

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SISTEMATIZAÇÃO DA MODELAGEM E SIMULAÇÃO DINÂMICA
DE MANIPULADORES FLEXÍVEIS

TESE SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

FERNANDO ANTONIO FORCELLINI
FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 1994

SISTEMATIZAÇÃO DA MODELAGEM E SIMULAÇÃO
DINÂMICA DE MANIPULADORES FLEXÍVEIS

FERNANDO ANTÔNIO FORCELLINI

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO SÓLIDOS,
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA



NELSON BACK, Ph. D.
ORIENTADOR



CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE, Ph. D.
COORIENTADOR

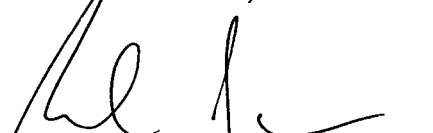


ANTÔNIO FÁBIO DE CARVALHO DA SILVA, D. Eng.
COORDENADOR

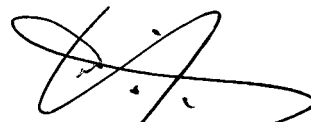
BANCA EXAMINADORA:



NELSON BACK, Ph. D.



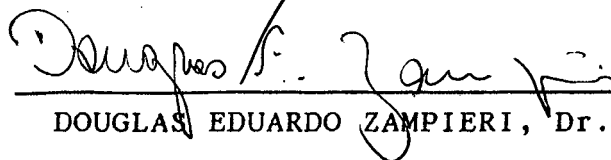
RAUL GUENTHER, D. Eng.



CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE, Ph. D.



LUIZ BEVILACQUA, Ph. D.



DOUGLAS EDUARDO ZAMPIERI, Dr. Ing.

BIOGRAFIA DO AUTOR

Fernando Antonio Forcellini, 31, é Engenheiro Mecânico formado em 1985 pela Universidade Federal de Santa Catarina, onde apresentou seu Mestrado (também em Engenharia Mecânica) em 1989. Desde 1993 é professor do Departamento de Engenharia Mecânica, da Universidade Federal de Santa Catarina.

À minha família pelo
inestimável apoio em
em todas as situações.

AGRADECIMENTOS

O autor ao término deste trabalho, deseja agradecer a todos que direta ou indiretamente colaboraram para a sua conclusão, e em especial,

Ao Prof. Nelson Back, pela orientação, incentivo e confiança;

Aos acadêmicos e amigos Jairo Leo Kegler e Ulisses Dobner Daniel, pelo elevado empenho e cooperação no desenvolvimento computacional presente neste trabalho;

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, pela oportunidade concedida;

Ao Laboratório de Projeto do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC, pela infra-estrutura e apoio;

Ao CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho trata do desenvolvimento de uma metodologia para a modelagem e simulação de manipuladores contendo ligações e juntas rotacionais flexíveis.

Na modelagem são utilizadas as equações de Lagrange. O conjunto de coordenadas generalizadas utilizado é composto de coordenadas que descrevem os grandes deslocamentos de corpo rígido das ligações, e das coordenadas que descrevem os pequenos deslocamentos devidos as deformações das ligações.

As ligações são discretizadas através de elementos finitos baseados na teoria de vigas de Timoshenko, e a flexibilidade das juntas através de molas torcionais lineares.

Para a simulação, foram implementados procedimentos que permitem a obtenção da resposta estática da estrutura para diferentes carregamentos e posições, das frequências naturais e dos modos de vibração, e a resposta dinâmica no tempo para dadas trajetórias. As informações geradas permitem que o desempenho do projeto estrutural seja avaliado para várias situações de trabalho.

ABSTRACT

This work deals with developing of a methodology for modelling and simulation of the manipulators with flexibles links and rotacional joints.

In the modelling are utilized Lagrange equations and the assemblage of generalized coordinates utilized is composed by coordinates that describe large rigid body displacements of the links and coordinates that describes small displacements due the links deformation.

The links are modelling by finite elements based on Timoshenko beam theory and the joint flexibility by linear torcional springs.

For the simulation are implemented procedures that permit obtain the struture static response for different loading and positions, natural frequencies, vibration modes and dinamical response in the time for given trajectories. The generate information allow the structural project performance of a manipulators be evaluated for several work situations.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1 - Introdução	13
2.2 - Formulações baseadas na Mecânica Analítica	15
2.2.1 - Equações de Lagrange com Modos Assumidos	15
2.2.2 - Equações de Hamilton com Modos Assumidos	21
2.2.3 - Equações de Lagrange com Matrizes de Transformação 4x4	23
2.2.4 - Equações de Lagrange com Elementos Finitos	29
2.2.5 - Princípio de Hamilton com Elementos Finitos	38
2.2.6 - Equações de Appel	43
2.3 - Formulações baseadas na Mecânica Vetorial	45
2.3.1 - Equações de Newton-Euler	46
2.3.2 - Equações de Kane	49
2.4 - Formulações considerando a flexibilidade das juntas	51
2.5 - Conclusões	52

CAPÍTULO III - UMA MODELADEM DINÂMICA PARA MANIPULADORES FLEXÍVEIS	60
3.1 - Introdução	60
3.2 - Formulação do modelo	61
3.3 - Expressões de energia	64
3.4 - Equações de movimento	69
CAPÍTULO IV - METODOLOGIA PARA A MODELAGEM DINÂMICA DE MANIPULADORES FLEXÍVEIS	74
4.1 - Introdução	74
4.2 - Descrição Cinemática do Modelo	74
4.3 - Expressões de Energia	79
4.4 - Um Exemplo de Aplicação da Metodologia	81
4.4.1 - Condições de Contorno	95
CAPÍTULO V - DESCRIÇÃO DE UM PROGRAMA PARA A SIMULAÇÃO DE MANIPULADORES FLEXÍVEIS	94
5.1 - Introdução	98
5.2 - Descrição do Programa	98
5.2.1 - Entrada de dados	100
5.2.2 - Modelagem das ligações	100
5.2.3 - Modelagem das juntas	101
5.2.4 - Equações do movimento	101
5.3 - Obtenção das respostas (simulação)	102
5.3.1 - Análise estática	102
5.3.2 - Análise dos autovalores e autovetores ...	105
5.3.3 - Análise transiente	106
CAPÍTULO VI - SIMULAÇÕES	111
6.1 - Introdução	111
6.2 - Simulações para o caso estático	111
6.3 - Simulações para autovalores e autovetores	125

6.4 - Simulações para o caso transiente	134
6.5 - Conclusões	182
CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES	185
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	190
APÊNDICE A	204
APÊNDICE B	207
APÊNDICE C	259
APÊNDICE D	262
APÊNDICE E	265
APÊNDICE F	364
APÊNDICE G	370

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Robótica é uma componente promissora da automação fabril que afetará a mão-de-obra humana em todos os níveis, desde operários especializados até engenheiros profissionais e gerentes de produção. Atualmente os robôs tem uma aplicação predominantemente industrial mas, os futuros robôs poderão encontrar aplicações fora da fábrica, em bancos, restaurantes e até mesmo em lares. É possível, talvez provável, que a robótica venha a se tornar um campo, como a tecnologia da computação hoje, difundível por todas as camadas da nossa sociedade [1].

Robôs incluem humanóides de ficção científica, robôs autônomos, robôs de sequência fixa e variável, máquinas de controle numérico e manipuladores industriais. Ou seja, robôs manipuladores são uma pequena subcategoria de robôs.

Segundo a U. S. Robot Industries Association (RIA), um robô industrial é um "manipulador reprogramável, multifuncional, projetado para mover materiais, peças, ferramentas ou dispositivos especiais através de movimentos variáveis programados para a realização de uma variedade de tarefas". Definições similares são adotadas pela British Robot Association e a Japanese Robot Association.

A analogia humana de um robô industrial hoje, é muito limitada. Os robôs não se parecem com humanos e não se comportam como humanos. Ao contrário, são máquinas de um só braço que quase

sempre operam a partir de um local fixo no piso da fábrica. Os futuros robôs poderão ter um número de atributos similares aos do homem. Terão maiores capacidades sensoriais, mais inteligência, um nível mais elevado de destreza, ainda que com um grau limitado de mobilidade. Não se pode negar que a tecnologia da robótica caminha na direção de dotar essas máquinas de mais e mais capacidades semelhantes às dos homens.

As tecnologias envolvidas e os conhecimentos requeridos para o projeto de manipuladores são bastante amplos e complexos. Portanto, uma equipe de projeto de robôs industriais deve possuir membros que tenham familiaridade com o uso de robôs (engenheiros de produção), projetos mecânicos, elétricos e análise (engenheiros elétricos e mecânicos) e interfaces computacionais (engenheiros de automação e de controle e programadores).

Tanto a comunidade acadêmica quanto a industrial, tem identificado como sendo de grande importância, a metodologia de projeto utilizada, no tocante a evolução dos sistemas robotizados [2-4].

O procedimento de projeto de robôs não é rigoroso ou bem organizado. Os projetistas utilizam intuição, experiência em outros campos e a tentativa e erro. Entretanto, como a experiência com manipuladores tem aumentado, as decisões de projeto tendem a ser melhor definidas. Uma característica de processos de projeto sofisticados é a elevada utilização de modelagem e simulação do sistema antes da experimentação com o hardware.

Um fluxograma mostrando as etapas de projeto de robôs é proposto na figura 1.1. Este procedimento objetiva explorar o máximo possível a modelagem e simulação de modo a minimizar a

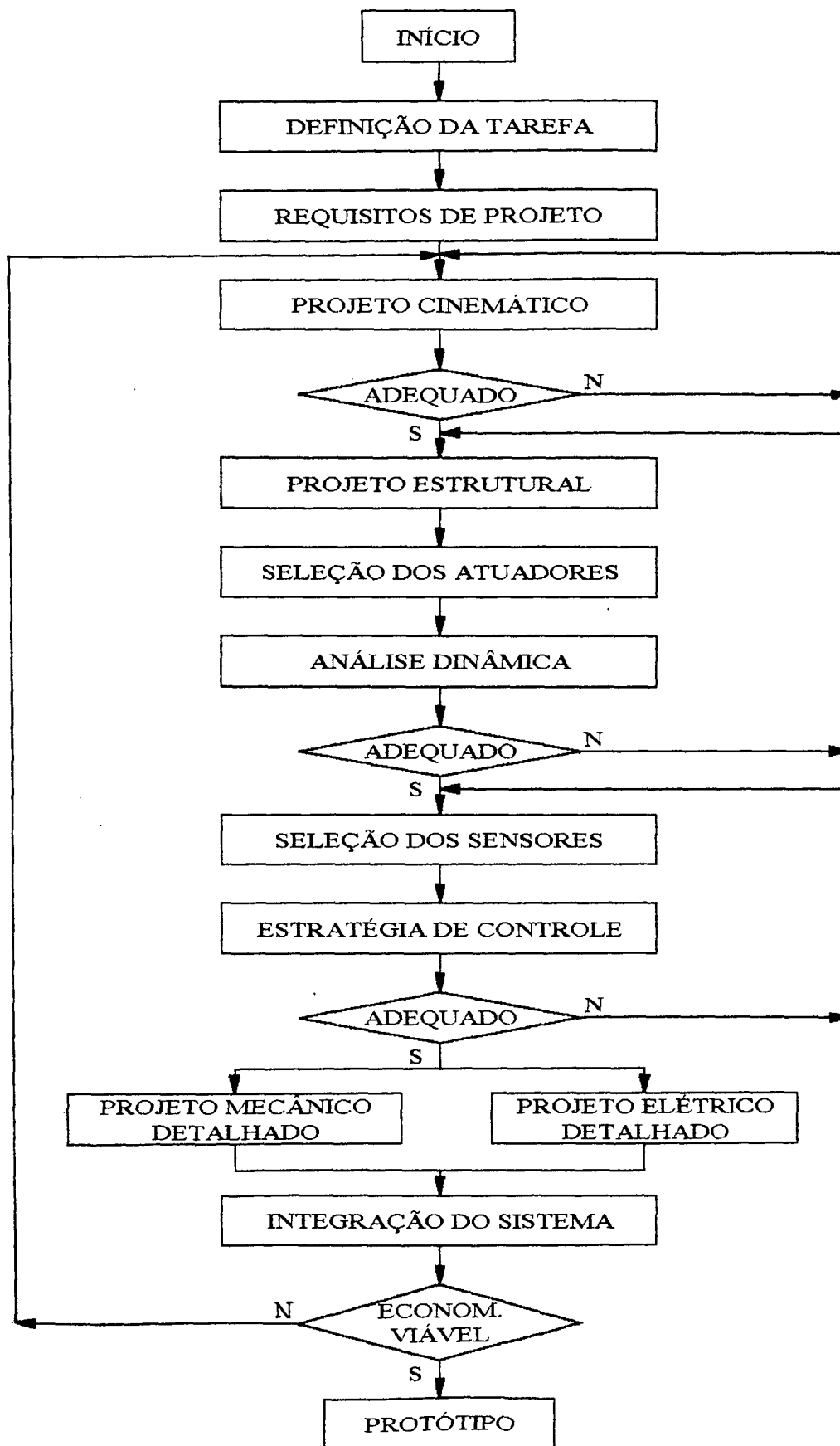


Fig. 1.1 - Fluxograma de projeto de um robô.

necessidade de reprojeto, exceto durante as fases iniciais, onde o custo de reprojeto é baixo.

Pode-se dizer que, os robôs industriais na sua forma final, são constituídos basicamente de três sistemas:

- estrutura mecânica, consistindo das ligações mecânicas e juntas capazes de vários movimentos;
- sistema de controle, podendo ser do tipo seqüencial ou servocontrolado;
- unidades de potência, que podem ser hidráulicas, pneumáticas, elétricas ou combinações destas, com ou sem transmissões mecânicas.

Atualmente tem-se feito muitos progressos a nível mundial no desenvolvimento de sistemas de controle, sensoreamento do efetuator, motores direct-drive e sistemas de visão. Entretanto, observa-se que uma das dificuldades para a aceitação de robôs pela indústria de um modo geral, provém do seu elevado custo, o qual é devido em grande parte ao baixo nível tecnológico da sua estrutura mecânica. Pois, desde que, o custo do sistema de controle incluindo sensores hardware e software, não depende significativamente do tamanho do robô, o custo deste pode ser significativamente influenciado pelo custo do sistema mecânico [5].

Existe também, uma grande necessidade de sistemas robotizados que operem com alta velocidade e tenham características superiores de performance.

Observa-se que na geração atual de robôs, estes são projetados com membros articulados possuindo grandes momentos de inércia, alta rigidez, peso substancial e que, para conseguirem repetibilidade e precisão no efetuator, utilizam como relação

entre o peso da carga e o peso do braço de até 1:100 [6], parâmetros estes, causadores de restrições significativas tanto na resposta quanto na aplicação destes equipamentos.

As baixas relações entre carga e peso do braço, tornam os robôs caros, pesados e perigosos, o que limita estes equipamentos ao ambiente de fábrica, onde podem trabalhar regularmente, montados sobre base sólida e isolados adequadamente dos trabalhadores humanos.

A próxima geração de robôs, deverá ser sensivelmente diferente da atual, no tocante a aparência e comportamento. Os futuros robôs terão estruturas muito mais leves e flexíveis, onde os membros estruturais irão deformar-se tanto sob a ação de cargas, como durante os movimentos. Com a flexão dos membros, o movimento dos robôs não será desajeitado e feito aos trancos, mas tenderá a ser suave e gracioso. Eles também usarão a flexibilidade para a execução de tarefas, que não são executadas pela atual geração de robôs, tais como: arremesso a martelamento.

Os futuros robôs deverão manipular cargas tão ou mais pesadas que ele, e não terão necessariamente de ser fixos ao chão. Eles serão modulares de tal forma, que um membro diferente poderá ser inserido no robô para uma diferente tarefa, e que pequenos reparos poderão ser facilmente executados.

Devido ao seu baixo peso, serão menos custosos, e pela sua flexibilidade, serão mais seguros nas suas interações com as pessoas e outros equipamentos, e suas colisões não deverão ser catastróficas.

Então, as características de alta performance tais como alta repetibilidade, boa capacidade de carga, pequenos tempos de resposta, baixo peso, baixo consumo de potência e alta precisão

no efetuator, podem ser obtidas fabricando-se membros estruturais de baixo peso com adequada rigidez estrutural [2].

Por exemplo, os benefícios advindos do uso de sistemas de visão são frequentemente limitados pelo comportamento dinâmico do robô, já que cenas simples podem ser analisadas pelo sistema de controle de visão em 250 ms ou menos, um robô do tipo Unimate 2000 B necessita de 500 ms para responder a um simples sinal do sistema de controle.

O projeto mecânico de um robô consiste no planejamento da construção física das partes do robô submetidas a carregamentos. Esta tarefa inclui a especificação da forma, seção transversal e materiais utilizados em cada ligação, atuadores e transmissões. Concluída esta etapa, parte-se para uma análise do projeto mecânico, objetivando verificar se o robô atinge a performance desejada. Dois aspectos importantes devem ser analisados: um quanto a precisão, que envolve o comportamento decorrente da rigidez estrutural em várias condições diferentes de configuração e carregamento; e outro quanto a frequência, envolvendo características de inércia e rigidez, e como elas afetam a performance do robô.

A figura 1.2 que mostra, mais detalhadamente, a etapa de análise dinâmica, permite verificar a relevância para o projeto mecânico de robôs de alta performance, das teorias de análise dinâmica dos corpos que formam os robôs, bem como conhecimentos das ciências dos materiais, pois se a geometria e as propriedades dos materiais que compõem o braço dos robôs são otimizados, as características mecânicas de performance anteriormente citadas também serão otimizadas.

Pode-se verificar então, que para um dado robô operando

com carga e velocidade prescritas, as características dinâmicas da resposta do efetuator e conseqüentemente a precisão, repetibilidade e tempo de estabilização, são largamente influenciadas pela massa, rigidez e propriedades dos membros estruturais. O decréscimo da massa reduz a carga inercial, possibilitando o aumento da velocidade usando os mesmos atuadores e o aumento da rigidez diminui as deflexões dos membros estruturais. Então estas características indicam que importantes

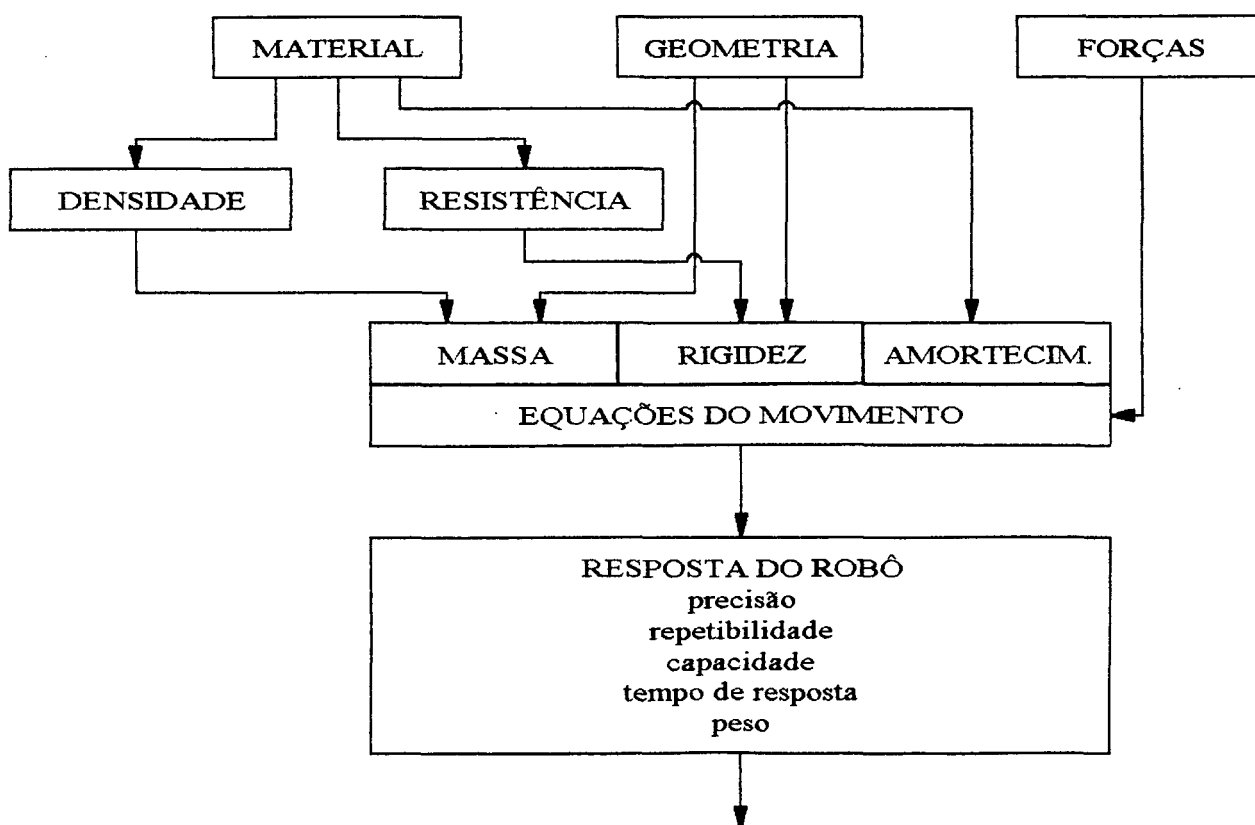


Fig. 1.2 - Etapa de análise dinâmica.

variáveis de projeto são as propriedades dos materiais e também a geometria dos componentes estruturais.

Portanto, para um bom projeto tanto mecânico quanto do sistema de controle de robôs, é de fundamental importância a modelagem dinâmica do mesmo, pois questões tais como a performance do manipulador, descrita em termos da precisão do efetuator, repetibilidade, capacidade de carga, controle, etc., são reguladas pelo conceito da dinâmica do manipulador.

Historicamente, a modelagem dinâmica de mecanismos tanto de cadeia aberta quanto fechada, tem sido baseada na consideração de que tanto as ligações quanto as juntas das cadeias cinemáticas são corpos rígidos. Para os robôs manipuladores que são cadeias cinemáticas abertas, várias formulações dinâmicas têm sido empregadas, utilizando a mesma consideração anteriormente citada.

Os métodos utilizados para a obtenção dos modelos matemáticos de mecanismos ativos podem ser classificados dentro de três grupos básicos [7]:

- modelos baseados nas equações de Lagrange;
- modelos baseados nas equações de Newton-Euler e nos principais teoremas da mecânica de sistemas;
- modelos baseados na "energia" de aceleração de Gibbs.

A formulação Lagrangeana, muito difundida, utiliza uma função energia escalar, envolvendo a energia cinética e potencial. Como a energia cinética é função da velocidade absoluta, a presença de várias ligações na cadeia cinemática requer o uso de transformações de coordenadas. Após a introdução das transformações, várias derivadas parciais com relação as coordenadas das juntas e suas taxas de variação nas equações

devem ser computadas, acarretando operações adicionais, que podem levar a problemas numéricos na implementação computacional [8].

A simplificação mais comum deste método, consiste em desprezar os termos devidos a força centrífuga e de Coriolis, resultando em menor esforço computacional [9] [10]. Contudo, esta é válida somente em casos onde as velocidades são baixas, pois, nas altas velocidades de movimento as forças de Coriolis e centrífuga são as maiores componentes na dinâmica de um manipulador [11].

O método possui a vantagem, de evitar considerações impróprias de forças internas, envolvidas no sistema. Além disso, constitui-se num procedimento claro para a obtenção das equações do movimento, possibilitando assim, uma boa interpretação do significado físico e das influências dos termos destas equações.

O método de Newton-Euler baseado em equações vetoriais, faz um balanço de todas as forças e momentos que atuam nas ligações, incluindo forças e momentos de acoplamento dinâmico das ligações adjacentes da cadeia cinemática. Os termos devidos às forças de inércia e momentos angulares são adicionados de acordo com o princípio de D'Alembert. As equações são obtidas recursivamente, relacionando-se as ligações adjacentes.

Apesar do método apresentar a vantagem de não necessitar de transformações de coordenadas, todas as forças e reações vinculares devem ser incluídas. As equações obtidas não se apresentam na forma fechada, sendo então necessária, uma separação entre as forças vinculares e os torques nas juntas, de modo a que as equações apresentem uma relação explícita entre as coordenadas generalizadas do sistema e os torques generalizados.

As equações de Appel também aplicadas na dinâmica de braços de robôs, são baseadas numa função "energia" de aceleração, ou função de Gibbs. Formulações baseadas nestas equações são obtidas numa forma tal, que a solução numérica direta requer consideravelmente menos operações do que as requeridas nos métodos de Lagrange e Newton-Euler [8]. Entretanto, não proporcionam uma clara identificação da influência dos termos de Coriolis, centrífugos e da gravidade.

Uma outra técnica utilizada na obtenção das equações dinâmicas de sistemas mecânicos, é o método desenvolvido por Thomas Kane [12]. Este método (também conhecido como forma de Lagrange do princípio de D'Alembert), é uma formulação vetorial baseada numa modificação das equações de Newton. Ao invés de fazer um balanço de todas as forças, utiliza o conceito de forças generalizadas, pelo qual, as forças de vínculo não entram na obtenção das equações do movimento. Conseqüentemente, tem-se menos incógnitas que no método de Newton-Euler.

No entanto, este método por ser complexo, é uma boa ferramenta apenas para usuários já experientes na sua utilização [13].

Outros métodos foram desenvolvidos para o estudo do comportamento dinâmico de braços de robôs [14] [15] [16], contudo, devido ao inerente acoplamento dinâmico destes sistemas altamente não lineares, nenhum destes métodos tem resultado em equações com uma forma fechada simples.

Entretanto, devido ao inevitável movimento oscilatório das ligações da cadeia cinemática, velocidades relativamente altas e pesadas cargas, a consideração da estrutura como sendo formada por corpos rígidos torna-se inadequada, pois

características importantes tais como precisão e repetibilidade deterioram-se com a deformação estrutural das juntas e das ligações da cadeia cinemática.

Por esta razão, para um projeto tanto mecânico quanto do sistema de controle de robôs, torna-se necessário que a modelagem dinâmica destes equipamentos, seja feita levando em consideração a flexibilidade dos membros estruturais.

Além disto, os manipuladores flexíveis quando comparados com manipuladores rígidos, apresentam uma série de vantagens, tais como, uma menor necessidade de material, resultando num menor peso, menor consumo de potência e serem mais facilmente manobráveis e transportáveis, ou seja, a substituição dos manipuladores contendo membros estruturais rígidos, por manipuladores flexíveis, resulta em consideráveis ganhos nos custos operacionais e de energia. Apesar disto, os manipuladores flexíveis não são populares a nível de indústria, devido as dificuldades de modelagem e controle [37].

