.

A figura A5.8 mostra uma trajetória circular, em um plano paralelo ao plano XZ do manipulador, definida por onze pontos, iniciando no ponto mais baixo e na direção de  $\theta_1$  crescente. A tabela A5.2 mostra parte da listagem obtida para esta trajetória, para as coordenadas cartesianas do efetuador. A tabela A5.3 por sua vez ilustra os resultados a nível de junta, com os valores de posição, velocidade e aceleração, respectivamente para as juntas 1, 2 e 3.

TABELA A5.2 - Pontos em coordenadas cartesianas para a trajetória circular, correspondente aos dois primeiros trechos.

-0.01	1200.00	500.00
-0.09	1200.00	500.01
-0.29	1200.01	500.03
-0.69	1200.03	500.06
-1.36	1200.05	500.12
-2.35	1200.08	500.22
-3.72	1200.13	500.34
-5.56	1200.19	500.51
-7.92	1200.26	500.73
-10.86	1200.35	501.00
-14.46	1200.44	501.33
-18.77	1200.54	501.73
-23.87	1200.63	502.20
-29.81	1200.72	502.74
-36.67	1200.78	503.37
-44.52	1200.79	504.09
-53.40	1200.75	504.91
-63.40	1200.63	505.83
-74.58	1200.39	506.06
-87.00	1200.00	508.00
-97.11	1200.17	510.29
-107.91	1200.34	512.76
-119.33	1200.52	516.03
-131.32	1200.69	519.52
-143.82	1200.84	523.44
-156.78	1200.98	527.81
-170.15	1201.08	532.65
-183.85	1201.15	537.97
-197.84	1201.18	543.79
-212.07	1201.18	
-226.46	1201.1	
-240.97	12	
-255.53		
-270		

TABELA A5.3 - Posição, velocidade e aceleração, em coordenadas de junta, para a trajetória circular, correspondente aos dois primeiros trechos.

1.5708	0.0008	0.0480	-0.1842	-0.0002	-0.0245	1.7302	0.0000	0.0024
1.5709	0.0032	0.0961	-0.1842	-0.0007	-0.0487	1.7302	0.0001	0.0048
1.5710	0.0073	0.1441	-0.1842	-0.0016	-0.0734	1.7302	0.0002	0.0072
1.5714	0.0129	0.1921	-0.1842	-0.0028	-0.0978	1.7302	0.0003	0.0096
1.5719	0.0202	0.2402	-0.1843	-0.0044	-0.1223	1.7302	0.0005	0.0120
1.5728	0.0291	0.2882	-0.1843	-0.0063	-0.1468	1.7302	0.0008	0.0144
1.5739	0.0396	0.3362	-0.1844	-0.0086	-0.1712	1.7303	0.0010	0.0167
1.5754	0.0517	0.3843	-0.1846	-0.0112	-0.1957	1.7303	0.0014	0.0191
1.5774	0.0654	0.4323	-0.1848	-0.0142	-0.2201	1.7303	0.0017	0.0215
1.5798	0.0807	0.4804	-0.1850	-0.0175	-0.2446	1.7303	0.0021	0.0237
1.5828	0.0977	0.5284	-0.1853	-0.0212	-0.2691	1.7304	0.0026	0.0263
1.5864	0.1163	0.5764	-0.1856	-0.0252	-0.2935	1.7304	0.0031	0.0287
1.5907	0.1364	0.6245	-0.1860	-0.0296	-0.3180	1.7305	0.0036	0.0311
1.5956	0.1582	0.6725	-0.1865	-0.0343	-0.3424	1.7306	0.0042	0.0335
1.6013	0.1817	0.7205	-0.1870	-0.0394	-0.3669	1.7306	0.0048	0.0359
1.6079	0.2067	0.7686	-0.1876	-0.0448	-0.3914	1.7307	0.0055	0.0383
1.6152	0.2333	0.8166	-0.1883	-0.0506	-0.4158	1.7308	0.0062	0.0407
1.6236	0.2616	0.8646	-0.1890	-0.0567	-0.4403	1.7309	0.0069	0.0431
1.6328	0.2915	0.9127	-0.1899	-0.0632	-0.4647	1.7311	0.0077	0.0454
1.6432	0.3229	0.9607	-0.1908	-0.0700	-0.4892	1.7312	0.0085	0.0478
1.6515	0.3460	0.8802	-0.1927	-0.0825	-0.5095	1.7315	0.0098	0.0520
1.6405	0.3670	0.7997	-0.1950	-0.0955	-0.5290	1.7317	0.0111	0.0562
1.6499	0.3859	0.7192	-0.1975	-0.1090	-0.5501	1.7320	0.0126	0.0603
1.6797	0.4029	0.6388	-0.2004	-0.1230	-0.5704	1.7323	0.0141	0.0645
1.6900	0.4179	0.5583	-0.2037	-0.1375	-0.5907	1.7327	0.0158	0.0686
1.7006	0.4308	0.4778	-0.2073	-0.1525	-0.6110	1.7331	0.0176	0.0728
1.7115	0.4418	0.3973	-0.2113	-0.1680	-0.6313	1.7336	0.0194	0.0770
1.7227	0.4507	0.3168	-0.2157	-0.1841	-0.6516	1.7341	0.0214	0.0811
1.7340	0.4576	0.2363	-0.2205	-0.2006	-0.6720	1.7347	0.0235	0.0853
1.7455	0.4625	0.1558	-0.2257	-0.2177	-0.6923	1.7353	0.0257	0.0894
1.7571	0.4654	0.0754	-0.2314	-0.2352	-0.7124	1.7360	0.0280	0.0935
1.7688	0.4663	-0.0051	-0.2375	-0.2527	-0.7324	1.7368	0.0303	0.0976
1.7804	0.4651	-0.0856	-0.2441	-0.2702	-0.7524	1.7376	0.0326	0.1017
1.7920	0.4620	-0.1661	-0.2511	-0.2877	-0.7724	1.7384	0.0349	0.1058
1.8035	0.4570	-0.2466	-0.2584	-0.3052	-0.7924	1.7392	0.0372	0.1099