Todas estas razões, tem contribuído para um crescente interesse a nível internacional, pela área de robôs manipuladores flexíveis.

A contribuição feita neste trabalho consiste no desenvolvimento de uma formulação, que permite a modelagem de sistemas robóticos contendo juntas rotacionais, onde a característica principal é a inclusão no modelo, dos efeitos devidos a existência de flexibilidade nas ligações e juntas. Outro aspecto do trabalho desenvolvido, refere-se às simulações implementadas, as quais possibilitam que sejam efetuados três tipos de análise: análise estática, análise dos autovalores e autovetores e análise transiente.

Os resultados obtidos com a metodologia proposta, fornecem um importante auxílio para a tarefa de projeto mecânico de manipuladores, principalmente através da observação clara do comportamento dinâmico do sistema mecânico.

No Capítulo 2, é apresentado um levantamento bibliográfico sobre manipuladores flexíveis, onde são abordadas e examinadas as diferentes formulações empregadas na obtenção das equações de movimento, juntamente com as principais técnicas utilizadas na modelagem das flexibilidades dos membros estruturais.

No Capítulo 3, com o objetivo de melhor compreensão e interpretação do problema dinâmico de manipuladores flexíveis, é desenvolvida uma maneira sistemática para a obtenção das equações de movimento, permitindo que sejam observados aspectos importantes quanto a modelagem e obtenção das equações destes sistemas.

O Capítulo 4, apresenta a fundamentação teórica da metodologia a ser adotada na modelagem e simulação de manipuladores flexíveis.

O Capítulo 5 descreve a estrutura geral de um programa, baseado na metodologia de modelagem proposta no capítulo anterior, e os métodos de solução empregados para as simulações, as quais serão mostradas detalhadamente no Capítulo 6.

O Capítulo 7 apresenta as conclusões e discussões a respeito do trabalho desenvolvido.

CAPÍTULO 2

REVISAO BIBLIOGRAFICA

2.1 - Introdução

Várias metodologias, para a determinação do movimento de cadeias de corpos flexíveis, vem sendo desenvolvidas baseadas nas formulações citadas no capítulo anterior. Estas metodologias normalmente utilizam conceitos dos métodos quase-estáticos, elementos finitos e análise modal.

Observa-se que, para conjuntos de equações dinâmicas de corpos rígidos, estes apresentam equivalência entre um e outro [17]. O que não ocorre para o caso de corpos flexíveis.

Isto deve-se ao fato de que um corpo flexível está associado a um número infinito de graus de liberdade. E qualquer formulação reduz um corpo flexível a um sistema com finitos graus de liberdade. Esta redução é feita por diferentes e não equivalentes caminhos, resultando numa não equivalência entre as várias formulações. As diferenças principais entre os métodos de análise dinâmica de sistemas de corpos interconectados por juntas, além da abordagem simbólica ou numérica estão no tipo de coordenadas usadas para determinar a posição e no método utilizado para obter as equações de movimento.

A modelagem de manipuladores flexíveis, como encontrada na literatura, pode ser feita através de dois procedimentos

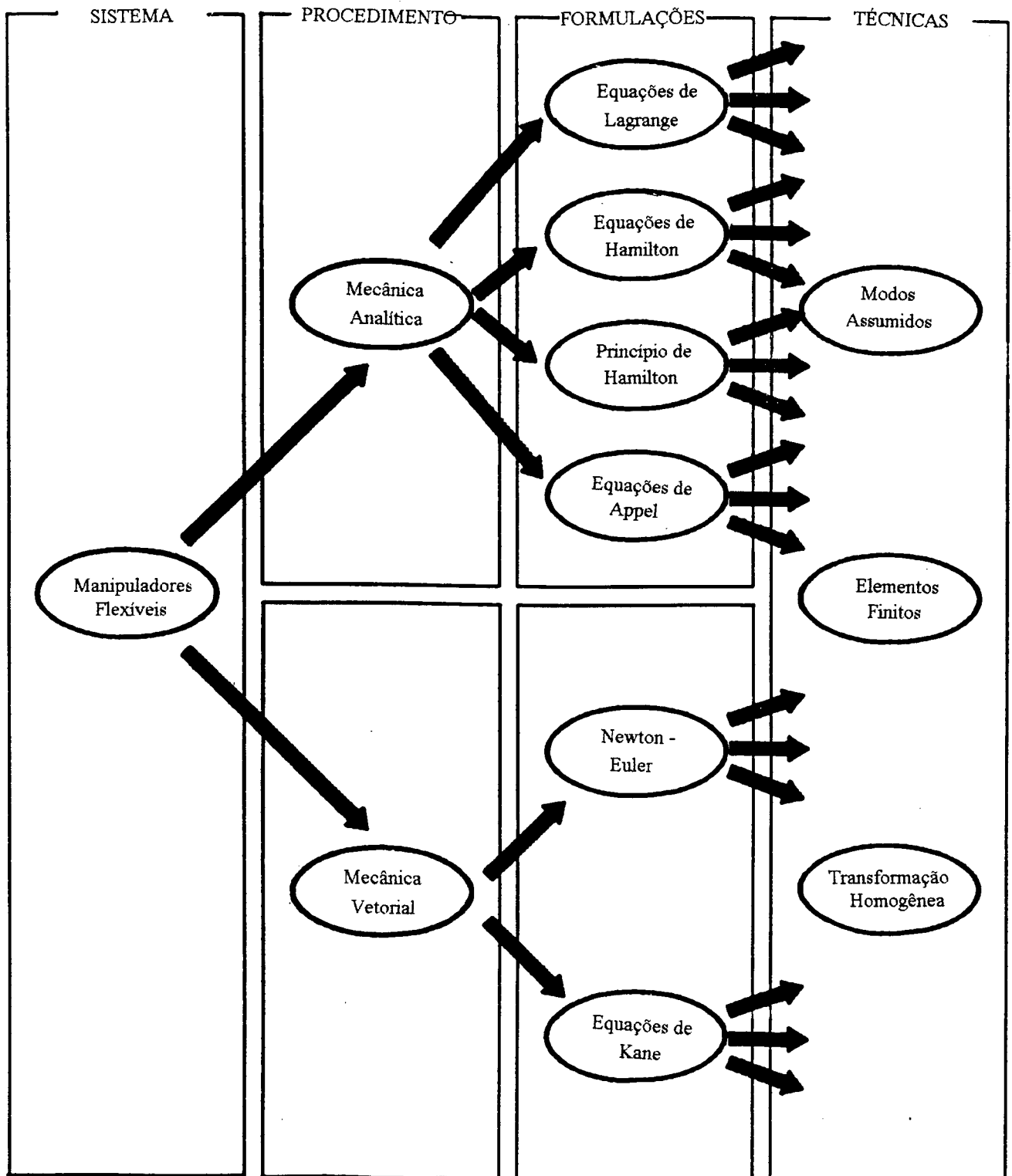


Fig. 2.1 - Esquema geral das possíveis formas de modelagem de manipuladores flexíveis.

distintos: através da Mecânica Analítica e da Mecânica Vetorial, conforme mostra a figura 2.1. A cada um destes procedimentos são associadas várias formulações, e comum a todas estas formulações as principais técnicas de modelagem da flexibilidade de sistemas contínuos.

A seguir serão apresentadas algumas destas formulações, juntamente com as técnicas de modelagem das flexibilidades.

2.2 - Formulações baseadas na Mecânica Analítica

Nestas formulações, o sistema é considerado como um todo e as equações do movimento são obtidas através de funções tais como energia potencial total e energia cinética, todas grandezas escalares. A mecânica analítica conduz a procedimentos gerais de formulação tais como equações de Lagrange, Princípio de Hamilton e equações de Hamilton.

A seguir serão apresentadas as principais técnicas de modelagem das pequenas deformações dentro do contexto da mecânica analítica.

2.2.1 - Equações de Lagrange com Modos Assumidos

Nesta abordagem, a solução para o movimento decorrente da flexibilidade de cada ligação i , considerando somente a deflexão, é expressa através de uma combinação linear de funções admissíveis $\phi_{ij}(x_i)$ que satisfazem as condições de contorno geométricas, multiplicadas por coordenadas generalizadas $q_{ij}(t)$, dependentes do tempo. O movimento flexível é expresso por:

$$w_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}(x_i) q_{ij}(t) \quad (2.1)$$

Na descrição cinemática de um sistema planar, utiliza-se um sistema inercial XY , e sistemas locais $x_i y_i$ com origem em cada junta i . Os eixos x_i 's são definidos como paralelos às ligações quando estas estão no seu estado indeformado, conforme mostra a figura 2.2.

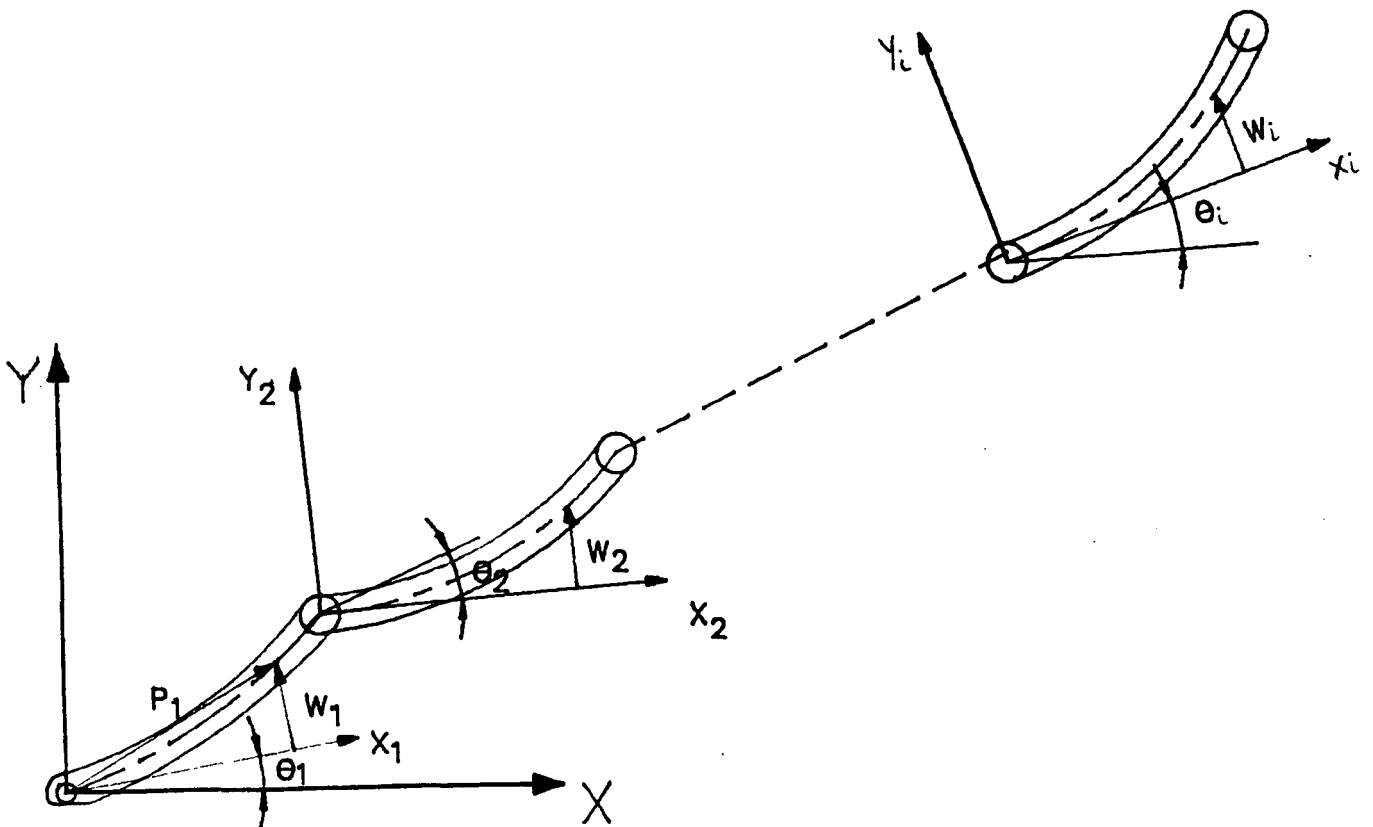


Fig. 2.2 - Sistemas de coordenadas.

O vetor posição de um ponto qualquer sobre a ligação 1 é

$$P_1 = T_1^0 r_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde T_1^0 é a matriz transformação que relaciona o sistema local 1 com o sistema inercial, e r_1 é o vetor posição do ponto relativo ao sistema local 1. O vetor posição de um ponto sobre a ligação 2 é expresso por

$$P_2 = P_1|_{x=11} + T_2^0 r_2 \quad (2.3)$$

onde $T_2^0 = T_1^0 T_2^1$ é a matriz que relaciona o sistema local 2 com o sistema inercial.

As expressões de energia cinética e potencial para a ligação i , podem ser, respectivamente, escritas como:

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{v_i} \rho \dot{P}_i \cdot \dot{P}_i \, dv_i \quad (2.4)$$

$$V_i = V_i^g + V_i^d = - \int_{v_i} g^T P_i \, dv_i + \frac{1}{2} \int_0^1 EI (w,_{xx})^2 dx_i \quad (2.5)$$

onde ρ é a densidade e V_i^g e V_i^d são, respectivamente, as parcelas devido as forças de corpo a gravidade e a energia de deformação da ligação, sendo esta modelada como uma viga, usando a teoria de viga de Euler-Bernoulli. E as energias cinética e potencial totais do sistema são:

$$T = \sum_{i=1}^m T_i \quad e \quad V = \sum_{i=1}^m V_i \quad (2.6)$$

Com as expressões (2.6), obtém-se o Lagrangiano total e, através das equações de Lagrange, obtém-se as equações de movimento do sistema, que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} M_{rr}(q) & M_{rf}(q) \\ M_{fr}(q) & M_{ff}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_r(q) \\ y_f(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_r(q, \dot{q}) - \tau_r \\ z_f(q, \dot{q}) - \tau_f \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde os q_r 's descrevem o movimento rígido das ligações, enquanto que os q_f 's são os graus de liberdade que descrevem o movimento devido a flexibilidade das ligações. As matrizes M_{rr} , M_{rf} , M_{fr} e

M_{ff} dependem somente dos valores de $q = (q_r, q_f)$. As funções $y_r(q)$ e $y_f(q)$ registram as contribuições do peso e do comportamento flexível. As funções $z_r(q, \dot{q})$ e $z_f(q, \dot{q})$ representam os termos não lineares, quadráticos em \dot{q} . E as forças generalizadas atuando sobre as ligações são expressas por τ_r e τ_f .

Book e outros [18], foi o primeiro trabalho a abordar o problema do controle de um sistema composto de uma cadeia aberta contendo duas ligações flexíveis, duas juntas rígidas e movimento plano. No modelo do sistema foram utilizadas massas concentradas nas extremidades de cada ligação, representando os atuadores e a carga de trabalho. As ligações foram modeladas como vigas, satisfazendo as hipóteses da teoria de viga de Euler-Bernoulli. As funções admissíveis foram tomadas como as que representam vigas na forma engastada-livre. Baseando-se na consideração de que as amplitudes dos altos modos das ligações flexíveis são pequenas, quando comparadas com os primeiros modos, a expressão (2.1) foi truncada em $n = 2$. As equações do movimento obtidas foram linearizadas e utilizadas na averiguação de três diferentes estratégias de controle.

Chalhob e Ulsoy [19], objetivando investigar as relações entre a flexibilidade estrutural do braço de um robô de coordenadas esféricas e um controlador linear para o movimento de corpo rígido, modelaram o movimento flexível da última ligação deste tipo de robô. Nesta modelagem, foram considerados movimentos flexíveis nos planos vertical e horizontal da ligação, onde foram utilizadas funções admissíveis representando vigas do tipo engastada-livre. Esta consideração, provoca uma aproximação adicional no modelo, uma vez que estas funções são definidas para vigas de comprimento constante, e na situação real o comprimento

da ligação varia com o tempo.

As equações do movimento obtidas formam um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem, altamente não lineares e acopladas, as quais foram utilizadas em simulações para verificar o desempenho do controlador. Os resultados destas simulações, mostraram que ocorrem instabilidades no sistema quando a frequência do controlador aproxima-se da frequência natural do manipulador, e também uma deterioração da precisão quando em operações em alta velocidade.

Benati e Morro [17] apresentaram uma metodologia para modelagem e obtenção das equações dinâmicas de cadeias de corpos flexíveis também utilizando a técnica dos modos assumidos. Cada corpo foi tratado como uma viga, e seguindo a teoria de Euler-Bernoulli, modelado de modo a ser descrito por três coordenadas, uma descrevendo o movimento da junta, e outras duas descrevendo a deflexão e inclinação da extremidade final da ligação.

Chang e Gannon em seu trabalho [35], também desenvolveram uma modelagem para manipuladores utilizando a técnica dos modos assumidos para tratar os pequenos movimentos devidos à flexibilidade das ligações. Estas, foram tratadas como vigas segundo a teoria de Euler-Bernoulli, cujo movimento devido à flexibilidade foi descrito, apenas, com os dois primeiros modos de vigas engastada-livre. Adicionalmente, considerou-se no modelo, a energia cinética devida ao movimento do rotor dos atuadores.

Uma validação experimental do modelo proposto foi efetuada, onde utilizou-se um manipulador contendo apenas uma ligação, sob diferentes condições de carregamento. Os resultados

obtidos, mostraram algumas diferenças entre os resultados teórico e experimental, as quais foram atribuídas a algumas hipóteses utilizadas no modelo, tais como a truncagem modal e a desconsideração das deformações axiais.

Como pode ser observado, através dos trabalhos descritos anteriormente, a técnica dos modos assumidos aplicada na modelagem de corpos flexíveis, utiliza uma descrição modal truncada do sistema e deformações das ligações devidas somente a deflexão. A truncagem modal, que tende a tornar o modelo mais rígido, e a descrição das deformações desconsiderando efeitos importantes tais como o cisalhamento e a flexibilidade das juntas, são fatores que afetam a precisão do modelo.

Para que a etapa de análise do projeto de um robô, seja adequada em termos de resultados, utilizando esta técnica, é necessário que na modelagem sejam incluídas as deformações nos planos transversais às ligações, deformações axiais, deformações devidas a torção, e um número adequado de modos. Contudo, há uma limitação quanto a inclusão destes efeitos, pois existe um compromisso entre precisão, complexidade e custo.

Entretanto, a principal dificuldade desta técnica encontra-se na escolha da forma e número dos modos, de forma a ter-se uma descrição precisa da deformação das ligações. O problema da identificação da forma dos modos, não foi resolvido satisfatoriamente pela literatura. Embora a hipótese utilizada de que as ligações comportam-se como vigas engastada-livre, não tem sua validade ainda confirmada [23], Hastings [32] mostrou que para uma viga flexível simples com uma carga concentrada na extremidade, modos que representam vigas engastada livre, constituem uma boa aproximação para o cálculo dos modos da

ligação, principalmente para baixas frequências. A modelagem de ligações com juntas prismáticas usando as mesmas funções admissíveis utilizadas em ligações com juntas rotacionais, é um procedimento inadequado, sendo a obtenção de funções para este tipo de ligação/junta, um problema ainda a ser solucionado.

Além da incerteza quanto aos modos e das dificuldades quanto a inclusão das deformações no espaço, a obtenção manual das equações dinâmicas é tediosa e propensa a erros, tornando-se uma tarefa proibitiva para sistemas que tenham quatro ou mais ligações flexíveis. Este problema pode ser contornado através da utilização de programas computacionais, que derivam as equações dinâmicas segundo o formalismo Lagrangiano, dos quais pode-se citar o REDUCE [33] e o MACSYMA [34] como exemplos.

2.2.2 - Equações de Hamilton com Modos Assumidos

Considerando um sistema planar conforme mostrado na figura 2.2, suas coordenadas generalizadas podem ser divididas em dois grupos, um grupo contendo os θ 's, representando as coordenadas das juntas, e outro contendo os w 's, que representam as deflexões das ligações. Desta forma, as equações de Hamilton do movimento podem ser escritas como [22]:

$$\begin{aligned}
 -\dot{\pi}_{\theta_j} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \theta_j} \right) \\
 -\dot{\pi}_{w_j} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial w_j} \right) \\
 \dot{\theta}_j &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \pi_{\theta_j}} \right) \\
 \dot{w}_j &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \pi_{w_j}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde π_{θ_j} e π_{w_j} são as densidades de momentum, dadas por:

$$\pi_{\theta_j} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial \theta_j} \right) \quad \text{e} \quad \pi_{w_j} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial w_j} \right) \quad (2.9)$$

sendo $\Omega_i = T_i - V_i$ definido como a densidade Lagrangiana da ligação i , e \mathcal{H}_i é a densidade Hamiltoniana associada com a i ésima ligação, definida por:

$$\mathcal{H}_i = \pi_{\theta_i} \dot{\theta}_i + \pi_{w_i} \dot{w}_i - \Omega_i \quad (2.10)$$

Utilizando a equação (2.1) para descrever o movimento flexível das ligações, tem-se então como coordenadas generalizadas para o modelo os θ 's e os q 's. Desta forma, as equações do movimento, quando forças externas são aplicadas, ficam:

$$\begin{aligned} -\dot{p}_{\theta_k} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \theta_k} - u_k \right) \\ -\dot{p}_{q_{ij}} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial q_{ij}} \right) && i=k=1, \dots, m \\ \dot{\theta}_k &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial p_{\theta_k}} \right) && j=1, \dots, n \\ \dot{q}_{ij} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial p_{ij}} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde p_{θ} e p_q são dados por

$$p_{\theta_k} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial \theta_k} \right) \quad \text{e} \quad p_{q_{ij}} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial q_{ij}} \right) \quad (2.12)$$

e o Hamiltoniano para cada ligação i é:

$$\mathcal{H}_i = p_{\theta_i} \dot{\theta}_i + \sum_{j=1}^n p_{q_{ij}} \dot{q}_{ij} - \Omega_i \quad (2.13)$$

Nicosia et al. [21] trataram do problema da modelagem e controle de robôs flexíveis, considerando o sistema como uma cadeia aberta contendo ligações flexíveis, e juntas rotacionais rígidas. A deformação ocorrida nas ligações foi considerada como somente devida à flexão, e modelada através da técnica dos modos assumidos, sendo o plano de flexão coincidente com o plano de

rotação. A expressão (2.1) foi truncada em $n = 4$, e as equações do movimento, que formam um conjunto de equações de primeira ordem, utilizadas na construção de uma lei de controle não-linear, que baseada no método da pseudo-linearização, mostrou-se efetiva na vizinhança dos pontos de operação.

O procedimento das equações de Hamilton apesar de fornecer equações do movimento de primeira ordem, o que torna mais simples a integração numérica para a obtenção da resposta, requer um número maior de cálculos na obtenção das equações, comparativamente com o procedimento via equações de Lagrange.

A utilização da técnica dos modos assumidos conjuntamente com as equações de Hamilton, apresenta os mesmos aspectos e implicações descritas no item anterior.

2.2.3 - Equações de Lagrange com Matrizes de Transformação 4x4

Nesta modelagem o movimento devido a flexibilidade de uma ligação i , é tratado como o deslocamento do sistema de coordenadas i (localizado na junta $i+1$, segundo a notação de Denavit-Hartenberg [27]), da posição P para P^* , conforme mostra a figura 2.3. O deslocamento é medido a partir da configuração indeformada, podendo causar ambos translação e rotação do sistema de coordenadas i .

Quando a ligação está indeformada, o mapeamento do sistema de coordenadas $i+1$ para o sistema i , pode ser feito através de uma matriz de transformação 4x4, T_{i+1}^i [27]. Quando a ligação se deforma, o mapeamento do sistema C_i^* para o sistema C_i pode ser feito através de uma matriz E_i , que para pequenos movimentos devidos a flexibilidade, pode ser representada pela

seguinte transformação diferencial [24]:

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_{iz} & \phi_{iy} & \epsilon_{ix} \\ \phi_{iz} & 1 & -\phi_{ix} & \epsilon_{iy} \\ -\phi_{iy} & \phi_{ix} & 1 & \epsilon_{iz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde os ϵ_i 's representam a translação relativa entre C_i^* e C_i , enquanto que os ϕ_i 's representam a rotação entre estes dois sistemas.

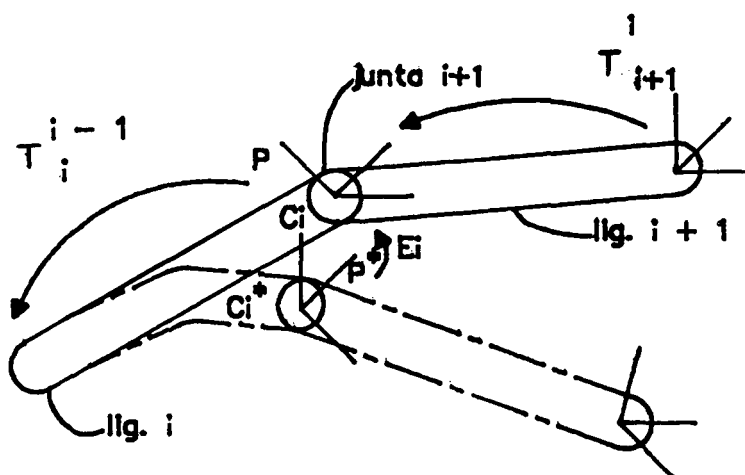


Fig. 2.3 - Geometria das ligações.

A transformação que mapeia um vetor descrito em relação ao sistema de coordenadas da i ésima ligação, em relação ao sistema inercial, levando em conta as transformações devidas a deformação, pode ser expressa como:

$$H_i^0 = E_0 T_1^0 E_1 T_2^1 \dots E_{i-1} T_i^{i-1} = H_{i-1}^0 E_{i-1} T_i^{i-1} = \tilde{H}_{i-1}^0 T_i^{i-1} \quad (2.15)$$

onde E_0 é uma matriz identidade. As matrizes T_i 's são funções dos parâmetros das juntas, e as matrizes E_i 's dependem das coordenadas utilizadas na representação de deformação das ligações. Então, um ponto qualquer da ligação i , cuja posição em

relação ao sistema de coordenadas da ligação é descrita por um vetor r_i , pode ser descrito em relação ao sistema inercial da seguinte forma:

$$r_i^0 = H_i^0 r_i \quad (2.16)$$

e sua velocidade como

$$v_i = \frac{d}{dt} r_i^0 = \frac{d}{dt} (H_i^0 r_i) = \left[\frac{d}{dt} (H_i^0) \right] r_i + H_i^0 \left[\frac{d}{dt} (r_i) \right] \quad (2.17)$$

Com isto, a energia cinética da ligação i pode ser considerada como

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{v_i} \rho \text{Tr}(v_i v_i^T) dv_i \quad (2.18)$$

onde Tr é o operador traço. As parcelas da energia potencial devidas ao campo gravitacional e à deformação da ligação, são respectivamente:

$$V_i^g = - \int_{v_i} \rho g^T r_i^0 dv_i \quad (2.19)$$

e

$$V_i^d = \frac{1}{2} e_i^T K_i e_i \quad (2.20)$$

onde $e_i = \begin{bmatrix} \epsilon_{ix} & \epsilon_{iy} & \epsilon_{iz} & \phi_{ix} & \phi_{iy} & \phi_{iz} \end{bmatrix}$ e K_i é a matriz de rigidez da ligação.

Judd e Falkenburg [25], examinaram o problema da modelagem cinemática e dinâmica de robôs contendo ligações flexíveis e juntas rígidas, e propuseram um modelo onde tanto a descrição cinemática quanto a descrição dinâmica das deformações foram feitas utilizando matrizes de transformação 4×4 . As coordenadas generalizadas utilizadas na modelagem, foram os ângulos das juntas θ_i 's e os componentes das matrizes de transformação E_i , ϵ_i 's e ϕ_i 's. A principal simplificação introduzida no procedimento foi quanto ao vetor posição local r_i ,

que assumiu-se como constante no tempo, considerando nula a segunda parcela da velocidade (2.17), deconsiderando assim a energia cinética devida a deformação das ligações. Isto torna o modelo impreciso, exceto para casos especiais onde as deformações decorrentes da flexibilidade são muito pequenas.

Foi apresentado um exemplo onde um manipulador planar, contendo duas ligações tratadas como vigas segundo a teoria de Euler-Bernouli, foi modelado, e do qual foram somente obtidas as equações do movimento na forma linearizada, desconsiderando os termos devidos aos efeitos de Coriolis e centrífugos.

Book [26], também utilizando matrizes de transformação 4x4 para representar o movimento das juntas e o devido a deflexão das ligações, apresentou uma modelagem dinâmica para manipuladores que contenham somente juntas rotacionais rígidas. Na representação dos componentes da matriz transformação que expressa a deflexão de uma ligação (equação (2.14)), foi utilizada a técnica dos modos assumidos, sendo estes componentes escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ix} &= \sum_{j=1}^n x_{ij} q_{ij} & \phi_{ix} &= \sum_{j=1}^n \phi_{ixj} q_{ij} \\
 \epsilon_{iy} &= \sum_{j=1}^n y_{ij} q_{ij} & \phi_{iy} &= \sum_{j=1}^n \phi_{iyj} q_{ij} \\
 \epsilon_{iz} &= \sum_{j=1}^n z_{ij} q_{ij} & \phi_{iz} &= \sum_{j=1}^n \phi_{izj} q_{ij}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde os x_{ij} , y_{ij} e z_{ij} são os componentes do modo j da ligação i , ϕ_{ixj} , ϕ_{iyj} e ϕ_{izj} são os ângulos em torno dos eixos x_i , y_i e z_i respectivamente, para o modo j . A variável q_{ij} representa a amplitude do modo j (variável no tempo) da ligação i .

E da mesma forma, o vetor posição local r_i foi

representado com a técnica dos modos assumidos:

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} q_{ij} \quad (2.22)$$

onde x , y e z são as coordenadas de um ponto da ligação com relação ao sistema de coordenadas da ligação i . Com isto, tem-se como coordenadas generalizadas os ângulos das juntas e os q_{ij} 's.

Outra característica da modelagem, é o cálculo das matrizes $\dot{\mathbf{H}}_i^0$ e $\ddot{\mathbf{H}}_i^0$, que pode ser feito de maneira recursiva, através da matriz $\hat{\mathbf{H}}_{i-1}^0$ e suas derivadas, similarmente ao esquema recursivo proposto por Hollerbach [28] para manipuladores rígidos.

Nenhum estudo quanto a precisão da modelagem foi efetuado. Entretanto, uma comparação quanto a quantidade de cálculos necessária para a solução do problema dinâmico inverso, mostrou que para um manipulador com seis juntas, considerando somente duas ligações flexíveis cada qual com três modos, a modelagem proposta por Book requer aproximadamente 2,7 vezes mais cálculos de multiplicação que a modelagem proposta por Walker e Orin [29] para manipuladores rígidos, utilizando igual número de graus de liberdade.

King e outros [76], utilizando as equações de Lagrange e a técnica dos modos assumidos, propuseram um modelo que utiliza para a descrição cinemática, velocidades angulares ao invés de matrizes de transformações de coordenadas. Esta descrição tornou o cálculo do problema dinâmico inverso sensivelmente mais rápido, uma vez que para um manipulador contendo seis ligações com três modos cada, este modelo requer cerca de 1/3 de multiplicações do

que o modelo proposto por Book [26].

Mais recentemente Yuan e outros [30], seguindo a mesma linha proposta por Book [26], propôs uma estratégia de controle descentralizada para manipuladores, onde na modelagem dinâmica foi considerada adicionalmente, a flexibilidade das juntas. A elasticidade da i ésima junta, foi modelada como uma mola torsional linear equivalente, com constante K_i . Esta consideração, provocou o surgimento de mais uma parcela na energia potencial total, a qual é escrita como:

$$v_i^J = \frac{1}{2} K_i \bar{q}_i^2 \quad (2.23)$$

onde \bar{q}_i é a coordenada da junta, medida da posição indeformada até a posição deformada.

A técnica de modelagem através das matrizes de transformação 4x4, é uma ferramenta eficiente tanto para a descrição da configuração espacial, quanto para a descrição cinemática e dinâmica de manipuladores, pois é facilmente associada com a notação de Denavit-Hartenberg. Entretanto, como pode ser observado, para obter-se resultados mais representativos, quanto às translações e rotações decorrentes da deformação das ligações, estas são tratadas através da técnica dos modos assumidos, cujas implicações foram descritas anteriormente.

Outro aspecto importante, não somente quanto aos modelos abordados neste item, mas também de maneira geral, é que a não consideração da inércia dos atuadores na modelagem, torna os modelos inadequados para a representação de manipuladores que possuam atuadores do tipo motor elétrico. Isto deve-se ao fato de que, dependendo da relação de transmissão utilizada, o efeito da

inércia de um motor deste tipo, pode ser semelhante ao das ligações e cargas de trabalho [31].

2.2.4 - Equações de Lagrange com Elementos Finitos

Para a modelagem de manipuladores flexíveis utilizando a técnica de elementos finitos, cada ligação é tratada como um corpo composto por um número finito de elementos, onde para cada elemento é calculada a energia cinética e potencial, em termos de coordenadas generalizadas apropriadas e suas velocidades. Estas energias são então combinadas, resultando nas energias cinética e potencial totais do sistema, com as quais é montado o Lagrangiano total do sistema. As equações do movimento são então obtidas através das equações de Lagrange.

Sunada e Dubowsky [45] e [46], apresentaram uma metodologia para a análise dinâmica de manipuladores flexíveis, contendo ligações de forma complexa, onde são utilizados um programa de análise estrutural via elementos finitos já existente, matrizes de transformação de Denavit-Hartenberg e uma técnica de redução de coordenadas, para a obtenção das equações dinâmicas do sistema. Esta metodologia é baseada no método da Síntese Modal dos Componentes (CMS), proposto por Hurty [48], pelo qual as propriedades dinâmicas de um sistema são obtidas através das propriedades individuais dos componentes que formam o sistema. A metodologia fornece tanto a resposta no domínio tempo, quanto no domínio frequência.

Para cada ligação i do sistema, foi construído um modelo de elementos finitos utilizando o programa NASTRAN. Com os vetores posição local de cada nó, obtidas as equações dinâmicas

de cada ligação, equações estas lineares que são escritas na seguinte forma matricial:

$$m_i \ddot{p}_i + g_i \dot{p}_i + k_i p_i = f_i \quad (2.24)$$

onde p_i são as coordenadas nodais da ligação i , e as matrizes m_i , g_i e k_i que descrevem as propriedades da ligação, são invariantes no tempo.

Devido a expressão (2.24), geralmente, resultar num conjunto muito grande de equações, uma vez que é possível ter-se até seis equações para cada nó, foi utilizado um processo de redução de coordenadas conhecido como Método de Redução via Síntese Modal dos Componentes [48],[49],[50] e [52].

Neste método, as coordenadas p_i são separadas em um pequeno conjunto de coordenadas p_i^I , que fazem a conexão com as outras ligações (chamadas de coordenadas de interface), e num outro conjunto muito maior de coordenadas p_i^L , que não são conectadas (chamadas de coordenadas livres), e que descrevem os graus de liberdade internos da ligação. A redução ocorre com estas coordenadas livres, que são substituídas por um conjunto muito menor de coordenadas modais η_i , obtidas a partir de um conjunto truncado de modos ϕ_i . Esta redução é expressa através da seguinte transformação linear:

$$p_i = \begin{bmatrix} p_i^I \\ \vdots \\ p_i^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ \phi_c & \vdots & \phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i^I \\ \vdots \\ \eta_i \end{bmatrix} = A_i a_i \quad (2.25)$$

onde ϕ_c é a matriz dos "modos de restrição", definida em [52] como sendo uma resposta estática da estrutura resultante de deslocamentos constantes impostos, sendo dada por $-k_{LL}^{-1}k_{LI}$ onde k_{LL} e k_{LI} são obtidas pelo particionamento da matriz de rigidez

k_i .

A matriz modal truncada ϕ_i é composta de um número limitado de autovetores, obtidos da solução do problema de autovalores considerando as coordenadas de interface fixas

$$m_{LL} \ddot{p}_i^L + k_{LL} p_i^L = 0 \quad (2.26)$$

onde a seleção do número de autovalores utilizados é feita com base num critério de frequência, isto é, são selecionados os primeiros autovalores.

A transformação definida em (2.25) aplicada na equação (2.24), produz um conjunto menor de equações, escritas como:

$$M_i \ddot{a}_i + G_i \dot{a}_i + K_i a_i = f_i^a \quad (2.27)$$

onde as matrizes M_i , G_i e K_i , são obtidas pré e pós multiplicando as matrizes m_i , g_i e k_i por A_i^T e A_i respectivamente. O vetor f_i^a é obtido pela pré-multiplicação de f_i por A_i^T , e contém as forças de vínculo entre as juntas, que são desconhecidas. Após a montagem de todas as equações reduzidas das ligações, as forças de vínculo são eliminadas, e as coordenadas a_i das ligações são transformadas para as coordenadas do sistema q , para as quais a compatibilidade de deslocamentos e rotações entre as juntas são mantidas. A relação entre as coordenadas do sistema e as coordenadas reduzidas das ligações são obtidas da geometria do manipulador, sendo função dos ângulos das juntas. Estas relações são escritas da seguinte forma:

$$a_i = B_i(\theta_j) q = B_i q \quad (2.28)$$

onde B_i é chamada de matriz de compatibilidade e é função dos ângulos das juntas e do tempo. Substituindo a primeira e segunda derivadas, com relação ao tempo, de (2.28), em (2.27), e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, obtém-se o seguinte conjunto

de equações:

$$M \ddot{q} + G \dot{q} + K q = Q \quad (2.29)$$

onde

$$M = \sum_{i=1}^m B_i^T M_i B_i \quad (2.30)$$

$$G = \sum_{i=1}^m B_i^T G_i B_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m 2B_i^T M_i B_{ij} \dot{\theta}_j + G_d \quad (2.31)$$

$$K = \sum_{i=1}^m B_i^T K_i B_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_i^T G_i B_{ij} \dot{\theta}_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m B_i^T M_i (B_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + B_{ij} \ddot{\theta}_j) \quad (2.32)$$

$$Q = \sum_{i=1}^m B_i^T f_i^a \quad (2.33)$$

$$B_{ij} = \frac{\partial B_i}{\partial \theta_j}, \quad B_{ijk} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial \theta_k} \quad (2.34)$$

m = número de ligações

As equações (2.29) descrevem o comportamento dinâmico de um manipulador, levando em conta as interações entre os grandes movimentos das juntas e as vibrações do sistema. As influências da gravidade e torques entram na formulação através das forças generalizadas Q .

A resposta no domínio tempo para uma dada trajetória especificada, na forma de um vetor q , função do tempo, foi obtida utilizando o conhecido algoritmo de integração numérica Newmark-Beta, e as deflexões estáticas obtidas da solução da equação (2.29), desprezando-se os dois primeiros termos. As frequências naturais e os modos de vibração para uma dada posição estacionária, foram obtidas utilizando-se dos métodos de Householder e QR.

A metodologia desenvolvida foi aplicada a um manipulador industrial do tipo Cincinnati Milacron T3R3, um robô

articulado de seis graus de liberdade, amplamente comercializado. Para verificar a ocorrência de perda de precisão dinâmica no modelo, devida a redução de coordenadas, comparou-se um modelo gerado pela metodologia anteriormente descrita, para uma dada posição estacionária (posição em que o manipulador está parado), com um modelo gerado pelo programa NASTRAN. Segundo os autores, os resultados mostraram uma boa correlação entre os dois modelos, sendo que para uma dada posição, todos os modos abaixo de 100 Hz, apresentaram uma diferença na faixa de 5%, confirmando assim a precisão do método. Resultados obtidos para outras posições estacionárias mostraram também uma boa correlação. Observou-se também, que a margem de ganho e conseqüentemente a estabilidade do sistema de controle, foi substancialmente mais baixo do que o predito numa análise considerando ligações rígidas, mostrando assim, a importância da consideração das flexibilidades das ligações no projeto destes equipamentos.

Os efeitos decorrentes da flexibilidade das ligações, para um dado movimento relativamente longo e com alta velocidade, foram estudados em termos dos erros de posição de um ponto sobre o efetuador. Os resultados mostraram grandes transientes tanto de partida quanto de parada, e também um maior tempo de estabilização para as posições desejadas, comparativamente com o manipulador considerado como sendo rígido.

Apesar de não levar em conta os efeitos decorrentes da flexibilidade das juntas e a inércia dos atuadores, esta metodologia é bastante adequada para a análise de projetos de manipuladores. Pois, além da facilidade de modelagem das ligações com geometria complexa, utilizando diferentes tipos de elementos fornecidos pelo programa de elementos finitos, tarefa esta

possível de ser executada também por outros programas de elementos finitos disponíveis além do NASTRAN, apresenta a vantagem de ter um reduzido tempo de computação para a obtenção das respostas, devido ao reduzido número de equações, sem perda significativa da precisão dinâmica. Adicionalmente, obtém-se com facilidade outras informações importantes de projeto, tais como: tensões nas ligações e forças sobre mancais.

Recentemente, De Smet e outros [47], também baseados no método da síntese modal de componentes, desenvolveram uma metodologia para o cálculo de frequências naturais e modos de vibração para manipuladores em diferentes posições fixas. Os modelos de elementos finitos para cada ligação i , foram obtidos através do programa SYSTUS [51], e transformados três vezes para formar as equações do sistema inteiro. A primeira transformação foi uma redução de coordenadas através da técnica de CMS, dada por $p_i = A_i a_i$ e idêntica a utilizada por Sunada e Dubowsky [45] e [46]. As coordenadas reduzidas a_i , representadas em relação aos sistemas locais de cada ligação, são transformadas em coordenadas q_i relativas ao sistema global, utilizando uma transformação baseada na notação de Denavit-Hartenberg, dada por $a_i = T_i^0 q_i$. Por último, as coordenadas q_i são relacionadas com as coordenadas do sistema q por intermédio de matrizes de compatibilidade B_i , cujos elementos são zeros e unidades. Estas três transformações juntas são representadas pela matriz C_i :

$$p_i = C_i q = A_i T_i^0 B_i q \quad (2.36)$$

como a estrutura é analisada em uma posição específica, C_i é independente do tempo, portanto as acelerações do sistema são dadas por $\ddot{p}_i = C_i \ddot{q}^o$.

A flexibilidade das juntas também é levada em conta na

modelagem, através da definição de um elemento de dois nós coincidentes, onde um dos nós é fixo rigidamente na primeira ligação de uma junta, e o outro nó fixo na segunda ligação. Entre estes dois nós e ao longo de cada grau de liberdade, é definida uma mola. A matriz de rigidez deste elemento contém somente a rigidez das molas, e a matriz massa é nula.

Os resultados dos testes realizados, mostraram que para a determinação da matriz modal truncada ϕ_i , utilizada no processo de redução de coordenadas, a consideração de modos com as interfaces fixas fornece resultados mais precisos do que modos com interfaces do tipo fixa-livre ou livre-livre, para as ligações modeladas com elementos de viga. A influência do número de modos selecionados foi mínima, e como esperado, para diferentes posições estacionárias do manipulador dentro de seu espaço de trabalho, diferentes valores de frequências de ressonância foram encontradas.

Tal como na análise feita por Sunada e Dubowsky [46] e [47], esta metodologia não leva em conta os efeitos giroscópicos, e como para o caso de manipuladores nenhum estudo foi feito para comprovar se estes efeitos podem, ou em que circunstâncias serem desconsiderados, a representatividade destas análises de autovalores e autovetores é limitada.

Usoro e outros [36], apresentaram uma metodologia para a modelagem dinâmica de manipuladores contendo ligações flexíveis e juntas rotacionais rígidas, na qual as ligações foram modeladas através de elementos finitos de viga de igual comprimento, baseados na teoria de Euler-Bernoulli. O vetor posição de um ponto num volume infinitesimal sobre um elemento j de uma ligação i , é inicialmente definido em relação ao sistema local da

ligação e expresso em função das coordenadas nodais. Este vetor é transformado em um vetor definido em relação ao sistema inercial (sistema global) através de uma transformação de coordenadas utilizando matrizes de rotação 3×3 , funções dos ângulos das juntas. Com isto, o vetor posição no sistema global é então expresso em termos das coordenadas das juntas e coordenadas nodais.

Esta representação, acarreta um custo computacional maior a obtenção das matrizes massa dos elementos, uma vez que a energia cinética é expressa em termos das velocidades das juntas e das velocidades nodais.

Uma alternativa para eliminar as dificuldades decorrentes da obtenção das matrizes de massa, foi proposta por Pota [37], que utilizou as matrizes de massa de elementos baseados na teoria de viga de Euler-Bernoulli fornecidos pela literatura [53], obtendo as expressões de energia cinética e potencial em termos das coordenadas locais. Aplicando as condições de contorno e utilizando processos de condensação estática e de massa, as energias cinética e potencial foram reescritas em termos de novas coordenadas que são as posições de cada nó, com relação ao sistema de coordenadas local de cada ligação. A representação das energias das ligações com relação ao sistema inercial, foi feita transformando-se os vetores posição dos nós, utilizando matrizes de rotação 3×3 , introduzindo assim a influência dos grandes deslocamentos provenientes dos movimentos das juntas.

Shabana e Wehage [39], desenvolveram uma formulação para a modelagem dinâmica de sistemas constituídos de corpos flexíveis interconectados por juntas rotacionais rígidas. Nesta

formulação foram utilizadas como coordenadas generalizadas, além das coordenadas dos nós e das juntas, as coordenadas de posição das origens dos sistemas de coordenadas locais de cada ligação, com relação ao sistema inercial. Esta representação tem por objetivo tornar mais claros os efeitos de translação, rotação e de flexibilidade de cada corpo da cadeia cinemática.

Baseados nesta formulação, vários outros trabalhos foram publicados. Entre eles, o de Shabana [40], que analisou diferentes técnicas de modelagem da matriz massa, associadas com o problema de corpos interconectados e flexíveis sofrendo grandes rotações; Khulief e Shabana em [41] e [42], que propuseram métodos para a análise dinâmica de sistemas compostos de corpos rígidos e flexíveis com movimento intermitente, e para prever o comportamento dinâmico de sistemas com diferentes tipos de variação na estrutura cinemática, respectivamente; Shabana [43] que utilizou parâmetros modais de componentes, obtidos experimentalmente, para simular e prever o comportamento dinâmico de sistemas, e Bakr e Shabana [44], que utilizando elementos finitos baseados na teoria de viga de Timoshenko, mostraram que são significativos os efeitos produzidos pela inércia rotatória e cisalhamento, na resposta de sistemas cujos corpos sofrem grandes rotações e existe acoplamento entre os grandes deslocamentos dos corpos e suas pequenas deformações decorrentes da flexibilidade.

Entretanto, aspectos como a definição da configuração dos elementos finitos, que requer o uso de quatro conjuntos diferentes de sistemas de coordenadas, e como algumas das variáveis utilizadas para representar a configuração do sistema (tais como as que fornecem a posição e orientação dos sistemas

locais de cada corpo), não são independentes, mas relacionadas através de equações de vínculo que necessitam ser satisfeitas em todos os tempos, a solução numérica do problema torna-se complicada e computacionalmente dispendiosa. Ou seja, as m coordenadas utilizadas não são todas independentes, tendo-se assim um sistema com n graus de liberdade, onde $m > n$. As equações de vínculo formam um conjunto de $m - n$ equações, e a combinação das equações de movimento com as equações de vínculo formam um conjunto de $2m - n$ equações diferenciais e algébricas, cuja solução não é tarefa simples.

2.2.5 - Princípio de Hamilton com Elementos Finitos

O Princípio de Hamilton é um princípio integral e não diferencial, servindo tanto para sistemas conservativos como para sistemas não conservativos. Este princípio pode ser escrito da seguinte forma [53]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^r Q_k \delta q_k dt = 0 \quad (2.37)$$

onde T e V são as energias cinética e potencial, respectivamente, Q_k representa as forças não conservativas, não derivadas de funções potencial, e δq_k são os correspondentes deslocamentos virtuais generalizados. No caso de não existirem as forças Q_k , a equação (2.37) é reescrita da seguinte forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (2.38)$$

onde L é o Lagrangiano. Este princípio além de fornecer as equações do movimento, fornece as condições de contorno do problema.

Bayo [56], utilizando elementos finitos baseados na

teoria de viga de Euler-Bernoulli, apresentou um método para a modelagem dinâmica de robôs contendo apenas uma ligação com junta rígida. O método utiliza como coordenadas generalizadas as coordenadas nodais e a coordenada de junta, e permite que seja calculado o torque necessário a ser aplicado na junta, para que a extremidade livre produza um movimento desejado. As equações obtidas para um robô deste tipo, foram solucionadas no domínio frequência, e os resultados obtidos mostraram que para este tipo de robô, os torques necessários para um dado movimento são menores que os requeridos para um robô rígido de mesmo material e peso, sem a ocorrência de sobre passagens. Observou-se também, a ocorrência de um tempo de retardo entre o movimento do atuador e a resposta do efetuator.

Bayo e Serna [54], utilizando o conceito de funções penalidade aplicadas a problemas de minimização sujeitos a restrições, apresentaram uma nova metodologia para a análise dinâmica de mecanismos de cadeia aberta e fechada, contendo juntas rotacionais rígidas, através da aplicação do Princípio de Hamilton e discretização pela técnica de elementos finitos.

As expressões de energia cinética e potencial, são obtidas para cada componente do sistema, como função das variáveis que descrevem o movimento de corpo rígido e as deformações elásticas. Neste estágio, o campo de deslocamento elástico é discretizado através da técnica de elementos finitos. Mesmo utilizando um conjunto de coordenadas que não são independentes (o mesmo tipo de coordenadas utilizado por Shabana e Wehage [39]), as condições de vínculo não aparecem junto com as equações de movimento, na forma de equações algébricas, mas aparecem inseridas nas equações de movimento por meio da

formulação penalidade. Isto ocorre sem provocar um aumento do número de variáveis, como acontece no caso do emprego dos multiplicadores de Lagrange. Em consequência disto, a resposta dinâmica do sistema é obtida através da solução de um conjunto de m equações diferenciais ordinárias, ao invés de um conjunto de $2m-n$ equações diferenciais e algébricas.

As condições de vínculo são penalizadas por um grande fator, e inseridas na expressão do Princípio de Hamilton, de modo que a primeira variação do funcional satisfaz as condições de vínculo. Ou seja, as equações resultantes satisfazem intrinsecamente as condições de vínculo. Estas condições penalizadas podem ser expressas através de três diferentes formas de energias fictícias: potencial, dissipativa e cinética, que adicionadas ao Princípio de Hamilton dão origem a três diferentes métodos de penalidade: de rigidez, de amortecimento e inercial.

Dentre estes métodos, o método de penalidade inercial destaca-se não somente pela possibilidade de ser, sem dificuldades, formulado com vínculos holonômicos e não-holonômicos, mas também por possibilitar boa convergência e evitar problemas numéricos, sem a necessidade de grandes valores de penalidade. Entretanto, esta última característica do método inercial é conseguida a custa de um esforço computacional maior.

Serna e Bayo [55], utilizando uma formulação constituída da combinação dos três métodos de penalidade anteriormente descritos, apresentaram um procedimento para a obtenção das equações de movimento para robôs planares com juntas rotacionais rígidas, cujas ligações são discretizadas por elementos de viga baseados na teoria de Timoshenko. Este método é

adequado quanto a integração numérica das equações, obtidas via método de penalidade inercial, mas apresenta problemas de estabilidade numérica, devido ao tamanho do passo de tempo utilizado. Os resultados apresentados mostraram os deslocamentos de um ponto localizado no efetuador, e as configurações deformadas da cadeia cinemática, para torques alternados aplicados nas juntas.

Como pode ser observado até o presente momento, todos os estudos envolvendo a modelagem dinâmica de sistemas de corpos flexíveis interconectados por juntas, utilizaram a hipótese de deformações infinitesimais para tratar a flexibilidade dos corpos que compõem a cadeia cinemática. Esta hipótese, juntamente com o uso de sistemas de coordenadas locais, que seguem o movimento de corpo rígido de cada componente, conduz a uma expressão simples para a energia potencial, enquanto que a expressão da energia cinética apresenta uma forma mais complicada, devido ao acoplamento entre as velocidades. Como decorrência disto, as equações de movimento resultantes apresentam termos envolvendo derivadas no tempo, altamente não-lineares e acoplados, o que sob o ponto de vista computacional, torna a integração destas equações uma tarefa difícil.