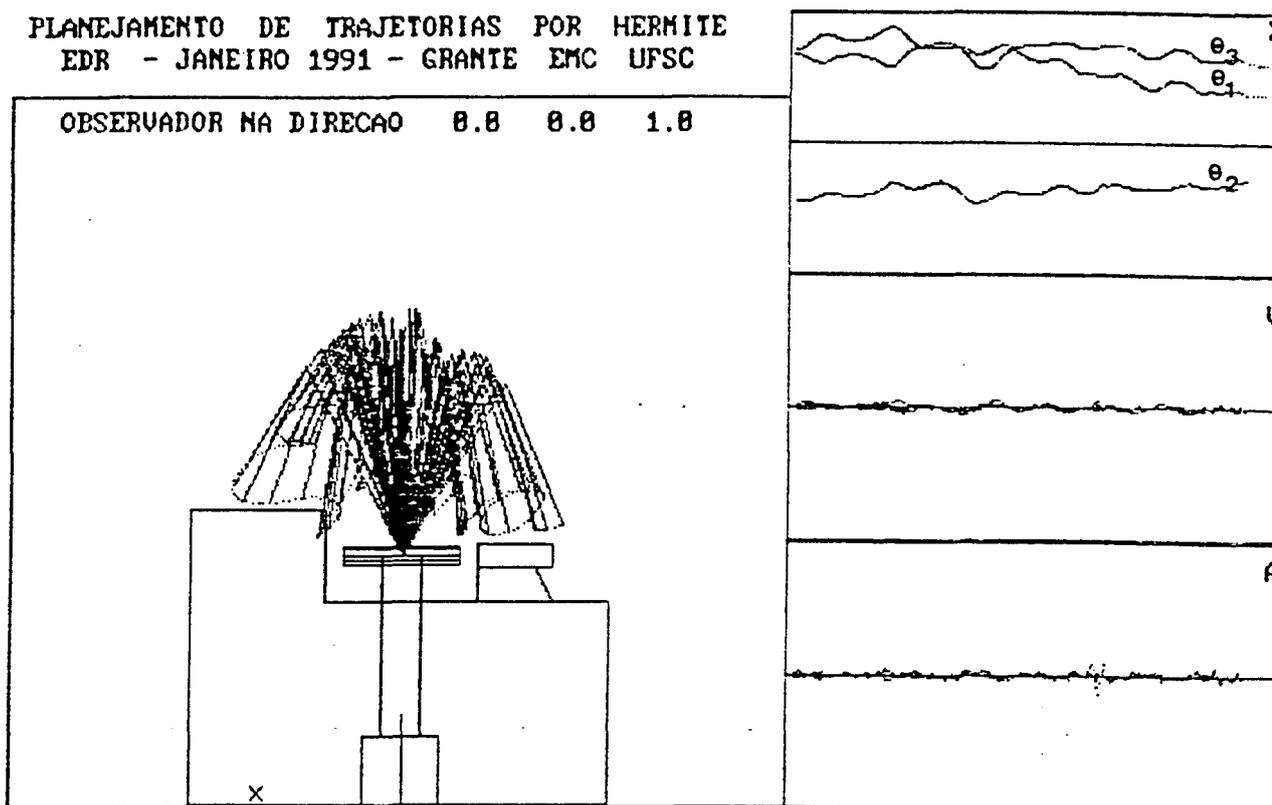


Figura A5.9 - Trajetória genérica de setenta e oito pontos.