Baseados numa filosofia oposta a anteriormente citada, Simo e Vu-Quoc [57] e [58], propuseram uma metodologia para a modelagem dinâmica de vigas flexíveis, sujeitas a grandes deslocamentos. As principais características desta metodologia, são o uso de teorias de deformações finitas para vigas no espaço, e a representação do vetor posição de um ponto sobre uma ligação qualquer, ser expressa diretamente em relação ao sistema inercial, sem a utilização de sistemas de coordenadas locais.

Estas características tornam a parte inercial das equações, relacionada com termos envolvendo derivadas no tempo, linear e desacoplada, sendo a não linearidade do problema transferida para a parte de rigidez das equações de movimento. Com isto, as equações do movimento apresentam uma estrutura mais simples, a qual corresponde a um sistema de equações na forma padrão da dinâmica estrutural não-linear, onde a matriz de inércia não é variante com a configuração.

A metodologia foi empregada na modelagem de robôs com uma e duas ligações, onde foi utilizado o Método de Newmark, com parâmetros $\delta = 0,5$ e $\alpha = 0,25$ [59], para a integração numérica das equações de movimento. Os resultados apresentados, mostraram as configurações deformadas ao longo do tempo, para dadas trajetórias dos sistemas modelados.

Apesar da metodologia fornecer equações de movimento, cuja estrutura torna a tarefa de integração numérica mais simples, esta é restrita somente para sistemas cujos corpos possam ser modelados satisfatoriamente com elementos finitos de viga. Além disto, nenhuma menção comparativa quanto a precisão dos resultados fornecidos, frente aos resultados obtidos pelas metodologias tradicionalmente utilizadas, foi apresentada, e nenhuma comprovação experimental da modelagem foi efetuada.

Outro aspecto relacionado à metodologia aqui comentada, é que os efeitos do campo gravitacional, que são dependentes da configuração do sistema não foram levados em conta, devendo os mesmos serem implementados afim de que a modelagem torne-se mais representativa.

Outros trabalhos, utilizando o princípio de Hamilton, não associados com a técnica de elementos finitos, são

encontrados na literatura.

Low [72], [73] e [74], apresentou um procedimento para a modelagem de manipuladores contendo ligações rígidas e flexíveis, e juntas rígidas, onde as ligações foram tratadas como vigas, segundo a teoria de Euler-Bernoulli. As equações do movimento foram representadas em forma simbólica, semelhante a utilizada para manipuladores rígidos, e em termos das coordenadas que representam os movimentos de corpo rígido e das que representam o campo de deslocamentos, devidos a flexibilidade das ligações.

Everett [13], utilizando uma descrição cinemática baseada em técnicas vetoriais aplicadas a problemas variacionais (ver referência [75]), apresentou um método para a modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis com juntas rígidas. Nenhum resultado ou simulação foi apresentada, mas pode-se verificar que uma característica importante do procedimento é a de não ser necessária a utilização de matrizes de transformação de coordenadas, o que torna o tempo de computação envolvido menor.

2.2.6 - Equações de Appel

Uma formulação alternativa, dentro da Mecânica Analítica, para a obtenção das equações de movimento de manipuladores, é a formulação baseada nas equações de Appel. Esta formulação é baseada na função energia de aceleração de Gibbs, que para um sistema mecânico com n graus de liberdade num sistema de coordenadas cartesiano é definido como:

$$G = \sum_v G = \sum_v \frac{1}{2} m_v (\ddot{x}_v^2 + \ddot{y}_v^2 + \ddot{z}_v^2) \quad (2.39)$$

onde \sum_v é a somatória de todos os elementos do sistema. A expressão anterior pode ser escrita em função das coordenadas generalizadas $q = (q_1, \dots, q_n)^T$, da seguinte forma:

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_i \ddot{q}_j + \sum_{i=1}^n b_i \ddot{q}_i + c \quad (2.40)$$

As equações de Appel são escritas como:

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.41)$$

onde Q_i representa a força generalizada associada com a coordenada q_i . A obtenção das equações de Appel a partir do princípio dos trabalhos virtuais, é apresentada no Apêndice A.

As equações diferenciais produzidas apresentam-se na forma fechada, e podem ser escritas na seguinte forma matricial

$$W \ddot{q} = P + U \quad (2.42)$$

onde W é a matriz inercial do sistema, cujos elementos dependem de q , a matriz U depende de q e \dot{q} , e P é o vetor das forças e torques que atuam nas coordenadas generalizadas.

Como a dependência de W e U das variáveis de estado q e \dot{q} é extremamente complexa, W e U devem ser calculados numericamente para diferentes instantes de tempo. Com isto, para conhecidas acelerações generalizadas, as forças generalizadas podem ser obtidas numericamente, e vice-versa.

Os trabalhos encontrados na literatura, que utilizam as equações de Appel, são restritos a modelagem de manipuladores com a hipótese de que as ligações e juntas são corpos rígidos. Estes trabalhos são descritos a seguir.

Popov e outros [60], foram os primeiros a utilizar as equações de Appel para a modelagem dinâmica e projeto do controle

de manipuladores. Popov utilizou a função

$$F(\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n) = G - \sum_{i=1}^n Q_i \ddot{q}_i \quad (2.43)$$

e escrevendo a equação (2.41) como

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.44)$$

calculou numericamente as acelerações $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n$ via minimização da função $F(\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n)$. Esta sistemática é adequada para o cálculo das acelerações, mas inadequada quando as acelerações são conhecidas e é necessário o cálculo dos torques.

Potkonjak e Vukobratovic [61], compararam a eficiência de algoritmos computacionais para a formação automática das equações dinâmicas de mecanismos de cadeia aberta, baseados nas formulações de Lagrange, Newton-Euler e Appel. Os resultados mostraram, que o tempo requerido para a formação das equações via equações de Appel foi o menor, seguido pela formulação de Newton-Euler. Vukobratovic e Potkonjak [62], utilizaram as equações de Appel para a simulação de diferentes tarefas para diferentes configurações de robôs manipuladores, e apresentaram diagramas contendo a variação no tempo das coordenadas generalizadas, velocidades e torques nas juntas.

2.3 - Formulações baseadas na Mecânica Vetorial

Estas formulações, diferentemente das descritas anteriormente, não são baseadas em energias e não necessariamente requerem a utilização de transformações de coordenadas para a representação cinemática.

A seguir serão apresentadas formulações via equações de Newton-Euler e equações de Kane, juntamente com as técnicas utilizadas para a modelagem das flexibilidades.

2.3.1 - Equações de Newton-Euler

Esta formulação é obtida diretamente da interpretação da segunda Lei de Newton, que descreve a dinâmica do sistema em termos das forças e momentos. As equações incorporam todas as forças e momentos que atuam sobre as ligações, e incluem também as forças de vínculo que atuam entre ligações adjacentes. Desta forma, operações aritméticas adicionais são requeridas para eliminar estes termos, de modo a obter-se relações explícitas entre os torques nas juntas e o movimento resultante. Utilizando esta formulação, juntamente com a técnica de elementos finitos, Naganathan e Soni [63], apresentaram um modelo para a predição do comportamento dinâmico de manipuladores contendo juntas rígidas e ligações flexíveis. Estas últimas, foram discretizadas com elementos de viga, baseados na teoria de Timoshenko.

Para a descrição cinemática do sistema, foram utilizadas matrizes de transformação de coordenadas T_i , onde a transformação que relaciona duas ligações adjacentes, combina os méritos da descrição via notação de Denavit-Hartenberg com uma descrição relevante com a geometria das ligações.

Através da matriz T_i , calculou-se os vetores velocidade e aceleração absoluta de um segmento diferencial sobre a ligação i , e com estes vetores juntamente com outros esforços, obteve-se as equações de Newton-Euler para o segmento, em termos das forças e momentos atuantes.

Para a obtenção das equações dinâmicas de um elemento finito sobre uma ligação, foi utilizado o método de Galerkin, onde as equações de Newton-Euler para o segmento diferencial foram representadas em uma forma integral, ao longo do comprimento do elemento. O campo de deslocamentos do elemento, com relação ao sistema situado na junta i da ligação i , foi representado em termos dos deslocamentos nodais utilizando-se funções de interpolação de Lagrange.

As coordenadas locais dos elementos foram transformadas nas coordenadas globais através de matrizes de compatibilidade, variantes com o tempo, que nada mais são do que as submatrizes 3×3 das matrizes de transformação T_i . As matrizes dos elementos são adequadamente montadas, formando então o sistema final de equações dinâmicas. Para a solução das equações foi utilizado um procedimento iterativo, não especificado da referência [64].

A metodologia desenvolvida foi utilizada na modelagem e simulação de manipuladores de configuração planar (duas ligações) e espacial (três ligações), ambos contendo juntas rotacionais rígidas. Para um dado movimento das juntas, foram observados os erros de posição do efetuador ao longo do tempo. Os erros foram obtidos para duas situações diferentes quanto a modelagem, uma considerando o modelo completo, ou seja, considerando todos os termos das equações do movimento, e outra desprezando os termos inerciais e os associados com os efeitos de Coriolis e centrífugos. Os resultados obtidos para o modelo completo, mostraram erros significativamente maiores do que os fornecidos pelo modelo linearizado, demonstrando assim a importância dos efeitos de acoplamento não lineares de flexibilidade quanto a precisão de modelagem.

Os resultados obtidos para as deformações, foram utilizados para a obtenção dos momentos de reação nas juntas dos manipuladores, de modo a antecipar os torques necessários nos atuadores, para um dado movimento do manipulador.

Entretanto, apesar dos resultados obtidos, serem significativos, a utilização de funções de interpolações Lagrangianas é questionável, no tocante a precisão dos resultados, uma vez que estas garantem apenas a continuidade da função, e não de suas derivadas. Indicadas para este caso, os elementos de viga de Timoshenko, garantem a continuidade da função e sua rotação, e produzem a solução analítica exata para o modelo de viga de Timoshenko [65].

Huang e Lee [66], propuseram uma modelagem aproximada e recursiva, baseada na formulação de Newton-Euler, para manipuladores contendo ligações flexíveis e juntas rígidas. Para pequenas deformações das ligações, um modelo de primeira ordem massa mola foi desenvolvido, no qual os parâmetros das ligações são concentrados nas juntas, de modo que a flexibilidade das ligações foi tratada como uma mola em cada junta.

Para grandes deformações das ligações, o modelo anterior foi estendido, de modo a aproximar uma ligação flexível a um conjunto de pequenas vigas rígidas conectadas por "pseudo-juntas". Sendo a flexibilidade da ligação modelada como uma mola em cada pseudo-junta. Para este modelo foi apresentada uma análise analítica de erro, onde é obtida uma relação matemática entre o erro máximo de modelagem e o número de pseudo-juntas em cada ligação. Esta relação pode ser usada para a seleção do número apropriado de pseudo juntas em cada ligação, de modo a assegurar a precisão do modelo.

Observou-se também que, quando o número de pseudo-juntas tende para o infinito, os torques nas juntas fornecidos pelo modelo proposto, aproximam-se dos torques fornecidos por modelos flexíveis baseados na formulação Lagrangiana. Efeitos importantes tais como, cisalhamento, inércia rotatória, torção e deformação axial não foram considerados no modelo.

2.3.2 - Equações de Kane

Este método, também conhecido como forma de Lagrange do Princípio de D'Alembert, constitui-se numa formulação vetorial baseada em modificações das equações de Newton-Euler. A principal vantagem deste método, é a eliminação automática das forças de vínculo sem a introdução de procedimentos recursivos. Entretanto, devido a sua complexidade, bons resultados requerem usuários experientes quanto a utilização do método [13], e segundo [78], a obtenção das equações usando este procedimento é substancialmente mais complexa, e a generalização das equações para um manipulador de geometria arbitrária é difícil.

Huston [67], baseando-se nas equações de Kane e em técnicas de análise estrutural, apresentou um procedimento geral para a modelagem dinâmica de sistemas de corpos interconectados por juntas rotacionais, incluindo efeitos de flexibilidade. Também foi feita uma análise quase-estática do sistema, expressa na forma de relações entre forças e deslocamentos. A flexibilidade dos corpos que formam a cadeia cinemática, foi modelada através de molas de translação e torção situadas sobre as juntas. Nenhum exemplo ou resultado prático do

procedimento foi apresentado, mas este foi indicado como aplicável para o tratamento de grandes sistemas de corpos interconectados, tais como: sistemas biológicos, robôs manipuladores, mecanismos e estruturas espaciais.

Amirouche e Huston [68], estenderam o método desenvolvido em [67], e apresentaram um procedimento para o estudo de estruturas flexíveis sujeitas a grandes deslocamentos. Neste procedimento, a estrutura, composta de corpos interconectados que sofrem movimentos relativos, tem seus corpos discretizados através de segmentos finitos.

O movimento decorrente da flexibilidade dos corpos, é representado por um conjunto de coordenadas, que expressam a orientação e a translação relativa entre os segmentos finitos. As deformações dos corpos são baseadas em deformações locais, associadas com equivalentes deflexões de vigas. Foi também utilizado um procedimento para a redução do número de equações, apresentado em [69], o qual é baseado num teorema de autovalor zero. O comportamento dinâmico do sistema, é obtido da resolução das equações de movimento reduzidas, juntamente com as equações de vínculo associadas.

Seguindo esta linha, outros trabalhos, abordando a determinação da matriz associada com a rigidez do sistema, e sobre a violação das condições de vínculo durante simulações dinâmicas, são apresentados respectivamente em [70] e [71].

Buffinton [92], utilizando as equações de Kane e a técnica dos modos assumidos, deu um primeiro passo para o desenvolvimento de uma modelagem de manipuladores contendo ligações flexíveis conectadas por juntas prismáticas. As simulações feitas mostraram como as vinculações impostas pelos

pontos de suporte das juntas e o acoplamento entre as forças de inércia longitudinais e as deflexões transversais devem ser incorporadas na análise, de forma correta e completa, e também como o tipo e o número de funções admissíveis afetam os resultados.

2.4 - Formulações considerando a flexibilidade das juntas

Os movimentos das juntas de um robô são obtidos através da utilização de acionadores, que podem ser conectados direta ou indiretamente com as juntas correspondentes. A conexão indireta utiliza um sistema de transmissão, ao passo que na conexão direta, o eixo do acionador é confundido com o da articulação.

Nas modelagens normalmente utilizadas, os elementos mecânicos de transmissão de movimento são considerados perfeitos, de modo que a relação entre entrada e saída é linear e perfeitamente definida através da relação de transmissão.

Entretanto, tal hipótese não é adequada, pois estes elementos apresentam características mecânicas tais como elasticidade, folgas e atritos, que tendem a afetar a performance do manipulador como um todo. Desta forma, torna-se importante a consideração destes efeitos quando da modelagem dinâmica de manipuladores.

Spong [90], propôs um algoritmo de controle para manipuladores contendo juntas rotacionais flexíveis e ligações rígidas. Na modelagem considerou-se que entre o rotor do acionador e a ligação por ele acionada, existe algum tipo de elemento de transmissão tais como correias, cabos, engrenagens e harmonic drives, dotados de flexibilidade.

Esta flexibilidade da transmissão foi tratada como sendo a flexibilidade da junta, e representada através de uma mola torsional linear, formando assim um acoplamento elástico entre o atuador e a ligação por ele acionada.

Além disto, considerou que a energia cinética do rotor do atuador é devida apenas a sua própria rotação; que a inércia do rotor é simétrica em torno do eixo de rotação do rotor, de modo que a energia potencial do rotor e a velocidade do centro de massa do rotor são independentes da posição do rotor, e desprezadas as forças giroscópicas devidas à rotação dos rotores dos atuadores.

2.5 - Conclusões

Várias características desejáveis, das equações dinâmicas devem ser avaliadas para a comparação de diferentes formulações. A dificuldade na formulação, e particularmente a complexidade das expressões finais do modelo, são critérios durante o desenvolvimento das equações. Para a implementação computacional, a abordagem deve ser numericamente robusta e facilmente convertível em algoritmos e programas computacionais. A eficiência numérica em termos da rapidez, é também um critério importante.

Como se pode observar, pela descrição feita nos itens anteriores, as formulações mais utilizadas para a modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis, são as que fazem parte da Mecânica Analítica. Dentre estas formulações, destacam-se as equações de Lagrange e o princípio de Hamilton. A preferência por estas formulações pode ser atribuída a fatores tais como:

facilidade de formulação, interpretação, conversão em programas computacionais e sobretudo pela sua generalidade.

As equações de Hamilton, por sua vez, apesar de terem a mesma generalidade, quanto a modelagem de sistemas mecânicos que as equações de Lagrange e o princípio de Hamilton, produzem o dobro de equações de movimento que estas últimas formulações, quando da modelagem de um mesmo sistema. Esta característica torna a formulação via equações de Hamilton menos eficiente, em termos da rapidez de cálculo, comparativamente com as outras formulações, principalmente em tarefas de simulação, onde é requerida a solução das equações de movimento.

Apesar de nenhum trabalho utilizando as equações de Appel, para a modelagem de manipuladores flexíveis, ter sido apresentado na literatura, esta formulação, que pode ser considerada como uma variação da abordagem Lagrangiana, apresenta características idênticas às das formulações via equações de Lagrange e princípio de Hamilton, citadas anteriormente. Sendo, portanto, a modelagem de manipuladores flexíveis através das equações de Appel, uma lacuna a ser preenchida.

Um aspecto no tocante a eficiência numérica das formulações que fazem parte da Mecânica Analítica, é quanto ao conjunto de coordenadas utilizado na descrição do sistema mecânico. Este conjunto de coordenadas deve ser linearmente independente, uma vez que o contrário, implica na satisfação de certas condições de vínculo, quando da solução das equações, o que compromete a eficiência em termos da rapidez de cálculos.

As formulações de Newton-Euler e das equações de Kane, ambas enquadradas na chamada Mecânica Vetorial, são pouco utilizadas na modelagem de manipuladores flexíveis. Como citado

por Everett [13], a formulação de Newton-Euler, por requerer a soma de todos os esforços atuantes sobre um dado segmento infinitesimal do sistema flexível, é para muitos pesquisadores da área, um processo não natural de modelagem. Além disto, as equações, que incorporam as forças de vínculo que ocorrem entre as ligações adjacentes, requerem operações aritméticas adicionais para a eliminação destes termos, de modo a obter-se relações explícitas entre os torques nas juntas e o movimento em termos das coordenadas.

Da mesma forma que a formulação de Newton-Euler, as equações de Kane apresentam um processo de certa complexidade quanto a obtenção das equações de movimento, não representando assim um caminho natural para a modelagem de manipuladores, de uma maneira geral.

A modelagem das ligações, consideradas como meios contínuos, foi feita predominantemente pelas técnicas dos modos assumidos e elementos finitos, com a hipótese de que as ligações comportam-se como vigas. A técnica dos modos assumidos, normalmente associada com vigas baseadas na teoria de Euler-Bernoulli, fornece uma descrição onde os deslocamentos podem ser escritos em função de um reduzido número de graus de liberdade, produzindo conseqüentemente, um pequeno número de equações do movimento. Por este motivo, a combinação técnica dos modos assumidos/viga de Euler-Bernoulli, tem sido bastante preferida para o modelamento dinâmico de manipuladores flexíveis, visando a implementação de estratégias de controle. Entretanto, esta prática produz resultados cuja representatividade é limitada, sendo que, a implementação de uma modelagem mais representativa, implica num aumento da complexidade e do custo.

Já a técnica de elementos finitos, devido a sua generalidade, permite a inclusão de efeitos importantes, associados ao comportamento dos meios contínuos, fornecendo assim resultados com maior representatividade, sem apresentar grandes dificuldades quanto a implementação. O problema associado com o elevado número de graus de liberdade, decorrente de uma modelagem mais refinada, pode ser contornado pela utilização de processos tais como o de condensação ou o de redução via síntese modal dos componentes.

Deve-se observar também, que para obter-se uma representatividade adequada na modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis, deve-se, além dos efeitos decorrentes da flexibilidade das ligações, considerar também os associados com as juntas. Os trabalhos que apresentaram modelos incluindo a flexibilidade das juntas utilizaram as equações de Lagrange, e os efeitos considerados foram os devidos a elasticidade das juntas e à inércia dos atuadores.

Com base nas considerações anteriormente expostas, pode-se concluir que, uma modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis, feita via Mecânica Analítica, utilizando as equações de Lagrange ou o princípio de Hamilton, juntamente com um conjunto de coordenadas que seja linearmente independente, onde são levados em consideração as flexibilidades das juntas e ligações, sendo a modelagem destas últimas feita através da técnica de elementos finitos, constitui-se no caminho mais adequado para a obtenção de resultados representativos, além de ser uma metodologia com implementação computacional de razoável facilidade, boa eficiência numérica e bastante genérica. A seguir é apresentada uma tabela com as principais referências do assunto

**TABELA 2.1 - Principais referências concernentes à modelagem
modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis.**

Autores/Ano	Referência	Modelagem da Flexibilidade	Caso de Estudo	Comentários
Métodos baseados na formulação via Equações de Lagrange				
W. J. Book O. Maizza-Neto D. E. Whitney (1975)	[18]	Modos Assumidos e Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema planar contendo duas ligações flexíveis e juntas rotacionais rígidas.	Estudo de três diferentes estratégias de controle para o problema.
W. H. Sunada S. Dubowsky (1983)	[46]	Elementos Finitos	Manipulador articulado com três ligações flexíveis e juntas rotacionais rígidas	Utiliza a técnica de redução via CMS, faz a análise dos autovalores/autovetores e transiente. Compara resultados teóricos c/ experimentais. Apresenta o desenvolvimento das equações de movimento.
W. J. Book (1984)	[26]	Transformação Homogênea, Modos Assumidos e Teoria de Viga de Euler - Bernoulli		
A. A. Shabana R. A. Wehage (1984)	[39]	Elementos Finitos	Sistemas de corpos interconectados com grandes deslocam. angulares.	Utiliza a técnica de redução via CMS e faz a análise transiente de sistemas mecânicos.
R. P. Judd D. R. Falkenburg (1985)	[25]	Transformação Homogênea e Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema planar contendo duas ligações flexíveis e juntas rotacionais rígidas	Apresenta o desenvolvimento das equações de movimento.
N. G. Chalhoub A. G. Ulsoy (1986)	[19]	Modos Assumidos e Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Manipulador esférico com duas juntas rotacionais e uma prismática, todas rígidas e a última ligação flexível	Estudaram a relação entre a flexibilidade estrutural e um controlador linear para movimento de corpo rígido
J. C. Simo L. Vu-Quoc (1986)	[57] [58]	Teorias de deformações finitas em vigas	Sistema planar contendo duas ligações flexíveis e juntas rotacionais rígidas	Desenvolvem uma nova abordagem e um procedimento para a integração numérica e apresenta simulações.
J. O. King V. G. Gourishankar R. E. King (1987)	[76]	Transformação Homogênea, Modos Assumidos e Teoria de Viga de Euler - Bernoulli		Utiliza as velocidades angulares e matrizes de transformação 3x3 para a representação cinemática das ligações.
M. Benati A. Morro (1988)	[17]	Modos Assumidos e Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema planar contendo duas ligações flexíveis e juntas rotacionais rígidas	Apresenta o desenvolvimento das equações de movimento.

P. B. Usoro R. Nadira S. S. Mahil (1986)	[36]	Elementos Finitos Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema planar contendo duas ligações flexíveis e juntas rotacionais rígidas	Faz a análise transiente do sistema
M. W. Spong (1987)	[90]	Molas torcionais lineares	Sistema planar contendo uma ligação rígida e junta flexível	Desenvolvimento de um modelo para a flexibilidade de juntas rotacionais
K. H. Low M. Vidyasagar (1988)	[72]	Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema planar contendo uma ligação rígida e outra flexível e juntas rotacionais rígidas	Apresenta o desenvolvimento das equações de movimento.
M. De Smet C. Liefvooghe P. Sas R. Snoeys (1989)	[47]	Elementos Finitos Molas torcionais	Manipulador articulado contendo três ligações flexíveis e juntas rotacionais flexíveis	Utiliza a técnica de redução via CMS, faz a análise dos autovalores/autovetores
J. N. Bricout J. C. Debus P. Micheau (1990)	[97]	Elementos Finitos Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema planar contendo duas ligações flexíveis e juntas rotacionais rígidas	Utiliza a notação de Denavit-Hartenberg e apresenta os resultados da análise transitente para uma trajetória
L.-W. Chang K. P. Gannon (1990)	[35]	Elementos Finitos Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema contendo uma ligação flexível e uma junta rotacional rígida	Compara os resultados teóricos com resultados experimentais
H. R. Pota (1990)	[37]	Elementos Finitos Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema contendo uma ligação flexível e uma junta rotacional rígida	Utilizou técnicas de condensação para a redução das equações de movimento
B. S. Yuan W. J. Book J. D. Huggins (1990)	[30]	Transformação Homogênea, Modos Assumidos e Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema planar contendo duas ligações flexíveis e juntas rotacionais flexíveis	Considera a elasticidade das juntas por molas torcionais e implementou simulações e experimentações
L.-W. Chang J. F. Hamilton (1991)	[96]	Elementos Finitos Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema planar contendo três ligações flexíveis e juntas rotacionais flexíveis	Considera o amortecimento e compara simulações

Métodos baseados na formulação via Princípio de Hamilton				
E. Bayo (1986)	[56]	Elementos Finitos Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema contendo uma ligação flexível e uma junta rotacional rígida	Utiliza o Método da Transformada de Fourier e obtém o torque da junta
M. A. Serna E. Bayo (1989)	[55]	Elementos Finitos Teoria de Viga de Timoshenko	Sistema contendo uma ligação flexível e uma junta rotacional rígida	Obtém os deslocamentos da extremidade do sistema para uma dada trajetória
E. Bayo (1989)	[54]	Elementos Finitos Teoria de Viga de Timoshenko	Sistema contendo uma ligação flexível e uma junta rotacional rígida	Apresenta a configuração deformada do sistema para vários instantes de trajetória
K. H. Low (1989)	[74]	Modos Assumidos e Teoria de Viga de Euler - Bernoulli	Sistema articulado contendo duas ligações rígidas e uma flexível	Utiliza o Método de Galerkin de resíduos ponderados e obtém os deslocamentos da extremidade da cadeia
Métodos baseados nas Equações de Hamilton				
S. Nicosia P. Tomei A. Tornambè (1989)	[21]	Modos Assumidos	Sistema contendo uma ligação flexível e uma junta rotacional rígida	Utiliza o método da pseudo-linearização para desenvolver uma estratégia de controle não-linear
Métodos baseados nas Equações de Newton-Euler				
Y. Huang C. S. G. Lee (1988)	[66]	Massa-mola	Sistema planar contendo duas ligações flexíveis e juntas rotacionais rígidas	Apresenta o desenvolvimento das equações de movimento
G. Naganathan A. H. Soni (1988)	[63]	Elementos Finitos Teoria de Viga de Timoshenko	Manipulador articulado com três ligações flexíveis e juntas rígidas	Apresenta os erros de posição da extremidade do manipulador para uma dada trajetória
Métodos baseados na formulação via Equações de Kane				
R. L. Huston (1981)	[67]	Molas de translação e rotação sobre as juntas		Apresenta o desenvolvimento das equações de movimento
L. J. Everett (1988)	[13]	Técnicas vetoriais associadas a problemas variacionais	Sistema com uma ligação flexível e junta rígida	Apresenta o desenvolvimento das equações de movimento
F. M. L. Amirouche R. L. Huston (1988)	[68]	Segmentos Finitos	Sistema planar de cadeia fechada, com ligações flexíveis e rígidas	Apresenta os deslocamentos de um ponto sobre uma das ligações

CAPÍTULO 3

UMA MODELAGEM DINAMICA PARA MANIPULADORES FLEXÍVEIS

3.1 - Introdução

Conforme visto anteriormente, a tarefa de modelagem é de fundamental importância para o projeto e análise de robôs. A modelagem de um sistema físico inicia-se pela elaboração do modelo analítico, que consiste de um conjunto de hipóteses simplificativas, que reduzem o sistema real, contendo infinitos graus de liberdade a um modelo contendo finitos graus de liberdade, e de um conjunto de desenhos descrevendo este modelo. Ao modelo analítico são aplicadas leis da física, de modo a obter-se um modelo matemático do sistema, expresso através de equações diferenciais, as quais descrevem em linguagem matemática o modelo analítico.

Neste capítulo, será apresentado um procedimento geral para a modelagem dinâmica de manipuladores contendo ligações flexíveis e juntas de revolução acionadas por motores elétricos de corrente contínua, cujos rotores são acoplados elasticamente nas ligações. O objetivo da elaboração deste procedimento, é o de se ter um maior conhecimento sobre a formulação do problema, e melhor compreensão e interpretação da física do sistema.

As ligações serão consideradas como meios deformáveis, e modeladas analiticamente segundo a teoria de viga de Timoshenko. A elasticidade das juntas será tratada analiticamente através de molas torcionais lineares. O modelo matemático será

obtido através da aplicação do princípio de Hamilton. Um exemplo de um manipulador planar contendo duas ligações será mostrado no Apêndice G, no qual as equações do movimento serão obtidas.

3.2 - Formulação do modelo

O modelo considera as ligações como sendo vigas de Timoshenko, possuindo cada uma um sistema de coordenadas fixo na primeira junta da ligação, conforme mostrado na figura 3.1.

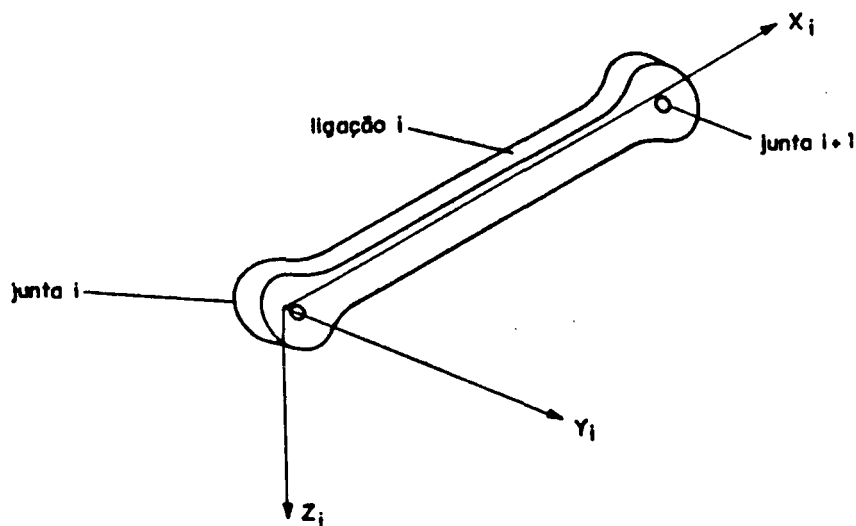


Fig. 3.1 - Ligação i com sistema de coordenadas local.

Tem-se então um sistema distribuído, definido sobre o domínio $0 \leq x \leq \ell$, onde x é a posição espacial de algum ponto ao longo do eixo neutro.

Na modelagem das juntas, considera-se somente

manipuladores com juntas de revolução, acionadas por motores elétricos. A figura 3.2 mostra o modelo da junta elástica, onde a elasticidade da junta é considerada como uma mola torsional linear com rigidez K_i .

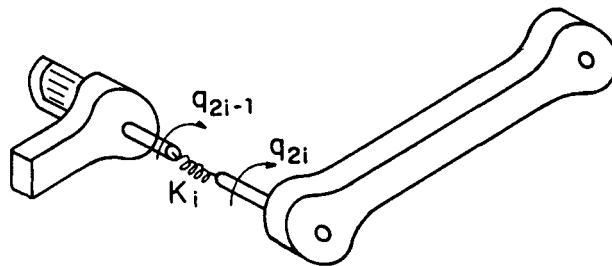


Fig. 3.2 - Modelo da junta com flexibilidade.

As coordenadas generalizadas do modelo são q_{2i} e q_{2i-1} , onde q_{2i} representa o deslocamento angular da ligação i em torno do eixo y_i , e $q_{2i-1} = - (1/c_i)\phi_i$, onde ϕ_i é o deslocamento angular do rotor e c_i é a relação de transmissão envolvida. Então o deslocamento elástico na junta é dado por $q_{2i} - q_{2i-1}$.

A formulação mais geral do princípio de Hamilton que governa o movimento de sistemas mecânicos, pode ser escrita na seguinte forma [53]

$$\int_{t_1}^t \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^t \sum_{k=1}^r Q_k \delta q_k dt = 0, \quad (3.1)$$

onde T e V são respectivamente a energia cinética e potencial do sistema, Q_k representam as forças não conservativas não derivadas de funções potenciais e δq_k é o deslocamento virtual generalizado correspondente. No caso da não existência das forças Q_k a equação (3.1) fica

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad , \quad (3.2)$$

onde $L = T - V$ é conhecido como Lagrangiano. Então o Lagrangiano do sistema apresenta a seguinte forma funcional :

$$L [\nu_i(t), \dot{\nu}_i(t), \beta_j(x,t), \beta_j'(x,t), \dot{\beta}_j(x,t)] \quad (3.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

onde ν_i são os deslocamentos generalizados correspondendo ao deslocamento das ligações e do atuador, e β_j são as coordenadas elásticas generalizadas, correspondendo a w e ψ , deslocamento da linha elástica e inclinação desta respectivamente. Ou seja, o sistema consiste de um conjunto completo de coordenadas generalizadas $q = \{q_1, \dots, q_m; q_{m+1}, \dots, q_r\}^T = \{ \nu_1(t), \dots, \nu_m(t); \beta_1(x,t), \dots, \beta_{(r-m)}(x,t) \}^T$. Note que r é o número total de coordenadas generalizadas, incluindo o número de m coordenadas generalizadas das juntas, em outras palavras, como indicado em (3), tem-se $r = m + n$.

Aplicando o princípio de Hamilton sem considerar forças não conservativas tem-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \nu_i} \delta \nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{\nu}_i} \delta \dot{\nu} + \frac{\partial L}{\partial \beta_j} \delta \beta + \frac{\partial L}{\partial \beta_j'} \delta \beta' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_j} \delta \dot{\beta} \right] dt = 0 \quad (3.4)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\nu}_i} \right) \delta \nu + \left(\frac{\partial L}{\partial \nu_i} \right) \delta \nu - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_j} \right) \delta \beta + \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_j} \right) \delta \beta + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_j'} \right) \delta \beta - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_j'} \right) \delta \beta \right] dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\nu}_i} \right) \delta \nu \Big|_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_j} \right) \delta \beta \Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_j} \right) \delta \beta \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (3.5)$$

e as equações de Euler-Lagrange resultantes são:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\nu}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \nu} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}_i} \right) - \frac{dT}{d\nu_i} + \frac{dV}{d\nu_i} = 0 \quad (3.6)$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial \beta_j} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_j} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_j} + \frac{\partial V}{\partial \beta_j} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_j} \right) = 0 \quad (3.7)$$

A equação (3.6) é um conjunto de equações diferenciais que governam os movimentos do sistema decorrentes dos movimentos das juntas, e as equações diferenciais (3.7) são conhecidas como equações de deflexão, e descrevem o movimento de vibração das ligações elásticas.

3.3 - Expressões de energia

Na modelagem das juntas, segue-se as hipóteses e o procedimento proposto por Spong [90], onde considera-se somente manipuladores com juntas de revolução, acionadas por motores elétricos. O rotor i , como um corpo intermediário, possui um sistema de coordenadas próprio e um tensor de inércia associado:

$$I_i = \begin{bmatrix} I_{xxi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yyi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz i} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} são os momentos de inércia do rotor em torno dos eixos principais. Então a energia cinética do rotor é

$$T_{ri} = \frac{1}{2} M_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i \quad (3.9)$$

onde v_i representa a velocidade do centro de massa do rotor, M_i é a massa do rotor, e ω_i é o vetor das velocidades angulares em torno dos eixos principais.

Considerando que a velocidade v_i do centro de massa pode ser escrita em função somente das coordenadas que descrevem o movimento das ligações, pode-se incluir a massa do rotor como parte da massa da ligação $i-1$. Com isto, a energia potencial do rotor i devida a ação gravitacional, pode ser calculada juntamente com a energia potencial da ligação $i-1$.

Considerando ainda como hipótese, que a energia cinética do rotor é devida somente ao movimento em torno do seu eixo principal de rotação, esta energia pode ser escrita como:

$$T_{ri} = - \omega_i^T I_i \omega_i = - I_{yyi} \dot{\phi}_i^2 \quad (3.10)$$

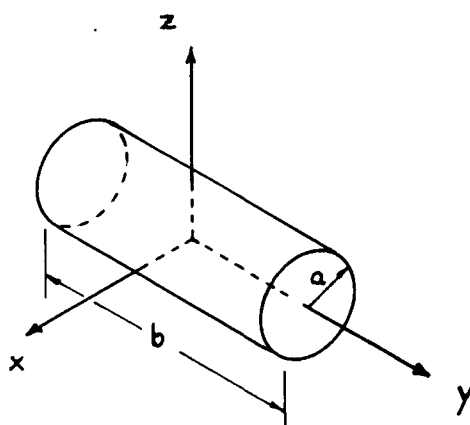


Fig. 3.3 - Cilindro representando o modelo do rotor.

Para ilustrar o efeito desta última hipótese, considere o cilindro mostrado na figura 3.3. A energia cinética do cilindro

é:

$$T = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2) \quad (3.11)$$

os momentos principais de inércia do cilindro, com relação ao sistema de coordenadas mostrado, são dados por:

$$I_{xx} = \frac{1}{4} Mb^2 = I_{zz} \quad (3.12)$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2} Ma^2 \quad (3.13)$$

Devido a relação de transmissão c:1 a velocidade angular ω_y será de um fator c maior que as velocidades angulares em torno dos outros eixos. Considerando $\omega_y = c\omega_x = c\omega_z$, a expressão (3.11) fica:

$$T = \frac{1}{4} M\omega^2 (a^2 + b^2/c^2) \quad (3.14)$$

Pela consideração de que a energia cinética do rotor é devida somente a rotação, tem-se que:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} M\omega_y^2 a^2 \quad (3.15)$$

O erro percentual na energia cinética, induzido pelo uso da expressão (3.15) ao invés da expressão (3.11) é dado por:

$$\text{Erro} = \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}} \times 100 \quad (3.16)$$

$$= \frac{b^2}{b^2 + c^2 a^2} \times 100 \quad (3.17)$$

para o caso onde $a = 1$ e $b = 2$ com $c = 50$ (uma redução considerada baixa para redutores do tipo Harmonic-drive), o erro percentual na energia cinética é de 0,15974 por cento.

Conforme mostra a figura 3.2, as coordenadas generalizadas q_j , utilizadas na modelagem das juntas, podem ser divididas em $q_j = (q_1, q_2)^T$, onde q_1 é o vetor das coordenadas dos atuadores e q_2 é o vetor das coordenadas que descrevem o

movimento de deslocamento angular das ligações. Então, pode-se escrever a energia cinética dos rotores dos atuadores da seguinte forma:

$$T_J = + \frac{1}{2} \dot{q}_1^T B \dot{q}_1 \quad (3.18)$$

e a energia potencial de deformação torsional nas juntas como

$$U_J = - \frac{1}{2} (q_1 - q_2)^T K (q_1 - q_2) \quad (3.19)$$

A energia cinética para cada ligação elástica do sistema pode ser expressa como uma forma quadrática

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{lig.i} \dot{P}^T \dot{P} \, dm_i = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_i A_i \dot{P}_i^T \dot{P}_i \, dx_i \quad (3.20)$$

onde P é o vetor posição de um ponto na ligação, em relação ao sistema inercial, e \dot{P} é sua velocidade. Os símbolos ρ e A representam a densidade de massa da ligação e a área da seção transversal respectivamente. Similarmente as ligações rígidas a velocidade de um ponto arbitrário na ligação elástica é dada por:

$$\dot{P}_i = J_i \dot{q}_4 \quad (3.21)$$

onde J é o Jacobiano, e q_4 são as coordenadas generalizadas utilizadas na modelagem das ligações, e compreendem as coordenadas q_2 mais as coordenadas q_3 que descrevem o movimento flexível das ligações. Substituindo (3.21) em (3.20) tem-se para a energia cinética das ligações:

$$T_L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \rho_i A_i \dot{q}_4^T J_i^T J_i \dot{q}_4 \, dx_i = \frac{1}{2} \dot{q}_4^T \left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 H_i \, dx_i \right) \dot{q}_4 \quad (3.22)$$

$$\text{onde } H_i = \rho_i A_i J_i^T J_i \quad (3.23)$$

$$\text{ou } T_L = \frac{1}{2} \dot{q}_4^T H(q_4) \dot{q}_4 \quad (3.24)$$

A energia potencial para as ligações elásticas devida ao campo gravitacional pode ser escrita como:

$$V_L = - \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \rho_i A_i g^T P_i dx_i \quad (3.25)$$

A energia potencial para as ligações elásticas devida à deformação [78] é:

$$U_L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \left[EI \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right)^2 + kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} - \psi_i \right)^2 \right] dx_i \quad (3.26)$$

onde k é a constante de cisalhamento, dependendo da seção transversal.

As energias cinética e potencial do sistema são:

$$T = T_L + T_J \quad e \quad V = V_L + U_L + U_J \quad (3.27)$$

e o Lagrangiano total do sistema fica

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_4^T H(q_4) \dot{q}_4 + \frac{1}{2} \dot{q}_1^T B \dot{q}_1 - \frac{1}{2} (q_1 - q_2)^T K (q_1 - q_2) - G(q_4) + U(q_3) \quad (3.28)$$

onde $G(q_4)$ representa os efeitos devidos a gravidade, provenientes da equação (3.25), e $U(q_3)$ da equação da energia potencial (3.26).

As equações do movimento resultantes são da forma:

$$B \ddot{q}_1 - K (q_1 - q_2) = \tau \quad (3.29)$$

$$H(q_4) \ddot{q}_4 + h(\dot{q}_4) + G(q_4) + K (q_1 - q_2) + U(q_3) = 0 \quad (3.30)$$

Pode-se observar nas equações anteriores que, considerando-se a rigidez das juntas como tendendo para o infinito ($K \rightarrow \infty$), se terá

$$q_1 = q_2 \quad (3.31)$$

ou seja, não haverá deformação elástica nas juntas, pois $q_1 - q_2 \rightarrow 0$. E sendo as ligações consideradas rígidas, de modo ao termo proveniente da expressão (3.26) não existir, as equações anteriores ficarão na forma idêntica a da obtida na modelagem de

manipuladores rígidos. Deve-se notar também, que na modelagem mostrada neste item, não são levadas em conta as forças giroscópicas devidas à rotação dos rotores dos atuadores, e nenhuma espécie de atrito ou amortecimento.

3.4 - Equações do movimento

A obtenção das equações será feita de maneira semelhante ao caso de manipuladores rígidos [79]. Desta forma, H_{ijk} é o elemento jk da matriz tensor de inércia da i ésima ligação, e B_{ijk} representa o elemento jk da matriz $n \times n$ onde o elemento da diagonal principal não nulo, corresponde ao momento de inércia do rotor da i ésima junta, em torno de seu próprio eixo de rotação. Então, a energia cinética do sistema pode ser expressa por:

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \int_0^1 H_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k dx + \sum_{j=a}^r \sum_{k=a}^r \sum_{i=1}^n B_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \quad (3.31)$$

onde $a = r - b/2$

r = número total de coordenadas generalizadas do sistema

b = número de coordenadas das juntas (juntas + atuadores)

n = número de ligações (e juntas)

dos primeiros termos das equações (3.6) e (3.7) tem-se

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \int_0^1 H_{ijk} \dot{q}_k dx + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ijk} \dot{q}_k \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \int_0^1 H_{ijk} \ddot{q}_k dx + \sum_{k=a}^r \sum_{i=1}^n B_{ijk} \ddot{q}_k + \\ &+ \sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{d}{dt} H_{ijk} \dot{q}_k dx + \sum_{k=a}^r \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} B_{ijk} \dot{q}_k \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\text{onde } \frac{d}{dt} H_{ijk} = \sum_{s=1}^a \frac{\partial H_{ijk}}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} = \sum_{s=1}^a \frac{\partial H_{ijk}}{\partial q_s} \dot{q}_s \quad (3.34)$$

$$\frac{d}{dt} B_{ijk} = \sum_{s=1}^a \frac{\partial B_{ijk}}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} = \sum_{s=1}^a \frac{\partial B_{ijk}}{\partial q_s} \dot{q}_s = 0 \quad (3.35)$$

do segundo termo da equação (3.6) e da equação (3.7) tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^a \sum_{s=1}^a \left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial H_{ijk}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_s dx \right) \quad (3.36)$$

O terceiro termo das equações (3.6) e (3.7) dão origem ao termo devido a gravidade

$$G_j = \frac{\partial V}{\partial q_j} = - \int_0^1 \rho_i A_i g^T J_i dx_i \quad (3.37)$$

A energia potencial de deformação de uma ligação elástica é dada em (3.26), e de (3.7) tem-se

$$U_j = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \right) dx \quad (3.38)$$

$$U_j = \begin{cases} \int_0^1 k G A (w_{i,xx} - \psi_{i,x}) dx & \text{p/ } q'_j = w_{i,x} \\ \int_0^1 \left[E_i I_i \psi_{i,xx} + k G A (w_{i,x} - \psi_i) \right] dx & \text{p/ } q'_j = \psi_{i,x} \end{cases} \quad (3.39)$$

A energia de deformação devido à elasticidade da junta é dada por (3.19) e de (3.6) temos:

$$\tilde{U}_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (3.40)$$

$$\tilde{U}_j = \begin{cases} -K_i (q_{2i} - q_{2i-1}) & \text{p/ as coord. } q_j = q_1 \\ +K_i (q_{2i} - q_{2i-1}) & \text{p/ as coord. } q_j = q_2 \end{cases} \quad (3.41)$$

Após definir todos estes termos pode-se escrever as equações do movimento da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^a \int_0^1 H_{ijk} \ddot{q}_k dx + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^a \sum_{s=1}^a h_{ijks} \dot{q}_k \dot{q}_s + \tilde{U}_j + \quad (3.42)$$

$$+ U_j + G_j = 0 \quad j = 1 \dots r-b/2$$

$$\sum_{k=r}^r \sum_{i=1}^n B_{ijk} \ddot{q}_k + \tilde{U}_i = \tau_j \quad j = r-b/2 \dots r \quad (3.43)$$

onde

$$h_{ijks} = \sum_{k=1}^a \sum_{s=1}^a \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \frac{\partial H_{ijk}}{\partial q_s} \dot{q}_k \dot{q}_s dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial H_{iks}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_s dx \right] \quad (3.44)$$

As expressões (3.44) referem-se aos termos devidos ao efeito de Coriolis e centrífugo. As expressões (3.42) e (3.43) podem ser agrupadas e reescritas da seguinte forma:

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + U(q) + G(q) = \tau \quad (3.45)$$

onde q é o vetor das coordenadas generalizadas do sistema, incluindo as coordenadas que representam os grandes deslocamentos (atuadores e ligações), e os pequenos deslocamentos devidos as flexibilidades das ligações; $H(q)$ é a matriz de inércia, simétrica positiva definida; $C(q,\dot{q})$ é a matriz dos torques centrífugos e de Coriolis; $U(q)$ é a matriz de rigidez do sistema, simétrica positiva definida, incluindo a rigidez das ligações e juntas; $G(q)$ é o vetor dos torques gravitacionais e τ é o vetor dos torques nas juntas.

A validade do modelo (3.45) é limitada pelos seguintes fatores:

- i - Não é considerada a dinâmica dos atuadores que fazem parte do sistema, isto é, o torque aplicado por um atuador no instante t é função apenas do sinal de comando recebido por este atuador no mesmo instante t .
- ii - Não há limitação para os torques aplicados pelos atuadores.

- iii - A relação de transmissão entre os atuadores e as ligações é igual a um.
- iv - Não são considerados os torques devidos aos atritos, nem o amortecimento estrutural.
- v - Não são consideradas as flexibilidades da base e do efetuador.

Qualquer atuador terá limite físico para o torque. Não considerar este limite, significa que o atuador será escolhido de tal forma que as necessidades geradas sejam supridas integralmente.

Quando existe redução do movimento entre os atuadores e as ligações, como no caso de transmissões por engrenagens ou Harmonic-drive, ocorre uma redução do efeito dos torques dinâmicos provocados pelo movimento das ligações [79]. Por esta razão, ao considerar a relação de transmissão igual a um, esta-se examinando a pior condição com relação aos efeitos não-lineares presentes na equação (3.45).

Ao desprezar os atritos, deve-se ter em mente que nos manipuladores em uso corrente os torques devidos a este fator são da ordem de 25% dos torques totais produzidos nos atuadores [80]. Entretanto, para robôs com acoplamento direto, o atrito é pequeno e a hipótese considerada se aproxima bastante da realidade.

Como na maioria das aplicações práticas de manipuladores, as garras ou dispositivos que representam o efetuador são considerados como rígidos, a consideração, na modelagem, da flexibilidade no efetuador justifica-se somente quando são utilizadas garras flexíveis ou com conexões desta natureza, ou então dispositivos do tipo RCC (remote center compliance). A flexibilidade na base do manipulador é uma

característica indesejável, pois como a massa entre o efetuador e a base é muito grande, a existência de flexibilidade na base compromete a dinâmica do sistema. Sendo assim, a consideração da base rígida é bastante adequada, e a localização ideal para as flexibilidades é nas ligações e juntas.

No Apêndice G, é apresentado um exemplo ilustrativo da aplicação do procedimento descrito neste capítulo, para o caso de um manipulador planar contendo duas ligações.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA PARA A MODELAGEM DINAMICA DE MANIPULADORES FLEXÍVEIS

4.1 - Introdução

Neste capítulo, será apresentada a metodologia para a modelagem de manipuladores flexíveis a ser utilizada nas etapas de simulação e análise.

Esta metodologia é desenvolvida para o caso de manipuladores cujas ligações são interconectadas por juntas de revolução e o acionamento feito por motores elétricos.

As ligações são discretizadas através de elementos finitos, e a flexibilidade das juntas, considerada como a flexibilidade do sistema de transmissão entre o atuador e a ligação, através de molas lineares.

Para a obtenção das equações de movimento é utilizado o procedimento via equações de Lagrange, e o conjunto de coordenadas utilizado é composto das coordenadas de corpo rígido das ligações, e das coordenadas que descrevem as deformações das ligações.

4.2 - Descrição Cinemática do Modelo

O tipo de sistema a ser modelado constitui-se de uma

cadeia cinemática aberta, de corpos flexíveis interconectados por juntas, conforme mostrado na figura 4.1.

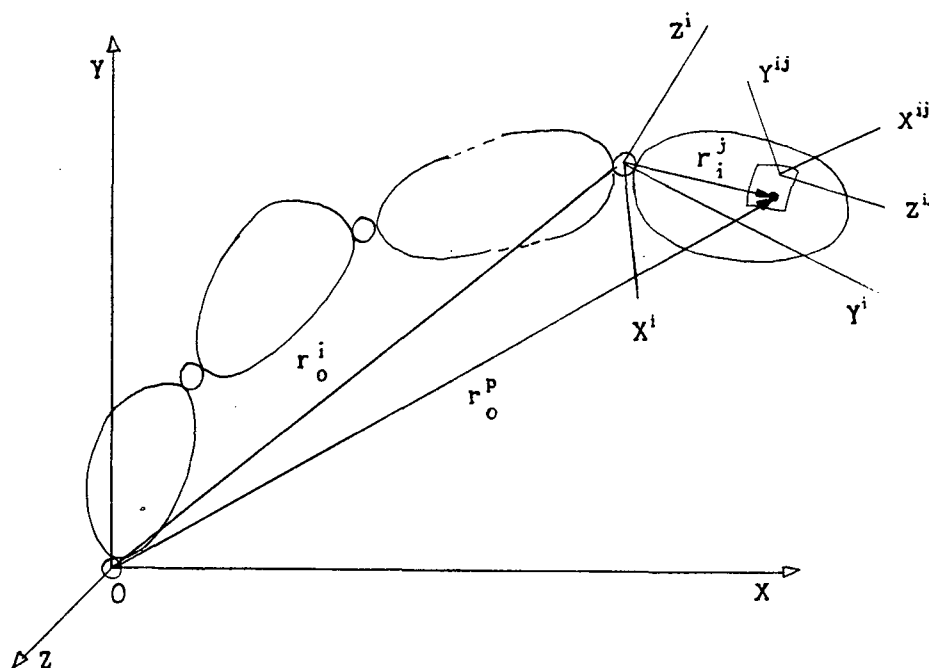


Fig. 4.1 - Cadeia cinemática.