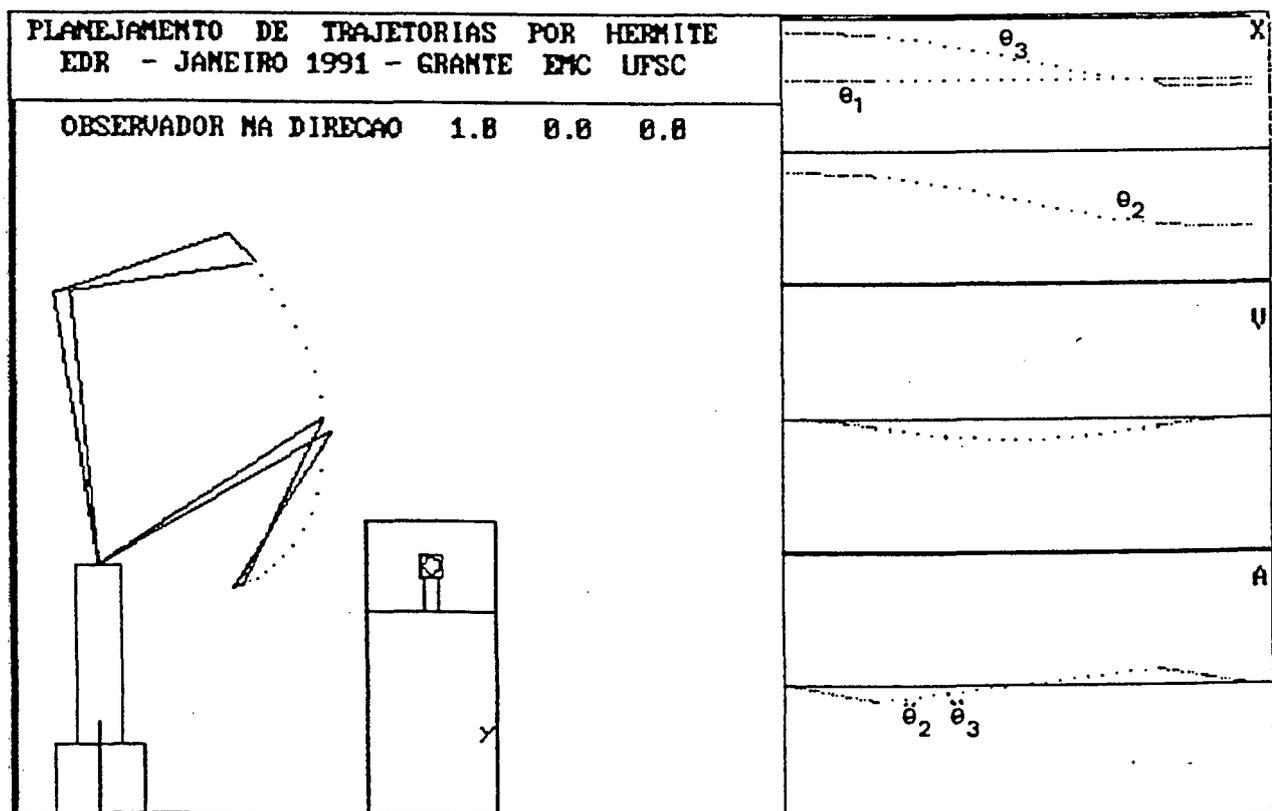


Figura A5.10 - Trajetória PCH de três trechos, com  $K = 6,0$ , iniciando no ponto  $(0,600,1000)$  e com ponto final em  $(0,600,2500)$ .

A figura A5.9 corresponde a uma trajetória gerada por setenta e oito pontos, mostrando assim a versatilidade do procedimento proposto. A figura A5.10 mostra o uso de uma trajetória de três trechos, com  $K = 6$ , para o manipulador considerado. Neste exemplo, coincidentemente, as trajetórias de  $\theta_2$  e  $\theta_3$  levam a curvas de velocidade e de aceleração praticamente idênticas, enquanto que  $\theta_1$  não tem alteração, pois a trajetória está no plano YZ do sistema de coordenadas do manipulador.

## APÊNDICE 6.

### A6. OS SISTEMAS COMPUTACIONAIS.

Este Apêndice apresenta uma descrição dos sistemas computacionais desenvolvidos para mostrar a utilização dos algoritmos e formulações apresentadas no decorrer do presente trabalho. Estes sistemas computacionais fornecem, no primeiro deles, as trajetórias planejadas por um dos processos descritos anteriormente, e, no segundo sistema, a simulação de uma célula de trabalho robotizada, com as trajetórias planejadas como descrito, para cada um dos graus de liberdade do manipulador modelado.

#### A6.1. O SISTEMA TRA-GEN.

Este sistema foi montado com o objetivo de criar um ambiente computacional para o desenvolvimento e teste dos algoritmos das diferentes formulações de trajetórias apresentadas neste trabalho, bem como para a formulação usada como comparação. Neste sistema, todas as formulações foram desenvolvidas para gerar a trajetória de um único grau de liberdade, fornecendo a posição, a velocidade e a aceleração, a acréscimos prédefinidos para o parâmetro  $s$ . As formulações implantadas no sistema foram:

Trajetoária de três trechos: Movimentação e precisão.

Trajetoária de quatro trechos;

Trajetoária genérica;

Trajetoária adaptativa (para qualquer trajetória acima);

Trajetoária 4-3-4, segundo [12];

Trajetoária 3-5-3, segundo [12].

A estrutura básica do sistema está esquematizada a seguir, com uma breve discussão das rotinas mais importantes.

## PROGRAMA PRINCIPAL

## DEFINICAO DE VARIAVEIS

```
IF 3Trechos          Le_Dados_Tres_Trechos
IF 4Trechos          Le_Dados_Quat_Trechos
IF Generica          Le_Dados_Generica
IF Adaptativa       Le_Dados_Adaptativa
IF 434               LeDados_434
IF 353               LeDados_353
```