Para a descrição cinemática, utiliza-se um conjunto de coordenadas generalizadas $p = [p_R , p_F]^T$, composto das coordenadas que representam os grandes deslocamentos não lineares de corpo rígido das ligações em torno do eixo de rotação das juntas p_R , e das coordenadas nodais que descrevem os pequenos deslocamentos devidos as deformações sofridas pelas ligações p_F .

Para a discretização por elementos finitos das ligações, denota-se o j -ésimo elemento da ligação i como sendo o elemento ij .

O elemento finito utilizado na discretização será de viga, tridimensional, baseado na teoria de vigas de Timoshenko. Este elemento possui comprimento ℓ_i e seção constante, doze graus de liberdade, associados aos problemas de flexão, torção e

deformação axial, ver figura 4.2. Os graus de liberdade devidos a torção e deformação axial são considerados desacoplados dos graus de liberdade de flexão.

Na descrição dos deslocamentos devidos a flexão, são utilizadas as funções de interpolação clássicas da teoria de vigas de Timoshenko [65]. Os deslocamentos devidos a torção e deformação axial são descritos através de funções de interpolação lineares.

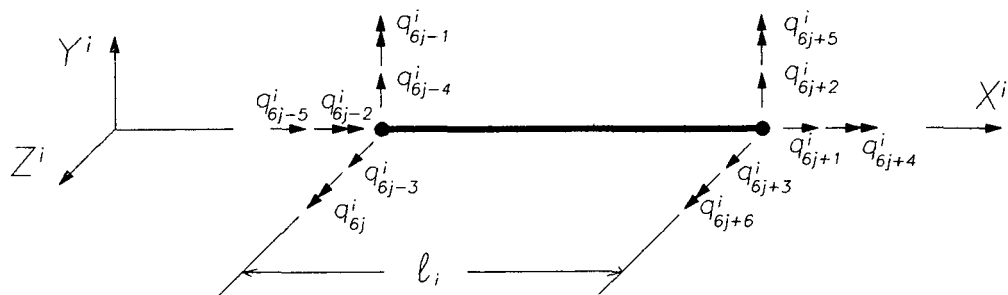


Fig. 4.2 - Elemento finito ij e sistema de coordenadas i .

As funções de interpolação para o elemento descrito anteriormente podem ser expressas da seguinte forma

$$[N]_{ij} = \frac{1}{1+\phi} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 & 0 & N_9 & N_{10} \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{12} & 0 & N_{13} & 0 & N_{14} & 0 & N_{15} & 0 & N_{16} \\ 0 & 0 & N_{17} & N_{18} & N_{19} & 0 & 0 & 0 & N_{20} & N_{21} & N_{22} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde

$$N_1 = (1 + \phi)(1 - \xi) \quad (4.2)$$

$$N_2 = 6(\xi - \xi^2)\eta \quad (4.3)$$

$$N_3 = 6(-\xi + \xi^2)\delta \quad (4.4)$$

$$N_4 = [-1 + 4\xi - 3\xi^2 - (1 - \xi)\phi]\ell\delta \quad (4.5)$$

$$N_5 = [-1 + 4\xi - 3\xi^2 - (1 - \xi)\phi]\ell\eta \quad (4.6)$$

$$N_6 = (1 + \phi)\xi \quad (4.7)$$

$$N_7 = 6(-\xi + \xi^2)\eta \quad (4.8)$$

$$N_8 = 6(\xi - \xi^2)\delta \quad (4.9)$$

$$N_9 = (2\xi - 3\xi^2 - \xi\phi)\ell\delta \quad (4.10)$$

$$N_{10} = (2\xi - 3\xi^2 - \xi\phi)\ell\eta \quad (4.11)$$

$$N_{11} = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + (1 - \xi)\phi] \quad (4.12)$$

$$N_{12} = -(1 + \phi)(1 - \xi)\ell\eta \quad (4.13)$$

$$N_{13} = [\xi - 2\xi^2 + \xi^3 + \frac{1}{2}(\xi - \xi^2)\phi]\ell \quad (4.14)$$

$$N_{14} = [3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi\phi] \quad (4.15)$$

$$N_{15} = -(1 + \phi)\xi\ell\eta \quad (4.16)$$

$$N_{16} = [-\xi^2 + \xi^3 - \frac{1}{2}(\xi - \xi^2)\phi]\ell \quad (4.17)$$

$$N_{17} = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + (1 - \xi)\phi] \quad (4.18)$$

$$N_{18} = (1 + \phi)(1 - \xi)\ell\delta \quad (4.19)$$

$$N_{19} = [-\xi + 2\xi^2 - \xi^3 - \frac{1}{2}(\xi - \xi^2)\phi] \quad (4.20)$$

$$N_{20} = [3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi\phi] \quad (4.21)$$

$$N_{21} = (1 + \phi)\xi\ell\delta \quad (4.22)$$

$$N_{22} = [\xi^2 - \xi^3 - \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)\phi]\ell \quad (4.23)$$

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \eta = \frac{y}{\ell}, \quad \delta = \frac{z}{\ell} \quad \text{e} \quad \phi = \frac{12 E I}{K G A \ell^2} \quad (4.24)$$

sendo ϕ o parâmetro de cisalhamento, EI a rigidez a flexão da viga, k o coeficiente de cisalhamento, G o módulo de cisalhamento e A a área da seção transversal.

As funções de interpolação $[N]_{ij}$, representam os modos de deslocamentos elásticos, sendo que cada uma das funções está associada com o deslocamento unitário de uma das coordenadas, com todas as outras coordenadas com deslocamento restringido a zero.

Na consideração dos efeitos do cisalhamento transversal na formulação, a seção transversal da ligação é considerada circular. Desta forma, os coeficientes de cisalhamento k_y e k_z podem ser determinados através da expressão [90]

$$k = k_y = k_z = \frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu} \quad , \quad (4.25)$$

onde k é o coeficiente de cisalhamento médio e ν é o coeficiente de Poisson.

As funções de interpolação mostradas em (4.1), são escritas de modo que os efeitos, separados e combinados, da inércia rotatória e cisalhamento podem ser facilmente observados. Por exemplo, se o parâmetro de cisalhamento ϕ é igual a zero, as funções de interpolação em (4.1) corresponderão ao caso em que o efeito de cisalhamento não é considerado. Se, adicionalmente, os termos η e δ são iguais a zero, as funções de interpolação resultantes são idênticas as utilizadas na referência [36], na qual ambos efeitos de inércia rotatória e cisalhamento não são considerados.

A representação do vetor posição de um ponto p sobre um volume infinitesimal, no elemento ij , com relação ao sistema inercial XYZ da figura 4.1, é dado por

$$\mathbf{r}_0^p = \mathbf{r}_0^i + \mathbf{r}_i^j \quad , \quad (4.26)$$

onde r_0^i é o vetor posição da origem do sistema inercial XYZ até a origem do sistema de coordenadas $X^i Y^i Z^i$ da ligação i , e r_i^j é o vetor posição da origem do sistema $X^i Y^i Z^i$ até o ponto sobre o elemento ij .

Considerando que o conjunto de coordenadas que representam os deslocamentos nodais pode ser representado como $p_F = [p_A, p_L]^T$, onde as coordenadas p_A representam as coordenadas nodais dos últimos nós das ligações anteriores a ligação i , por onde passa o eixo de giro das juntas, e p_L representando as coordenadas nodais do elemento ij , sobre a ligação i . Desta forma, a expressão (4.26), pode ser escrita como

$$r_0^P = r_{ij} = r_0^i(p_R, p_A) + r_i^j(p_R, p_A, p_L) \quad (4.27)$$

4.3 - Expressões de Energia

A energia cinética de um elemento j da ligação i , é dada por

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_{v_{ij}} \rho \left[\dot{r}_{ij} \right]^T \cdot \left[\dot{r}_{ij} \right] dv_{ij} \quad (4.28)$$

onde \dot{r}_{ij} é o vetor velocidade do volume infinitesimal, e pode ser expresso como

$$\dot{r}_{ij} = \left[\frac{\partial(r_0^i + r_i^j)}{\partial p_R} \right] \dot{p}_R + \left[\frac{\partial(r_0^i + r_i^j)}{\partial p_A} \right] \dot{p}_A + \left[\frac{\partial(r_i^j)}{\partial p_L} \right] \dot{p}_L \quad (4.29)$$

Isolando-se os termos de velocidade, tem-se

$$\dot{r}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(r_0^i + r_i^j)}{\partial p_R} & \frac{\partial(r_0^i + r_i^j)}{\partial p_A} & \frac{\partial(r_i^j)}{\partial p_L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_R \\ \dot{p}_A \\ \dot{p}_L \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Substituindo (4.30) em (4.28) e usando a notação $\dot{p}_{ij} = [\dot{p}_R \ \dot{p}_A \ \dot{p}_L]$, a energia cinética de um elemento ij fica

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \dot{p}_{ij}^T M_{ij}^e \dot{p}_{ij} \quad , \quad (4.31)$$

onde M_{ij}^e é a matriz massa do elemento ij .

Considerando $r_0^i = A(p_R, p_A)$ e $r_i^j = B(p_R, p_A, p_L)$, então a matriz massa pode ser expressa como

$$M_{ij}^e = \int_{v_{ij}} \rho \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_R} \right]^T \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_R} \right] & \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_R} \right]^T \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_A} \right] & \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_R} \right]^T \left[\frac{\partial(B)}{\partial p_L} \right] \\ \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_A} \right]^T \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_A} \right] & \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_A} \right]^T \left[\frac{\partial(B)}{\partial p_L} \right] & \\ \left[\frac{\partial(B)}{\partial p_L} \right]^T \left[\frac{\partial(B)}{\partial p_L} \right] & & \end{bmatrix} dv_{ij} \quad , \quad (4.32)$$

onde $\left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_R} \right]^T \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_R} \right]$ representa a inércia do elemento em torno das coordenadas p_R de corpo rígido; $\left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_R} \right]^T \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_A} \right]$ o acoplamento inercial entre as coordenadas de corpo rígido p_R e as coordenadas dos nós das ligações anteriores à ligação i , p_A ; $\left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_R} \right]^T \left[\frac{\partial(B)}{\partial p_L} \right]$ o acoplamento inercial entre as coordenadas p_R e as coordenadas nodais p_L do elemento ij ; $\left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_A} \right]^T \left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_A} \right]$ a inércia do elemento em relação as coordenadas p_A ; $\left[\frac{\partial(A+B)}{\partial p_A} \right]^T \left[\frac{\partial(B)}{\partial p_L} \right]$ o acoplamento inercial entre as coordenadas p_A e as coordenadas nodais p_L ; $\left[\frac{\partial(B)}{\partial p_L} \right]^T \left[\frac{\partial(B)}{\partial p_L} \right]$ a inércia do elemento em relação as suas coordenadas nodais.

A energia potencial de deformação elástica, para um elemento ij é dada por

$$V_{e_{ij}} = \frac{1}{2} \left\{ q_j^e \right\}^T \left[U_{ij}^e \right] \left\{ q_j^e \right\} , \quad (4.33)$$

onde $\left[U_{ij}^e \right]$ é a matriz de rigidez do elemento ij , e leva em consideração os efeitos devidos a flexão, cisalhamento, deslocamento axial e torção. E a energia potencial, devida a gravidade, para um elemento ij , é dada por

$$V_{g_{ij}} = \int_{v_{ij}} \rho g [1 \ 0 \ 0] r_{ij} dv_{ij} . \quad (4.34)$$

4.4 - Um Exemplo de Aplicação da Metodologia

Considere o manipulador articulado mostrado na figura 4.3, cuja cadeia cinemática pode ser representada conforme mostrado na figura 4.4.

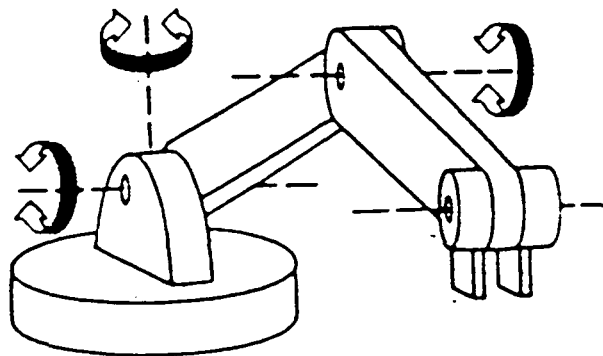


Fig. 4.3 - Manipulador articulado.

Então, para um elemento j da ligação 1 tem-se

$$\mathbf{r}_{1j} = \mathbf{r}_1^j = \mathbf{T}_0^1 \mathbf{r}_j, \quad (4.35)$$

onde \mathbf{r}_j é o vetor posição do ponto p com relação ao sistema de coordenadas da ligação $X^i Y^i Z^i$, sendo expresso por

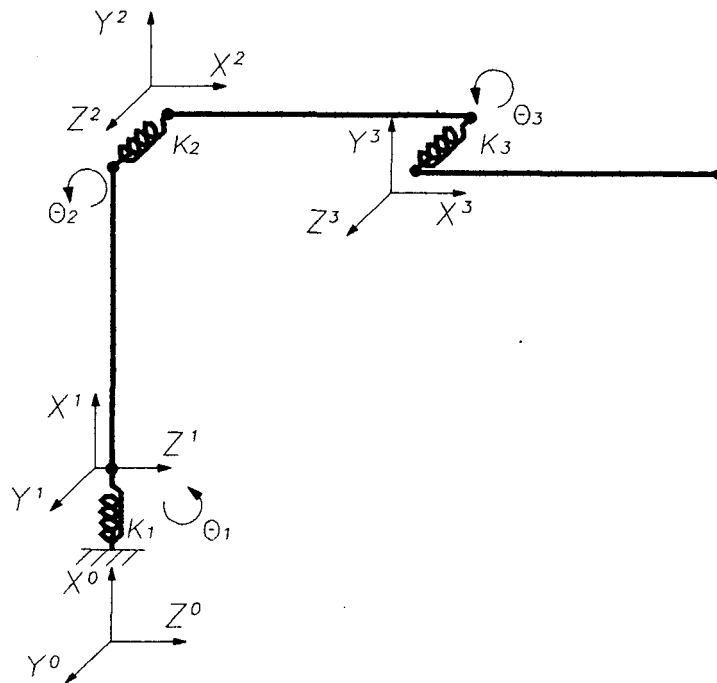


Fig. 4.3 - Representação esquemática da cadeia cinemática do sistema mostrado na fig. 4.3.

$$\mathbf{r}_j = \begin{Bmatrix} (j-1)l_1 + U_{1j} \\ V_{1j} \\ W_{1j} \end{Bmatrix}, \quad (4.36)$$

onde U_{1j} , V_{1j} e W_{1j} são os campos de deslocamento axial e transversais, que expressos em termos das coordenadas nodais, através das funções de interpolação, podem ser dados por

$$U_{1j} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 & 0 & N_9 & N_{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_j^e \end{Bmatrix}, \quad (4.37)$$

$$V_{1j} = \begin{bmatrix} 0 & N_{11} & 0 & N_{12} & 0 & N_{13} & 0 & N_{14} & 0 & N_{15} & 0 & N_{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_j^e \end{Bmatrix}, \quad (4.38)$$

$$W_{1j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{17} & N_{18} & N_{19} & 0 & 0 & 0 & N_{20} & N_{21} & N_{22} & 0 \end{bmatrix} \left\{ q_j^e \right\}, \quad (4.39)$$

$$\left\{ q_{1j}^e \right\}^T = \left\{ \begin{array}{cccccccc} q_{6j-5}^1 & q_{6j-4}^1 & q_{6j-3}^1 & q_{6j-2}^1 & q_{6j-1}^1 & q_{6j}^1 & q_{6j+1}^1 & q_{6j+2}^1 \\ q_{6j+3}^1 & q_{6j+4}^1 & q_{6j+5}^1 & q_{6j+6}^1 & & & & \end{array} \right\}, \quad (4.40)$$

e

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 \\ 0 & \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

com isto, o vetor posição em relação ao sistema inercial fica

$$r_{1j} = \left\{ \begin{array}{l} (j-1)\ell_1 + U_{1j} \\ V_{1j} \cos\theta_1 - W_{1j} \text{sen}\theta_1 \\ V_{1j} \text{sen}\theta_1 + W_{1j} \cos\theta_1 \end{array} \right\}. \quad (4.42)$$

Pode-se observar que

$$r_{1j} = f(\theta_1, q_{6j-5}^1, q_{6j-4}^1, q_{6j-3}^1, \dots, q_{6j+5}^1, q_{6j+6}^1) \quad (4.43)$$

ou seja, r_{1j} é função de θ_1 e das coordenadas nodais locais.

O vetor de coordenadas generalizadas para o elemento $1j$, fica $p_{1j}^T = \{\theta_1, q_{6j-5}^1, \dots, q_{6j+5}^1, q_{6j+6}^1\} = \{p_{1j,k}\} \quad k = 1, \dots, 13$, e a expressão para a energia cinética deste elemento pode ser escrita como

$$T_{1j} = \frac{1}{2} \dot{p}_{1j}^T M_{1j}^e \dot{p}_{1j}, \quad (4.44)$$

onde

$$M_{1j}^e(i,k) = M_{ik}^{1j} = \int_{v_{1j}} \rho \left[\frac{\partial r_{1j}^T}{\partial p_{1j,i}} \right] \cdot \left[\frac{\partial r_{1j}}{\partial p_{1j,k}} \right] dv_{1j}, \quad i = k = 1, \dots, 13. \quad (4.45)$$

A matriz massa elementar, cujos termos $M_{1j}^e(i,k)$ contém as

contribuições devidas ao movimento da corpo rígido e das deformações elásticas, é chamada, segundo a literatura, de Matriz de Inércia Generalizada. É positiva definida e simétrica, apresentando a seguinte forma:

$$M_{1j}^e = \begin{bmatrix} M_{1,1}^{1j} & M_{1,2}^{1j} & M_{1,3}^{1j} & M_{1,4}^{1j} & \dots & M_{1,11}^{1j} & M_{1,12}^{1j} & M_{1,13}^{1j} \\ M_{1,2}^{1j} & & & & & & & \\ M_{1,3}^{1j} & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ M_{1,12}^{1j} & & & & & & & \\ M_{1,13}^{1j} & & & & & & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m_{1j}^e \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

(4.46)

onde os termos de M_{1j}^e e m_{1j}^e são mostrados no Apêndice B.

Como a ligação 1 é dividida em n_1 elementos finitos, a energia cinética total, é obtida pela soma da energia de todos os elementos 1j da ligação, ou seja

$$T_1 = \sum_{j=1}^{n_1} T_{1j} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{2} \dot{p}_{1j}^T M_{1j} \dot{p}_{1j} = \frac{1}{2} \dot{\bar{p}}_{1j}^T M_{1j} \dot{\bar{p}}_{1j} \quad (4.47)$$

onde $\bar{p}_{1j} = \{ \theta_1 \ q_1^1 \ q_2^1 \ q_3^1 \ \dots \ q_{6n_1+4}^1 \ q_{6n_1+5}^1 \ q_{6n_1+6}^1 \}$.

Para um elemento j da ligação 2 tem-se

$$r_{2j} = r_0^2 + r_2^j, \quad (4.48)$$

onde r_0^2 é o vetor posição da origem do sistema local da ligação 2, $X^2Y^2Z^2$, com relação ao sistema inercial OXYZ; e r_2^j é o vetor posição de um ponto qualquer do elemento finito 2j em relação ao sistema inercial.

Como o centróide das ligações 1 e 2 (modeladas como vigas), não coincidem, a modelagem da interconecção

entre os elementos finitos destas é feita considerando-se que entre a extremidade inicial do primeiro elemento da segunda ligação (elemento 21), existe uma ligadura rígida (ou ombro), cujos terminais estão rigidamente embutidos no nó e no elemento, conforme mostra a figura 4.5.

Considerando-se também, que o sistema de coordenadas XYZ do elemento, fixo na extremidade inicial deste, e o sistema de coordenadas $X^*Y^*Z^*$ do nó são paralelos, e que a direção dos eixos Z e Z^* é coincidente, então a relação entre o vetor q contendo os deslocamentos e rotações da extremidade do elemento, e o vetor q^* contendo os deslocamentos e rotações do nó, é dada por:

$$q = D q^* \quad (4.49)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{Bmatrix}, \quad (4.50)$$

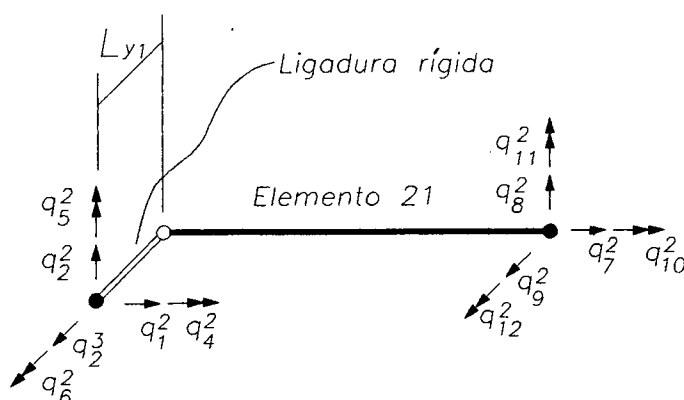


Fig. 4.5 - Ligadura rígida do elemento 21.

onde q_1 e q_1^* são os deslocamentos da extremidade do elemento e do nó, respectivamente, e q_2 e q_2^* as rotações da extremidade e do

nó. A matriz I é identidade de ordem 3, D é a matriz de transição entre os sistemas de coordenadas do elemento e do nó, dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & L_{y1} & 0 \\ -L_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

A expressão (4.47) pode ser reescrita como

$$r_{2j} = \left[T_1^0 \begin{Bmatrix} L_1 + q_{6n_1+1}^1 \\ L_{y1} + q_{6n_1+2}^1 \\ q_{6n_1+3}^1 \end{Bmatrix} \right] + \left[T_1^0 T_2^1 \begin{Bmatrix} (j+1)\ell_2 + U_{2j} \\ V_{2j} \\ W_{2j} \end{Bmatrix} \right], \quad (4.52)$$

onde T_1^0 e T_2^1 são as matrizes de transformação, respectivamente, entre $OXYZ$ e $X^1Y^1Z^1$, e entre $X^1Y^1Z^1$ e $X^2Y^2Z^2$, sendo

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \text{sen}\theta'_2 & \text{cos}\theta'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \text{cos}\theta'_2 & -\text{sen}\theta'_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

onde $\theta'_2 = (\theta_2 + q_{6n_1+5}^1)$, e L_{y1} representa o comprimento da ligadura rígida que faz a interconecção entre a ligação 1 e a ligação 2. As coordenadas $q_{6n_1+1}^1$, $q_{6n_1+2}^1$ e $q_{6n_1+3}^1$ representam os deslocamentos do último nó da ligação 1, e a coordenada $q_{6n_1+6}^1$ a rotação deste segundo a direção do eixo Y^1 da ligação, sendo n_1 o número de elementos da ligação 1.

Então observa-se que para um elemento na ligação 2

$$r_{2j} = f(\theta_1, \theta_2, q_{6n_1+1}^1, q_{6n_1+2}^1, q_{6n_1+3}^1, q_{6n_1+5}^1, q_{6j-5}^2, q_{6j-4}^2, q_{6j-3}^2, \dots, q_{6j+5}^2, q_{6j+6}^2) \quad (4.54)$$

ou seja, $r_{2j} = f(p_R, p_A, p_L)$ é função de θ_1 e θ_2 ; de algumas

coordenadas do segundo nó do último elemento da ligação 1, $q^1_{6n_1+1}, \dots, q^1_{6n_1+5}$; e das coordenadas nodais do j-ésimo elemento da ligação 2, $q^2_{6j-5}, \dots, q^2_{6j+6}$.

O vetor de coordenadas generalizadas para o elemento 2j pode ser escrito como $p_{2j}^T = \{\theta_1, \theta_2, q^1_{6n_1+1}, \dots, q^2_{6j+6}\} = \{p^2_{j,k}\}$ $k = 1, \dots, 18$. Com isto, a energia cinética deste elemento fica

$$T_{2j} = \frac{1}{2} \dot{p}_{2j}^T M_{2j}^e \dot{p}_{2j}, \tag{4.55}$$

$$M_{2j}^e = \begin{bmatrix} M_{1,1}^{2j} & M_{1,2}^{2j} & M_{1,3}^{2j} & \dots & M_{1,18}^{2j} \\ & M_{2,2}^{2j} & M_{2,3}^{2j} & \dots & M_{2,18}^{2j} \\ & & \cdot & & \vdots \\ & & & \cdot & \vdots \\ & & & & M_{6,6}^{2j} & \dots & M_{6,18}^{2j} \\ & & & & & \boxed{m_{2j}^e}_{12 \times 12} & \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & M_{18,18}^{2j} \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

sendo os termos de M_{2j}^e e m_{2j}^e mostrados no Apêndice B, e

$$M_{2j}^e(i,k) = M_{ik}^{2j} = \int_{v_{2j}} \rho \left[\frac{\partial r_{2j}}{\partial p_{2j,i}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial r_{2j}}{\partial p_{2j,k}} \right] dv_{2j}, \quad i = k = 1, \dots, 18. \tag{4.57}$$

A energia cinética total da ligação 2 é dada por:

$$T_2 = \sum_{j=1}^{n_2} T_{2j} = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{1}{2} \dot{p}_{2j}^T M_{2j} \dot{p}_{2j} = \frac{1}{2} \dot{\bar{p}}_2^T M_2 \dot{\bar{p}}_2 \tag{4.58}$$

onde $\bar{p}_2 = \{ \theta_1, \theta_2, q^1_{6n_1+1}, q^1_{6n_1+2}, q^1_{6n_1+3}, q^1_{6n_1+5}, q^2_1, q^2_2, q^2_3, \dots, q^2_{6n_1+4}, q^2_{6n_1+5}, q^2_{6n_1+6} \}$.