## Ini\_Dados\_Graficos

```
IF 3Trechos
    IF Flag = 0 Trecho_3.1
    IF Flag = 0 Trecho_3.2
    IF Flag = 0 Trecho_3.3
IF 4Trechos
    IF Flag = 0 Trecho_4.1
    IF Flag = 0 Trecho_4.2
    IF Flag = 0 Trecho_4.3
    IF Flag = 0 Trecho_4.4
IF Generica
    IF Flag = 0 Trecho_G.1
    IF Flag = 0 Trecho_GInter
    FOR I = 1 to N_Pontos - 5
        IF Flag = 0 Trecho_GInter
    NEXT
    IF Flag = 0 Trecho_GInter
    IF Flag = 0 Trecho_GFim
IF 434
    IF Flag = 0 Trecho_434.1
    IF Flag = 0 Trecho_434.2
    IF Flag = 0 Trecho_434.3
IF 353
    IF Flag = 0 Trecho_353.1
    IF Flag = 0 Trecho_353.2
    IF Flag = 0 Trecho_353.3
IF Flag ≠ 0
    Processa_Trajectoria_Alternativa
```

END

As rotinas do tipo `Le_Dados`, além da entrada de dados necessários, fazem todo o cálculo preliminar para definir os vários coeficientes que especificam cada um dos trechos da trajetória, de acordo com a formulação adotada, como no caso da trajetória genérica, onde o sistema não linear é solucionado.

Exemplificando a estrutura da rotina `Trecho_3.1`, que é uma rotina típica do processamento de um trecho de trajetória, de modo a ilustrar o processamento interno, vem:

`Trecho_3.1`

DEFINICAO DE VARIAVEIS

```

s = 0
For I = 1 to NP
    s = s + ds
    Calc_Traj_Trecho_Inicial
    Desenha_Curva_XVA
    Verifica_Tempo_Bifurcacao
    Acha_Min_Max
        If Flag = 1 EXIT
NEXT

```

END

A rotina `Verifica_Tempo_Bifurcacao` faz a verificação da ocorrência de uma bifurcação ou não e, caso afirmativo, torna a variável `Flag` igual à unidade. A rotina `Acha_Min_Max` registra os valores limites de posição, velocidade e aceleração, com os correspondentes instantes de tempo em que ocorreram.

A rotina `Calc_Traj_Trecho_Inicial` é que realiza o cálculo da função  $x(s)$  e  $t(s)$ , segundo a secção A2.1.1, fornecendo assim a posição, a velocidade, a aceleração e o tempo, para cada valor do parâmetro  $s$ .

A rotina `Desenha_Curva_XVA` traça no vídeo, para cada instante de tempo, os pontos correspondentes às curvas de posição, de velocidade e de aceleração, todas em uma mesma escala, definida pelo máximo valor de posição que foi especificado pelos dados fornecidos.

## A6.2. O SISTEMA TRA-3D.

O sistema TRA-3D foi montado para ilustrar o uso das trajetórias programadas por PCH, no caso de manipuladores articulados, usando o manipulador e a célula de trabalho descritos no APÊNDICE A3. Este sistema fornece uma saída

gráfica, com quatro janelas, três delas dedicadas às curvas de posição, X, de velocidade, V e de aceleração, A, respectivamente. A quarta janela fornece a visão tridimensional da célula, com a trajetória cartesiana traçada e a posição dos braços do manipulador, de forma esquemática. Os braços são traçados apenas sobre os pontos que foram fornecidos para definir a trajetória e não sobre todos os pontos calculados, de modo a melhorar a visualização. A posição do observador é definida pela direção segundo a qual este está observando a célula, em relação ao sistema de coordenadas desta.

A estrutura básica do sistema 3D está esquematizada a seguir, com uma breve descrição das principais rotinas. As informações acerca da geometria da célula de trabalho estão no programa principal, com uma representação do tipo "wire-frame".