Para o j -ésimo elemento da terceira ligação, o vetor posição é expresso como

$$r_{3j} = r_0^3 + r_3^j, \quad (4.59)$$

ou

$$r_{3j} = \left[T_1^0 \left\{ \begin{array}{l} L_1 + q_{6n_1+1}^1 \\ L_{y1} + q_{6n_1+2}^1 \\ q_{6n_1+3}^1 \end{array} \right\} + T_1^0 T_2^1 \left\{ \begin{array}{l} L_2 + q_{6n_2+1}^2 \\ q_{6n_2+2}^2 \\ L_{z2} + q_{6n_2+3}^2 \end{array} \right\} \right] + \left[T_1^0 T_2^1 T_3^2 \left\{ \begin{array}{l} (j+1)\ell_3 + U_{3j} \\ v_{3j} \\ w_{3j} \end{array} \right\} \right], \quad (4.60)$$

onde

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta'_3 & -\text{sen}\theta'_3 & 0 \\ \text{sen}\theta'_3 & \cos\theta'_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

sendo $\theta'_3 = (\theta_3 + q_{6n_2+6}^2)$, e L_{z2} é o comprimento da ligadura rígida utilizada para a interconecção entre a ligação 2 e a ligação 3. As coordenadas $q_{6n_2+1}^2$, $q_{6n_2+2}^2$ e $q_{6n_2+3}^2$ representam os deslocamentos do último nó da ligação 2, e a coordenada $q_{6n_2+6}^2$ a rotação deste segundo a direção do eixo Z^2 da ligação, sendo n_2 o número de elementos da ligação 2.

Desta forma $r_{3j} = f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, q_{6n_1+1}^1, \dots, q_{6n_1+5}^1, q_{6n_2+1}^2, \dots, q_{6n_2+6}^2, q_{6j-5}^3, \dots, q_{6j+6}^3)$, e $p_{3j}^T = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, q_{6n_1+1}^1, \dots, q_{6j+6}^3\} = \{p_{j,k}^3\}$, $k = 1, \dots, 23$.

A energia cinética para o j -ésimo elemento da ligação 3 fica

$$T_{3j} = \frac{1}{2} \dot{p}_{3j}^T M_{3j}^e \dot{p}_{3j}, \quad (4.62)$$

onde

$$M_{3j}^e(i, k) = M_{ik}^{3j} = \int_{v_{3j}} \rho \left[\frac{\partial r_{3j}^T}{\partial p_{3j, i}} \right] \cdot \left[\frac{\partial r_{3j}}{\partial p_{3j, k}} \right] dv_{3j}, \quad i = k = 1, \dots, 23. \quad (4.63)$$

ou

$$M_{3j}^e = \begin{bmatrix} M_{1,1}^{3j} & M_{1,2}^{3j} & M_{1,3}^{3j} & \dots & M_{1,23}^{3j} \\ & M_{2,2}^{3j} & M_{2,3}^{3j} & \dots & M_{2,23}^{3j} \\ & & M_{3,3}^{3j} & \dots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & M_{11,11}^{3j} \dots M_{11,23}^{3j} \\ & & & & \boxed{[m_{3j}^e]_{12 \times 12}} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \end{bmatrix} \quad 23 \times 23 \quad (4.64)$$

os termos de M_{3j}^e são mostrados no Apêndice B.

A energia cinética total da ligação 3 é dada por:

$$T_3 = \sum_{j=1}^{n_3} T_{3j} = \sum_{j=1}^{n_3} \frac{1}{2} \dot{p}_{3j}^T M_{3j} \dot{p}_{3j} = \frac{1}{2} \dot{p}_{3j}^T M_{3j} \dot{p}_{3j} \quad (4.65)$$

onde $\dot{p}_{3j} = \{ \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad q_{6n_1+1}^1 \quad q_{6n_1+2}^1 \quad q_{6n_1+3}^1 \quad q_{6n_1+5}^1 \quad q_{6n_2+1}^2 \quad q_{6n_2+2}^2 \quad q_{6n_2+3}^2 \quad q_{6n_1+6}^2 \quad q_1^3 \quad q_2^3 \quad q_3^3 \quad \dots \quad q_{6n_1+4}^3 \quad q_{6n_1+5}^3 \quad q_{6n_1+6}^3 \}$.

A energia potencial para um elemento 1j é dada por

$$V_{1j} = V_{g_{1j}} + V_{e_{1j}} \quad (4.66)$$

$$V_{1j} = \int_{v_{1j}} \rho_1 g [1 \ 0 \ 0] T_1^0 \left\{ \begin{array}{l} (j-1)\ell_1 + U_{1j} \\ V_{1j} \\ W_{1j} \end{array} \right\} dv_{1j} + \frac{1}{2} \left\{ q_1^e \right\}^T [U_{1j}^e] \left\{ q_1^e \right\} \quad (4.67)$$

ou

$$V_{1j} = m_1 g \left[(j-1) \ell_1^2 + \frac{1}{2} \ell_1 (q_{6j-5}^1 + q_{6j+1}^1) \right] + \frac{1}{2} \left\{ q_j^e \right\}^T \left[U_{ij}^e \right] \left\{ q_j^e \right\} \quad (4.68)$$

onde m_1 representa a massa da ligação 1 por unidade de comprimento.

A energia potencial total da ligação 1 é dada por:

$$V_1 = \sum_{j=1}^{n_1} V_{1j} = m_1 g [1 \ 0 \ 0] T_1^0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_1}{2}(n_1-1)\ell_1^2 + \{\bar{R}_u^1\}\{\bar{q}_u^1\} \\ \{\bar{R}_v^1\}\{\bar{q}_v^1\} \\ \{\bar{R}_w^1\}\{\bar{q}_w^1\} \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \bar{q}_1 \right\}^T \left[\bar{U}_1 \right] \left\{ \bar{q}_1 \right\} \quad (4.69)$$

onde

$$\{\bar{R}_u^1\} = \left[\frac{\ell_1}{2} \ \ell_1 \mid \ell_1 \ \ell_1 \mid \dots \mid \ell_1 \ \ell_1 \mid \ell_1 \ \frac{\ell_1}{2} \right] \quad (4.70)$$

$$\{\bar{R}_v^1\} = \left[\frac{\ell_1}{2} \ \frac{\ell_1^2}{12} \mid \ell_1 \ 0 \mid \dots \mid \ell_1 \ 0 \mid \frac{\ell_1}{2} \ -\frac{\ell_1^2}{12} \right] \quad (4.71)$$

$$\{\bar{R}_w^1\} = \left[\frac{\ell_1}{2} \ -\frac{\ell_1^2}{12} \mid \ell_1 \ 0 \mid \dots \mid \ell_1 \ 0 \mid \frac{\ell_1}{2} \ \frac{\ell_1^2}{12} \right] \quad (4.72)$$

$$\{\bar{q}_u^1\} = \left\{ q_1^1 \ q_7^1 \ q_{13}^1 \ q_{19}^1 \ \dots \ q_{6n_1-5}^1 \ q_{6n_1+1}^1 \right\} \quad (4.73)$$

$$\{\bar{q}_v^1\} = \left\{ q_2^1 \ q_6^1 \ q_8^1 \ q_{12}^1 \ \dots \ q_{6n_1}^1 \ q_{6n_1+2}^1 \ q_{6n_1+6}^1 \right\} \quad (4.74)$$

$$\{\bar{q}_w^1\} = \left\{ q_2^1 \ q_9^1 \ q_9^1 \ q_{11}^1 \ \dots \ q_{6n_1-1}^1 \ q_{6n_1+3}^1 \ q_{6n_1+5}^1 \right\} \quad (4.75)$$

$$\{\bar{q}_1\} = \left\{ q_1^1 \ q_2^1 \ q_3^1 \ q_4^1 \ q_5^1 \ q_6^1 \ \dots \ q_{6n_1+4}^1 \ q_{6n_1+5}^1 \ q_{6n_1+6}^1 \right\} \quad (4.76)$$

A energia potencial para um elemento $2j$ é dada por:

$$V_{2j} = V_{g_{2j}} + V_{e_{2j}} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned}
V_{2j} = & \int_{\mathcal{V}_{2j}} \rho_2 \mathbf{g} [1 \ 0 \ 0] \left[\mathbf{T}_1^0 \left\{ \begin{array}{l} L_1 + q_{6n_1+1}^1 \\ L_{y1} + q_{6n_1+2}^1 \\ q_{6n_1+3}^1 \end{array} \right\} \right] + \\
& + \left[\mathbf{T}_1^0 \mathbf{T}_2^1 \left\{ \begin{array}{l} (j+1)\ell_2 + U_{2j} \\ V_{2j} \\ W_{2j} \end{array} \right\} \right] d\mathcal{V}_{2j} + \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{q}_2 \right\}^T \left[\mathbf{U}_2 \right] \left\{ \mathbf{q}_2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

ou

$$\begin{aligned}
V_{2j} = & m_2 \mathbf{g} [1 \ 0 \ 0] \left[\mathbf{T}_1^0 \left\{ \begin{array}{l} L_1 + q_{6n_1+1}^1 \\ L_{y1} + q_{6n_1+2}^1 \\ q_{6n_1+3}^1 \end{array} \right\} \right] \ell_2 + \\
& + \mathbf{T}_2^0 \left\{ \begin{array}{l} (j+1)\ell_2^2 + (\ell_2/2)q_{6j-5}^2 + (\ell_2/2)q_{6j+1}^2 \\ (\ell_2/2)q_{6j-4}^2 + (\ell_2^2/12)q_{6j}^2 + (\ell_2/2)q_{6j+2}^2 - (\ell_2^2/12)q_{6j+6}^2 \\ (\ell_2/2)q_{6j-3}^2 + (\ell_2^2/12)q_{6j-1}^2 + (\ell_2/2)q_{6j+3}^2 - (\ell_2^2/12)q_{6j+5}^2 \end{array} \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{q}_2 \right\}^T \left[\mathbf{U}_2 \right] \left\{ \mathbf{q}_2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
V_{2j} = & m_2 g \ell_2 \left\{ \left(L_1 + q_{6n_1+1}^1 \right) + (j-1)\ell_2 \text{sen}\theta'_2 + \frac{1}{2} \left(q_{6j-5}^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + q_{6j+1}^2 \right) \text{sen}\theta'_2 + \left[\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{1}{12} \ell_2 q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{12} \ell_2 q_{6j+6}^2 \right] \text{cos}\theta'_2 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{q}_2 \right\}^T \left[\mathbf{U}_2 \right] \left\{ \mathbf{q}_2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Para a ligação 2, a energia potencial total fica:

$$V_2 = \sum_{j=1}^{n_2} V_{2j} = m_2 \mathbf{g} [1 \ 0 \ 0] \left[\mathbf{T}_1^0 \left\{ \begin{array}{l} L_1 + q_{6n_1+1}^1 \\ L_{y1} + q_{6n_1+2}^1 \\ q_{6n_1+3}^1 \end{array} \right\} \right] n_2 \ell_2 +$$

$$+ T_2^0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{2}(n_2 - 1)\ell_2^2 + \{\bar{R}_u\}\{\bar{q}_u^2\} \\ \{\bar{R}_v\}\{\bar{q}_v^2\} \\ \{\bar{R}_w\}\{\bar{q}_w^2\} \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \bar{q}_2 \right\}^T [\bar{U}_2] \left\{ \bar{q}_2 \right\} \quad (4.81)$$

A energia potencial para um elemento 3j é dada por:

$$V_{3j} = V_{g_{3j}} + V_{e_{3j}} \quad (4.82)$$

ou

$$V_{3j} = \int_{v_{3j}} \rho_3 g [1 \ 0 \ 0] \left[T_1^0 \left\{ \begin{array}{l} L_1 + q_{6n_1+1}^1 \\ L_{y1} + q_{6n_1+2}^1 \\ q_{6n_1+3}^1 \end{array} \right\} + T_2^0 \left\{ \begin{array}{l} L_2 + q_{6n_2+1}^2 \\ q_{6n_2+2}^2 \\ L_{z2} + q_{6n_2+3}^2 \end{array} \right\} + \right. \\ \left. + T_3^0 \left\{ \begin{array}{l} (j+1)\ell_3 + U_{3j} \\ V_{3j} \\ W_{3j} \end{array} \right\} \right] dv_{3j} + \frac{1}{2} \left\{ q_3 \right\}^T [U_3] \left\{ q_3 \right\} \quad (4.83)$$

$$V_{3j} = m_3 g [1 \ \theta \ 0] \left[T_1^0 \left\{ \begin{array}{l} L_1 + q_{6n_1+1}^1 \\ L_{y1} + q_{6n_1+2}^1 \\ q_{6n_1+3}^1 \end{array} \right\} \ell_3 + T_2^0 \left\{ \begin{array}{l} L_2 + q_{6n_2+1}^2 \\ q_{6n_2+2}^2 \\ L_{z2} + q_{6n_2+3}^2 \end{array} \right\} \ell_3 + \right. \\ \left. + T_3^0 \left\{ \begin{array}{l} (j+1)\ell_3^2 + (\ell_3/2)q_{6j-5}^3 + (\ell_3/2)q_{6j+1}^3 \\ (\ell_3/2)q_{6j-4}^3 + (\ell_3^2/12)q_{6j}^3 + (\ell_3/2)q_{6j+2}^3 - (\ell_3^3/12)q_{6j+6}^3 \\ (\ell_3/2)q_{6j-3}^3 + (\ell_3^2/12)q_{6j-1}^3 + (\ell_3/2)q_{6j+3}^3 - (\ell_3^2/12)q_{6j+5}^3 \end{array} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ q_3 \right\}^T [U_3] \left\{ q_3 \right\} \right] \quad (4.84)$$

$$V_{3j} = m_3 g \ell_3 \left\{ \left(L_1 + q_{6n_1+1}^1 \right) + \left(L_2 + q_{6n_2+1}^2 \right) \text{sen}\theta'_2 + q_{6n_2+2}^2 \text{cos}\theta'_2 + \right. \\ \left. + \left[(j-1)\ell_3 + \frac{1}{2} \left(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3 \right) \right] \text{sen}\theta'_{23} + \left[\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{1}{12} \ell_3 q_{6j}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{1}{12} \ell_3 q_{6j+6}^3 \right] \text{cos}\theta'_{23} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ q_3 \right\}^T [U_3] \left\{ q_3 \right\} \quad (4.85)$$

onde $\theta'_{23} = (\theta'_2 + \theta'_3)$.

Para a ligação 3, a energia potencial total é dada por:

$$\begin{aligned}
 V_3 = & \sum_{j=1}^{n_3} V_{3j} = m_3 g [1 \ 0 \ \theta] \left[T_1^0 \left\{ \begin{array}{l} L_1 + q_{6n_1+1}^1 \\ L_{y1} + q_{6n_1+2}^1 \\ q_{6n_1+3}^1 \end{array} \right\} n_3 \ell_3 + \right. \\
 & + T_2^0 \left\{ \begin{array}{l} L_2 + q_{6n_2+1}^2 \\ q_{6n_2+2}^2 \\ L_{z2} + q_{6n_2+3}^2 \end{array} \right\} n_3 \ell_3 + T_3^0 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{n_3}{2}(n_3 - 1)\ell_3^2 + \{\bar{R}_u^3\}\{\bar{q}_u^3\} \\ \{\bar{R}_v^3\}\{\bar{q}_v^3\} \\ \{\bar{R}_w^3\}\{\bar{q}_w^3\} \end{array} \right\} \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \bar{q}_3 \right\}^T \left[\bar{U}_3 \right] \left\{ \bar{q}_3 \right\} \quad (4.86)
 \end{aligned}$$

A energia potencial de deformação elástica, para um elemento ij é independente das coordenadas p_R e p_A , e dada por

$$V_{e_{ij}} = \frac{1}{2} \left\{ q_j^e \right\}^T \left[U_{ij}^e \right] \left\{ q_j^e \right\}, \quad (4.87)$$

onde $\left[U_{ij}^e \right]$ é a matriz de rigidez do elemento ij , cujos elementos são apresentados no Apêndice C. Esta matriz leva em conta os efeitos devidos a flexão, cisalhamento, deslocamento axial e torção.

Os efeitos devidos a gravidade são obtidos da seguinte expressão

$$G_{ij} = \frac{\partial V}{\partial p_{ij,k}} \quad , \quad k = 1, \dots, n_{ij} \quad (4.88)$$

onde os vetores elementares contendo estes efeitos são apresentados no Apêndice D.

Os termos devidos aos efeitos giroscópicos são obtidos da seguinte expressão

$$C_{klm}^{ij} = \sum_l \sum_m \left[\frac{\partial M_{(k,l)}^{ij}}{\partial p_{ij,m}} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{(l,m)}^{ij}}{\partial p_{ij,k}} \right] \dot{p}_{ij,l} \dot{p}_{ij,m} \quad (4.89)$$

As matrizes elementares de cada ligação que contem estes efeitos, apresentam um arranjo idêntico ao das matrizes massa, e são mostradas no Apêndice E.

Como carregamentos externos, são considerados apenas as forças e momentos externos que atuam na extremidade livre da cadeia cinemática, conforme mostra a figura 4.6.

As forças e momentos externos podem ser denotados por $P = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T$, e são relacionadas com as forças generalizadas através da seguinte relação [79]

$$Q = J^T P \quad , \quad (4.90)$$

onde Q é o vetor das forças generalizadas e J é a matriz Jacobiano, associada com a transformação de coordenadas. No Apêndice F são apresentados o Jacobiano e o vetor Q .

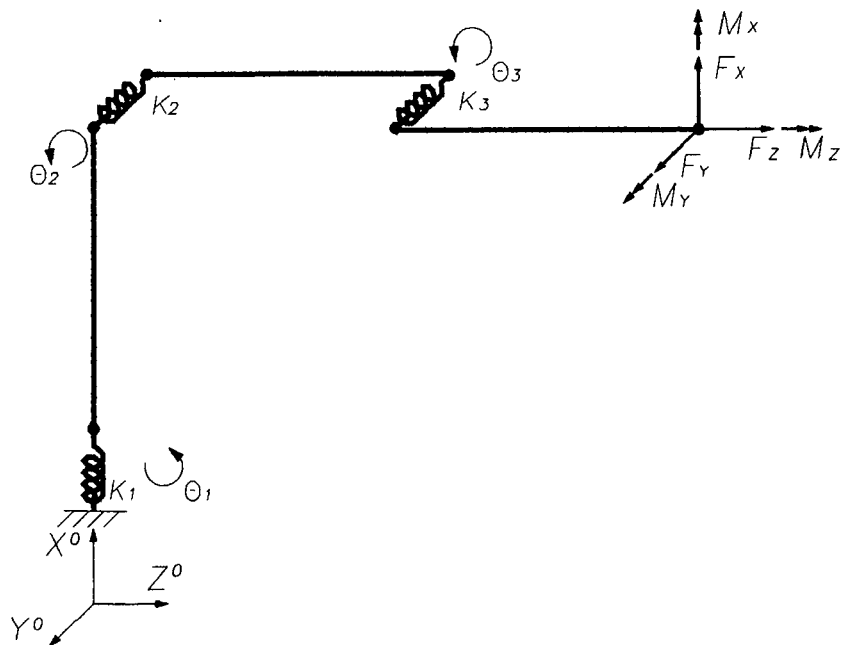


Fig. 4.6 - Carregamentos externos na cadeia cinemática.

4.4.1 - Condições de Contorno

Considerando que cada ligação i comporta-se como uma viga do tipo engastada-livre, tem-se então, no primeiro nó de cada ligação a imposição de que tanto os deslocamentos como as rotações sejam zero. Ou seja, $q_1^i(t) = q_2^i(t) = q_3^i(t) = q_4^i(t) = q_5^i(t) = q_6^i(t) = 0$.

Estas condições de contorno, fazem com que as energias cinética e potencial de cada ligação sejam expressas da seguinte forma:

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{p}_1^T M_1 \dot{p}_1 \quad (4.91)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{p}_2^T M_2 \dot{p}_2 \quad (4.92)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \dot{p}_3^T M_3 \dot{p}_3 \quad (4.93)$$

onde

$$p_1 = \{ \theta_1 \ \psi_1 \}, \quad (4.94)$$

$$p_2 = \{ \theta_1 \ \theta_2 \ q_{6n_1+1}^1 \ q_{6n_1+2}^1 \ q_{6n_1+3}^1 \ q_{6n_1+5}^1 \ \psi_2 \}, \quad (4.95)$$

$$p_3 = \{ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ q_{6n_1+1}^1 \ q_{6n_1+2}^1 \ q_{6n_1+3}^1 \ q_{6n_1+5}^1 \ q_{6n_2+1}^2 \ q_{6n_2+2}^2 \ q_{6n_2+3}^2 \ q_{6n_1+6}^2 \ \psi_3 \}, \quad (4.96)$$

$$\psi_i = \{ q_7^i \ q_8^i \ q_9^i \ q_{10}^i \ \dots \ q_{6n_i+4}^i \ q_{6n_i+5}^i \ q_{6n_i+6}^i \}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.97)$$

$$V_1 = m_1 g [1 \ 0 \ 0] T_1^0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{2}(n_1 - 1)l_1^2 + \{R_u^1\}\{q_u^1\} \\ \{R_v^1\}\{q_v^1\} \\ \{R_w^1\}\{q_w^1\} \end{array} \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \psi_1 \right\}^T [U_1] \left\{ \psi_1 \right\} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned}
V_2 = m_2 g [1 \ 0 \ 0] & \left[T_1^0 \left\{ \begin{array}{l} L_1 + q_{6n_1+1}^1 \\ L_{y1} + q_{6n_1+2}^1 \\ q_{6n_1+3}^1 \end{array} \right\} n_2 \ell_2 + \right. \\
& + T_2^0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_2}{2} (n_2 - 1) \ell_2^2 + \{R_u^2\} \{q_u^2\} \\ \{R_v^2\} \{q_v^2\} \\ \{R_w^2\} \{q_w^2\} \end{array} \right\} \left. + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \psi_2 \right\}^T [U_2] \left\{ \psi_2 \right\} \quad (4.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3 = m_3 g [1 \ 0 \ 0] & \left[T_1^0 \left\{ \begin{array}{l} L_1 + q_{6n_1+1}^1 \\ L_{y1} + q_{6n_1+2}^1 \\ q_{6n_1+3}^1 \end{array} \right\} n_3 \ell_3 + \right. \\
& + T_2^0 \left\{ \begin{array}{l} L_2 + q_{6n_2+1}^2 \\ q_{6n_2+2}^2 \\ L_{z2} + q_{6n_2+3}^2 \end{array} \right\} n_3 \ell_3 + T_3^0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_3}{2} (n_3 - 1) \ell_3^2 + \{R_u^3\} \{q_u^3\} \\ \{R_v^3\} \{q_v^3\} \\ \{R_w^3\} \{q_w^3\} \end{array} \right\} \left. + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \psi_3 \right\}^T [U_3] \left\{ \psi_3 \right\} \quad (4.100)
\end{aligned}$$

Considerando a modelagem da flexibilidade das juntas de acordo com o procedimento mostrado no capítulo anterior, as equações de movimento do sistema são obtidas via equações de Lagrange expressas da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = Q_i \quad (4.101)$$

onde

$L = T - V$ (lagrangiano do sistema),

$T =$ energia cinética total do sistema (ligações + juntas),

$V =$ energia potencial total do sistema (ligações + juntas),

Q = forças generalizadas,

p = coordenadas generalizadas do sistema (ligações + juntas).

O conjunto de equações diferenciais obtido, pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} M_{00} & M_{0q} & 0 \\ M_{q0} & M_{qq} & 0 \\ 0 & 0 & M_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{00} & C_{0q} & 0 \\ C_{q0} & C_{qq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 & -K \\ 0 & U & 0 \\ -K & 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ q \\ \phi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G_0 \\ G_q \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_0 \\ Q_q \\ Q_\phi \end{Bmatrix} \quad (4.102)$$

ou

$$[M(p)]\{\ddot{p}\} + [C(\dot{p}, p)]\{\dot{p}\} + [K]\{p\} + \{G(p)\} = \{Q(p)\}, \quad (4.103)$$

onde $[M(p)]$ é a matriz de inércia do sistema; $[C(\dot{p}, p)]$ é a matriz que contém os efeitos giroscópicos; $[K]$ é a matriz que engloba a rigidez das ligações e das juntas; $\{G(p)\}$ é o vetor que contém as cargas devidas à gravidade, e o vetor $\{Q(p)\}$ os carregamentos externos. O vetor das coordenadas generalizadas é dado por $\{p\} = \{\theta \ q \ \phi\}^T$, onde os θ 's são as coordenadas de corpo rígido p_r , os q 's representam as coordenadas nodais do modelo, englobando as coordenadas p_A e p_L , e os ϕ 's são as coordenadas dos rotores dos atuadores.

CAPÍTULO 5

DESCRICAÇÃO DE UM PROGRAMA PARA A SIMULAÇÃO DE MANIPULADORES FLEXÍVEIS

5.1 - Introdução

Conforme já exposto no Capítulo 1, o trabalho proposto consiste no desenvolvimento e implementação de uma metodologia de modelagem e simulação de manipuladores flexíveis, que deverá possibilitar o estudo do comportamento destes sistemas.

Neste capítulo são apresentadas as linhas gerais de um programa, desenvolvido com o objetivo de, em uma primeira etapa, executar a tarefa de modelagem matemática do sistema físico, de acordo com a metodologia de modelagem mostrada no capítulo anterior. Numa segunda etapa, com base nas equações obtidas, possibilitar a simulação propriamente dita, onde através de métodos numéricos apropriados, o comportamento do sistema, para diferentes situações, será obtido. O programa foi desenvolvido para manipuladores que contenham apenas juntas do tipo rotacional, e destes serão consideradas somente as ligações anteriores ao conjunto de ligações que forma o pulso do manipulador.

5.2 - Descrição do Programa

A apresentação e descrição serão feitas com base no fluxograma mostrado na figura 5.1, que em linhas gerais representa o algoritmo elaborado.