#### PROGRAMA PRINCIPAL

##### DEFINICAO DE VARIAVEIS

Le\_Envoltoria

Le\_Dados\_Generica

Tempo\_Absoluto

Traj\_Altern

Ini\_Dados\_Graficos

Matrizes\_Visual

Desenha\_Braco

s = 0

FOR I = 1 to NP

    s = s + ds

    IF Flag = 0 THEN

        Trecho\_G1 (TETA1)

        Trecho\_G1 (TETA2)

        Trecho\_G1 (TETA3)

        Desenha\_Traj\_3D

    NEXT

Desenha\_Braco

s = 0

```
FOR I = 1 to NP
  s = s + ds
  IF Flag = 0 THEN
    Trecho_GInter (TETA1)
    Trecho_GInter (TETA2)
    Trecho_GInter (TETA3)
    Desenha_Traj_3D
```

```
NEXT
```

```
Desenha_Braco
```

```
FOR n = 1 to N_Pontos - 5
```

```
  s = 0
```

```
  FOR I = 1 to NP
```

```
    s = s + ds
```

```
    IF Flag = 0 THEN
```

```
      Trecho_GInter (TETA1)
```

```
      Trecho_GInter (TETA2)
```

```
      Trecho_GInter (TETA3)
```

```
      Desenha_Traj_3D
```

```
    NEXT
```

```
NEXT
```

```
Desenha_Braco
```

```
s = 0
```

```
FOR I = 1 to NP
```

```
  s = s + ds
```

```
  IF Flag = 0 THEN
```

```
    Trecho_GInter (TETA1)
```

```
    Trecho_GInter (TETA2)
```

```
    Trecho_GInter (TETA3)
```

```
    Desenha_Traj_3D
```

```
NEXT
```

```
Desenha_Braco
```

```
s = 0
```

```

FOR I = 1 to NP
  s = s + ds
  IF Flag = 0 THEN
    Trecho_GFim (TETA1)
    Trecho_GFim (TETA2)
    Trecho_GFim (TETA3)
    Desenha_Traj_3D
  NEXT
Desenha_Braco
IF Flag = 1 THEN
  Processa_Traj_Alternativa
ELSE
  STOP
END

```

A subrotina `Le_Envoltoria` define uma envoltória sobre a célula de trabalho, centrada na origem do sistema de coordenadas do manipulador, a partir do espaço de trabalho. Esta envoltória é usada para calcular o enquadramento da célula de trabalho a ser usado, função da posição do observador.

A subrotina `Le_Dados_Generica` faz aqui a leitura dos pontos especificados pelo usuário, em coordenadas cartesianas, em relação ao sistema de coordenadas do manipulador. Após é calculada a cinemática inversa, com uso das funções

```

Cin_Inv1
Cin_Inv2
Cin_Inv3

```

que correspondem respectivamente às equações (A3.4), (A3.5) E (A3.6).

Finalmente, as trajetórias são préprocessadas, com a solução do sistema não linear, a solução do sistema linear e a definição dos coeficientes que especificam a trajetória, para cada um dos três graus de liberdade do manipulador.

A subrotina `Tempo_Absoluto` compatibiliza a escala de tempo para cada um dos graus de liberdade, já que os valores de  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_N$  são calculados a partir dos pontos especificados e logo é de se esperar que cada uma das coordenadas tenha um valor distinto de  $\Delta t_1$  e de  $\Delta t_N$ . Assim, para sincronizar os movimentos sobre os pontos especificados, é feito com que os pontos intermediários da trajetória coincidam no tempo e portanto o grau de liberdade

com maior  $\Delta t_1$  tem o seu movimento iniciado antes do que o grau de liberdade com menor  $\Delta t_1$ , de modo que ambos os graus de liberdade atinjam o segundo ponto especificado da trajetória exatamente no mesmo instante de tempo, seguindo em sincronismo a partir deste ponto.

A subrotina `Desenha_Braco` faz a cinemática direta para cada ligação e plota, no sistema de coordenadas da célula, a configuração esquemática do manipulador, apenas para os pontos da trajetória que foram inicialmente especificados.

A subrotina `Desenha_Traj_3D` faz a cinemática direta para o ponto do manipulador correspondente ao extremo do efetuador e o plota no sistema de coordenadas da célula, isto para cada ponto calculado da trajetória.