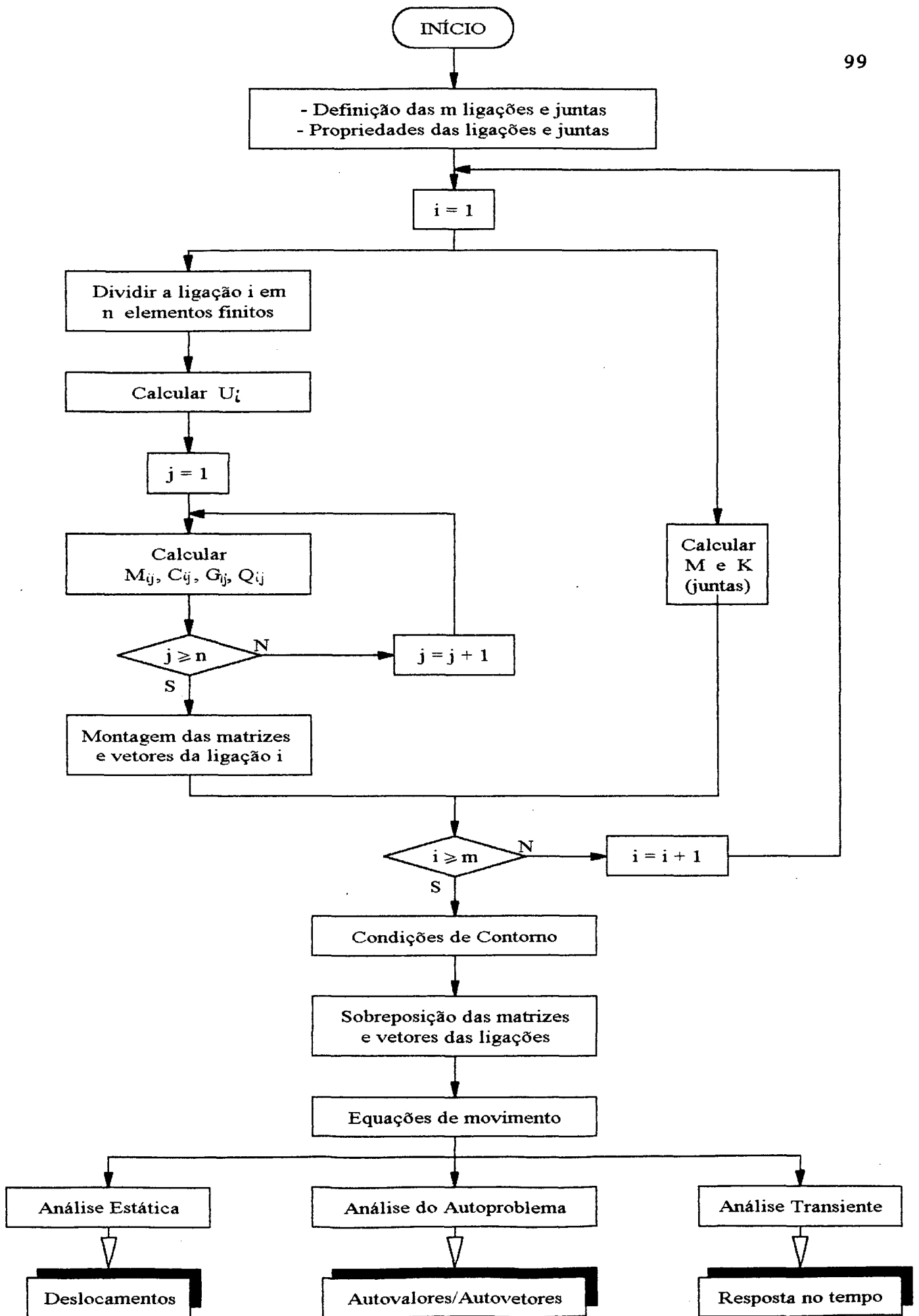


Fig. 5.1 - Fluxograma do programa.

5.2.1 - Entrada de dados

Conforme mostrado na figura 1.1, a etapa de análise ocorre após já definidos, a nível preliminar, os projetos cinemático e estrutural, portanto quando já definida a cadeia cinemática e escolhidos a forma, o material das ligações, os atuadores e as transmissões. Então, a entrada de dados se constituirá dos dados referentes à geometria das ligações e juntas, dos sistemas de coordenadas associados, dos parâmetros dos atuadores, dos materiais, de suas propriedades elásticas e inerciais, dos carregamentos externos, e do número de elementos utilizados na discretização das ligações. O modelo matemático do sistema, que basicamente é composto de ligações e juntas, será obtido através da formulação via equações de Lagrange, e descrito a seguir.

5.2.2 - Modelagem das ligações

A modelagem de cada ligação será feita utilizando a técnica de elementos finitos, de acordo com a sistemática desenvolvida no capítulo anterior. Inicialmente são geradas as matrizes e vetores elementares de cada ligação, e a partir destas é feita uma sobreposição, de modo a obter-se as matrizes e vetores das ligações.

A dimensão das matrizes de cada ligação i , é igual a soma das i coordenadas p_R , das $4(i-1)$ coordenadas p_A e das $6(n_i + 1)$ coordenadas p_L , onde i é o número da ligação e n_i é o número de elementos utilizado na discretização da ligação.

5.2.3 Modelagem das juntas

Como o sistema computacional será destinado à modelagem de manipuladores que contenham somente juntas do tipo rotacional, a modelagem destas será feita de maneira idêntica a descrita no capítulo anterior, onde a energia cinética é considerada como sendo somente devida a velocidade angular do rotor do atuador em torno de seu eixo, e a energia potencial sendo devida apenas à elasticidade da transmissão, que é tratada como uma mola torcional linear.

5.2.4 - Equações do movimento

Com as matrizes das ligações obtidas, o próximo passo é a obtenção das matrizes globais do sistema, pela sobreposição das matrizes das ligações, que após a aplicação das condições de contorno apresentam a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c|c|c} M_{\theta\theta} & M_{\theta q} & 0 \\ \hline M_{q\theta} & M_{qq} & 0 \\ \hline 0 & 0 & M_{\phi\phi} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c|c} C_{\theta\theta} & C_{\theta q} & 0 \\ \hline C_{q\theta} & C_{qq} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \\
 & + \left[\begin{array}{c|c|c} K & 0 & -K \\ \hline 0 & U & 0 \\ \hline -K & 0 & K \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \theta \\ u \\ \phi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G_{\theta} \\ G_q \\ G_{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{\theta} \\ Q_u \\ Q_{\phi} \end{Bmatrix} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

onde observa-se o desacoplamento entre as inércias das ligações com a inércia dos rotores dos atuadores, e o desacoplamento entre a rigidez das ligações e das juntas. As submatrizes diagonais M_{00} e K contêm respectivamente as inércias dos atuadores e rigidez

das juntas.

A expressão (5.1) pode ser escrita como

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q + G = Q \quad (5.2)$$

onde a matriz M representa a parte inercial das equações, a matriz C os efeitos giroscópicos (Coriolis e centrífugos), a matriz K a rigidez das ligações e juntas, a matriz U a rigidez das ligações, G o vetor das forças gravitacionais, o vetor Q as forças generalizadas e o vetor q as coordenadas generalizadas.

5.3 - Obtenção das respostas (simulação)

Após a modelagem e obtenção das equações do movimento, começa a etapa de simulação, cujo objetivo principal é a verificação do comportamento estático e principalmente dinâmico do equipamento modelado.

Com base nas equações obtidas, e com o emprego de métodos numéricos adequados, pode-se efetuar três diferentes simulações, onde é possível analisar o comportamento estático, dos autovalores e autovetores e transiente. Estas etapas são descritas a seguir.

5.3.1 - Análise Estática

Nesta análise, o objetivo é a determinação da resposta estática da estrutura para diferentes condições de carregamento e posições da cadeia cinemática. Para tal, serão desprezados os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação (5.1), de modo a obter-se as seguintes equações de equilíbrio estático:

$$\begin{bmatrix} K & 0 & -K \\ 0 & U & 0 \\ -K & 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{\theta}(\theta, u) \\ Q_u(\theta, u) \\ Q_{\phi}(\theta, u) \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

onde o vetor carga $Q(\theta, u)$ contém as parcelas devidas as forças externas e à gravidade.

Devido ao vetor carga Q ser função das coordenadas θ e u , as quais são também as incógnitas do problema, foi desenvolvido um procedimento para a solução deste problema, o qual é descrito a seguir.

Na obtenção do comportamento estático do sistema o objetivo, é determinar o deslocamento das coordenadas generalizadas para diferentes posições do sistema. Como nesta situação é conhecido o valor das coordenadas ϕ 's, e considera-se não haver movimento algum nos atuadores, o problema consiste na determinação das coordenadas de corpo rígido das ligações θ 's, e das coordenadas nodais u 's das ligações.

Como pode ser observado, os elementos do vetor dos carregamentos do sistema de equações lineares (5.3), são função das coordenadas θ 's e u 's, que são as incógnitas do sistema.

Para uma primeira aproximação para o vetor dos carregamentos, são utilizados valores para os θ 's, fornecidos pela seguinte relação

$$\begin{Bmatrix} \theta_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi \end{Bmatrix} - [K]^{-1} \begin{Bmatrix} Q_{\phi_R} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

que é obtida da expressão (5.3), considerando o manipulador contendo juntas flexíveis e ligações rígidas, e $\begin{Bmatrix} Q_{\phi_R} \end{Bmatrix}$ sendo o torque nas juntas considerando o manipulador rígido. Desta forma, $\begin{Bmatrix} \theta_R \end{Bmatrix}$ representa o vetor contendo os deslocamentos de corpo

rígido das ligações devido a flexibilidade das juntas.

Com estes valores dos θ_R 's obtidos, e considerando o desacoplamento entre a rigidez das ligações e das juntas, parte-se para uma determinação aproximada das coordenadas nodais utilizando o seguinte sistema de equações

$$[U] \{u\}^{(i)} = \{Q_u(\theta_R, u_R)\} \quad (5.5)$$

onde Q_u é aproximado utilizando-se os θ_R 's e os os valores de u_R como sendo iguais a zero.

Com os θ_R 's e os u_R 's obtidos parte-se para a determinação inicial das coordenadas θ 's utilizando a seguinte expressão

$$\{\theta\}^{(i)} = [K]^{-1} \{Q_o(\theta_R, u^{(i)})\} + \{\phi\} \quad (5.6)$$

com $\{\theta\}^{(i)}$ obtido parte-se para a obtenção de $\{u\}^{(i+1)}$, e assim sucessivamente seguindo o seguinte esquema iterativo

$$[U] \{u\}^{(i+1)} = \{Q_u(\theta^{(i)}, u^{(i)})\} \quad (5.7)$$

$$\{\theta\}^{(i+1)} = [K]^{-1} \{Q_o(\theta^{(i)}, u^{(i+1)})\} + \{\phi\} \quad (5.8)$$

onde $\{u\}^{(1)}$ e $\{\theta\}^{(1)}$ são obtidos das expressões (5.5) e (5.6), respectivamente.

O processo iterativo segue até que ocorra a convergência, ou seja $\sum |q^{(i-1)} - q^{(i)}| \leq \text{TOL}$.

Nesta etapa, também pode-se obter a resposta estática do sistema considerando-se somente a flexibilidade das ligações.

Para isto, são utilizadas as relações (5.5) e (5.7) e considerando-se $\theta = \theta_R = \phi$.

A resolução dos sistemas de equações anteriormente mostrados é feita utilizando-se o método de Gauss com pivotamento.

5.3.2 - Análise dos autovalores e autovetores

O objetivo principal desta análise é a determinação das frequências naturais e modos de vibração do sistema modelado. Esta informação é importante, pois permite que seja definida a frequência do controlador e verificadas as excitações externas, de modo a obter-se um comportamento não-instável por parte do sistema. Esta análise deverá ser feita para várias posições do manipulador, dentro de seu espaço de trabalho, uma vez que a inércia do sistema é dependente da sua configuração.

O autoproblema a ser tratado nesta etapa é representado pela seguinte equação

$$\left[\begin{array}{c|c} K & \\ \hline & U \end{array} \right] [\Phi] = [\Lambda] \left[\begin{array}{c|c} M_{00} & M_{0q} \\ \hline M_{q0} & M_{qq} \end{array} \right] [\Phi] \quad (5.9)$$

onde $[\Phi]$ é a matriz cujas colunas são os autovetores, e $[\Lambda]$ é uma matriz diagonal que contém os autovalores.

Para a solução do autoproblema, implementou-se no programa o método da Iteração Subespacial [64], o qual fornece os primeiros p autovalores ordenados, bem como os correspondentes autovetores.

Assim como na análise estática, pode-se obter os autovalores e autovetores do sistema, considerando-se apenas as

flexibilidade das ligações. Para isto, o autoproblema é montado da seguinte forma

$$[U][\Phi] = [\Lambda^*][M_{qq}][\Phi] \quad (5.10)$$

5.3.3 - Análise Transiente

O objetivo principal desta etapa é verificar o comportamento da estrutura, quando a mesma é movimentada dentro do seu espaço de trabalho.

Os movimentos da estrutura são definidos através de trajetórias que descrevem operações possíveis de serem realizadas pelo manipulador.

As informações geradas nesta etapa serão os deslocamentos sofridos pelas coordenadas generalizadas, devidos à flexibilidade dos componentes estruturais, ao longo do tempo.

Nesta análise será também incluído o amortecimento de Rayleigh, através da introdução da matriz de amortecimento B, que é obtida como uma combinação linear das matrizes massa e rigidez:

$$B = \alpha M + \beta K \quad (5.11)$$

onde o coeficiente de amortecimento de massa α , e o coeficiente de amortecimento de rigidez β são obtidos da solução simultânea das seguintes equações, para dois modos de vibração:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (5.12)$$

onde ξ_i é a relação de amortecimento e ω_i a frequência do modo i .

Para a obtenção da resposta, foi implementado um dos métodos da família de métodos de Newmark, amplamente usada em problemas de dinâmica estrutural não-linear [81],[82],[83], no caso o método de Newmark $\beta = 1/4$ (também conhecido como regra trapezoidal, método da aceleração média ou método da aceleração média constante). Os passos básicos da solução numérica são dados a seguir.

Assumindo que a solução no tempo t_n $\{q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n\}$ é conhecida, tem-se:

$$M(q_n)\ddot{q}_n + C(q_n, \dot{q}_n) + K q_n = Q_n \quad (5.13)$$

onde $Q_n = Q(t_n)$.

Como o método é implícito, o equilíbrio dinâmico deve ser obtido no instante t_{n+1} , ou seja

$$M \ddot{q}_{n+1} + C \dot{q}_{n+1} + K q_{n+1} = Q_{n+1} \quad (5.14)$$

As relações entre \ddot{q}_{n+1} , \dot{q}_{n+1} e q_{n+1} são dadas por [81]:

$$\ddot{q}_{n+1} = \frac{1}{h^2\beta} (q_{n+1} - q_n) - \frac{1}{h\beta} \dot{q}_n - \frac{1/2 - \beta}{\beta} \ddot{q}_n \quad (5.15)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h(1 - \gamma)\ddot{q}_n + h\gamma\ddot{q}_{n+1} \quad (5.16)$$

onde $h = t_{n+1} - t_n$ é o tamanho do passo de tempo, e β e γ são os parâmetros do algoritmo de Newmark. No caso da regra trapezoidal, estes parâmetros são escolhidos como sendo $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$.

Substituindo (5.15) em (5.16) e depois ambas em (5.14). tem-se um sistema de equações algébricas não-lineares em termos de q_{n+1} . Estas equações serão resolvidas iterativamente através do método de Newton-Raphson [84]. Então, considerando o

equilíbrio em t_{n+1} , tem-se que:

$$f(q) = 0 \quad (5.17)$$

$$f(q) = Q_{n+1} - M \ddot{q}_{n+1} - C \dot{q}_{n+1} - K q_{n+1} \quad (5.18)$$

assumindo que na solução iterativa conhece-se o valor de $q_{n+1}^{(i)}$, $f(q)$ será expandido em série de Taylor na vizinhança de $q = q_{n+1}^{(i)}$, onde desprezados os termos de ordem superior, tem-se:

$$f(q) = f(q_{n+1}^{(i)}) + \left. \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right|_{q = q_{n+1}^{(i)}} (q - q_{n+1}^{(i)}) \quad (5.19)$$

substituindo (5.18) em (5.19) e usando (5.17), tem-se que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right|_{q = q_{n+1}^{(i)}} (q - q_{n+1}^{(i)}) &= Q_{n+1} - M \ddot{q}_{n+1}^{(i)} - \\ &- C \dot{q}_{n+1}^{(i)} - K q_{n+1}^{(i)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde é assumido que as cargas externas são independentes dos deslocamentos.

Definindo-se os deslocamentos incrementais como:

$$\Delta q_{n+1}^{(i+1)} = (q - q_{n+1}^{(i)}) \quad (5.21)$$

e de (5.15) e (5.16) em (5.18), tem-se

$$\left. \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right|_{q = q_{n+1}^{(i)}} = -\frac{1}{h^2 \beta} M - \frac{\gamma}{h \beta} C - K \quad (5.22)$$

então o sistema de equações algébricas não-lineares fica:

$$\left[\frac{1}{h^2 \beta} M + \frac{\gamma}{h \beta} C + K \right] \Delta q_{n+1}^{(i+1)} = Q_{n+1} - M \ddot{q}_{n+1}^{(i)} -$$

$$- C \dot{q}_{n+1}^{(i)} - K q_{n+1}^{(i)} \quad (5.23)$$

Escolhendo $q_{n+1}^{(0)}$ como sendo igual ao valor convergido no prévio incremento de tempo q_n , os valores iniciais de $\dot{q}_{n+1}^{(0)}$ e $\ddot{q}_{n+1}^{(0)}$ podem ser obtidos através de (5.15) e (5.16):

$$\ddot{q}_{n+1}^{(0)} = - \frac{1}{h\beta} \dot{q}_n - \frac{1/2 - \beta}{\beta} \ddot{q}_n \quad (5.24)$$

$$\dot{q}_{n+1}^{(0)} = \dot{q}_n + h(1 - \gamma)\ddot{q}_n + h\gamma\ddot{q}_{n+1}^{(0)} \quad (5.25)$$

$$q_{n+1}^{(0)} = q_n \quad (5.26)$$

Como pode-se notar, a expressão (5.23)   da forma:

$$\bar{K}(q_{n+1}^{(i)}, \dot{q}_{n+1}^{(i)}) \Delta q_{n+1}^{(i+1)} = \bar{F}(\ddot{q}_{n+1}^{(i)}, \dot{q}_{n+1}^{(i)}, q_{n+1}^{(i)}) \quad (5.27)$$

Após obter-se $\Delta q_{n+1}^{(i+1)}$, pode-se obter os valores de q_{n+1} , \dot{q}_{n+1} , \ddot{q}_{n+1} na itera o $(i + 1)$, que são dados por:

$$q_{n+1}^{(i+1)} = q_{n+1}^{(i)} + \Delta q_{n+1}^{(i+1)} \quad (5.28)$$

$$\dot{q}_{n+1}^{(i+1)} = \dot{q}_{n+1}^{(i)} + \frac{\gamma}{h\beta} \Delta q_{n+1}^{(i+1)} \quad (5.29)$$

$$\ddot{q}_{n+1}^{(i+1)} = \ddot{q}_{n+1}^{(i)} + \frac{1}{h^2\beta} \Delta q_{n+1}^{(i+1)} \quad (5.30)$$

Após cada itera o, será feita uma verifica o quanto a convergência da soluço, através do critério de deslocamento

$$\frac{\| \Delta q_{n+1}^{(i)} \|}{\| q_{n+1} \|} \leq \epsilon_D \quad (5.31)$$

onde ε_D é a tolerância de deslocamento. O vetor q_{n+1} , que é desconhecido, será aproximado pelo último valor calculado $q_{n+1}^{(i)}$.

CAPÍTULO 6

SIMULAÇÕES

6.1 - Introdução

No presente capítulo é desenvolvida uma série de simulações numéricas, que mostram os resultados obtidos com a formulação e procedimentos numéricos mostrados nos capítulos anteriores. As simulações abrangerão o comportamento estático e os autovalores e autovetores para várias posições de um manipulador, e também seu comportamento transiente para determinadas trajetórias.

Será considerada aqui, a situação de projeto de um manipulador articulado, onde já foram definidas as configurações cinemática e estrutural. Ou seja, já definidos o comprimento, material, forma de cada ligação, e as transmissões envolvidas.

6.2 - Simulações para o caso estático

O objetivo principal é a verificação da precisão de posicionamento da extremidade da cadeia, e como esta é influenciada pelos parâmetros de rigidez do sistema.

O manipulador a ser analisado possui, com relação as suas ligações, as seguintes características:

- comprimentos das ligações

$$L_1 = 660,4 \text{ mm}, L_2 = 431,8 \text{ mm e } L_3 = 433,1 \text{ mm}$$

- comprimento dos ombros (ligaduras rígidas)

$$L_{y1} = 200 \text{ mm e } L_{z2} = 100 \text{ mm}$$

- massas das ligações

$$m_1 = 13,21 \text{ kg, } m_2 = 17,80 \text{ kg e } m_3 = 5,1 \text{ kg}$$

- módulos de elasticidade

$$E_1 = E_2 = E_3 = 210 \text{ GPa}$$

- módulos de elasticidade transversal

$$G_1 = G_2 = G_3 = 79 \text{ GPa}$$

- áreas das seções transversais

$$A_1 = 2544,91 \text{ mm}^2, A_2 = 5244,63 \text{ mm}^2 \text{ e } A_3 = 1498,16 \text{ mm}^2$$

- momentos de inércia

$$I_1 = 515388,17 \text{ mm}^4, I_2 = 2187047,04 \text{ mm}^4 \text{ e } I_3 = 178363,02 \text{ mm}^4$$

Para este manipulador, considera-se para a rigidez das juntas, os mesmos valores utilizados por [93] para manipuladores articulados, que são: $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6 \text{ Nmm/rad}$. Também foram consideradas as seguintes características:

- momentos de inércia dos rotores dos atuadores

$$I_{R1} = I_{R2} = I_{R3} = 235 \text{ kg mm}^2$$

- relações de transmissão

$$c_1 = 220, c_2 = 150 \text{ e } c_3 = 130.$$

As simulações foram feitas para dez diferentes posições da cadeia cinemática dentro do espaço de trabalho, mostradas na figura 6.1. Foi utilizada uma malha onde considerou-se cada ligação discretizada através de cinco elementos finitos, ou seja $n_1 = n_2 = n_3 = 5$ elementos.

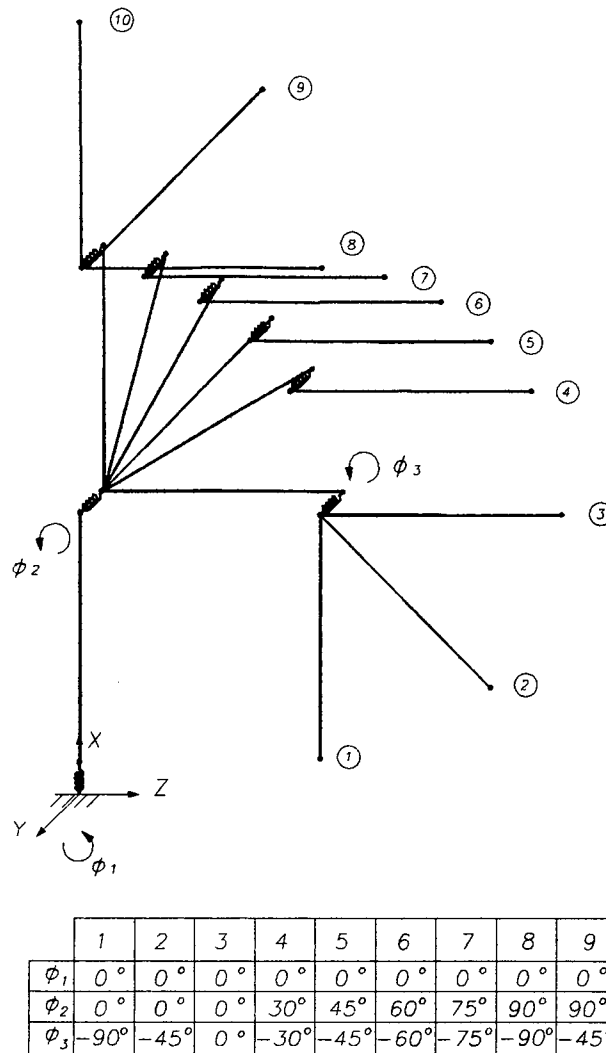


Fig. 6.1 - Posições do manipulador.

Para cada posição foram determinados os deslocamentos das coordenadas de corpo rígido das ligações e também das coordenadas nodais das ligações, devidos à flexibilidade das juntas e ligações respectivamente.

Com estes resultados, foi possível a obtenção dos erros de posição da extremidade da cadeia cinemática. Estes erros são obtidos através da diferença entre dois vetores posição, ambos partindo da origem do sistema de coordenadas inercial, até a extremidade da cadeia. Um destes vetores é calculado considerando-se a estrutura como sendo rígida, e o outro vetor, é

calculado levando-se em conta os deslocamentos das coordenadas generalizadas devidos à flexibilidade das ligações e juntas.

A figura 6.2 apresenta a variação dos valores de erro no plano XZ, para as dez posições mostradas na figura 6.1, onde é considerado apenas o efeito da gravidade atuando sobre o sistema.

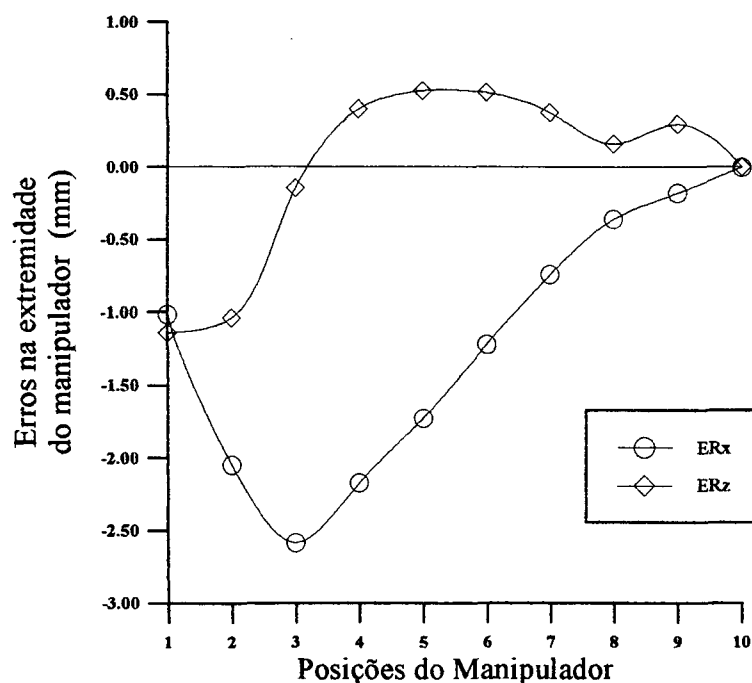


Fig. 6.2 - Erros na extremidade do manipulador, para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ Nmm/rad.

A figura 6.3 mostra a variação do deslocamento sofrido pelas ligações em torno dos eixos das juntas 2 e 3, para as dez posições, devidos à elasticidade do sistema de transmissão.

A figura 6.4, mostra os erros da extremidade do manipulador quando este é considerado como tendo as suas juntas rígidas, ou seja, os erros devidos apenas à flexibilidade das ligações. Comparando-se os valores dos erros mostrados nas figuras 6.2 e 6.4, pode-se observar que a contribuição devida aos deslocamentos decorrentes das flexibilidades das juntas, sobre os

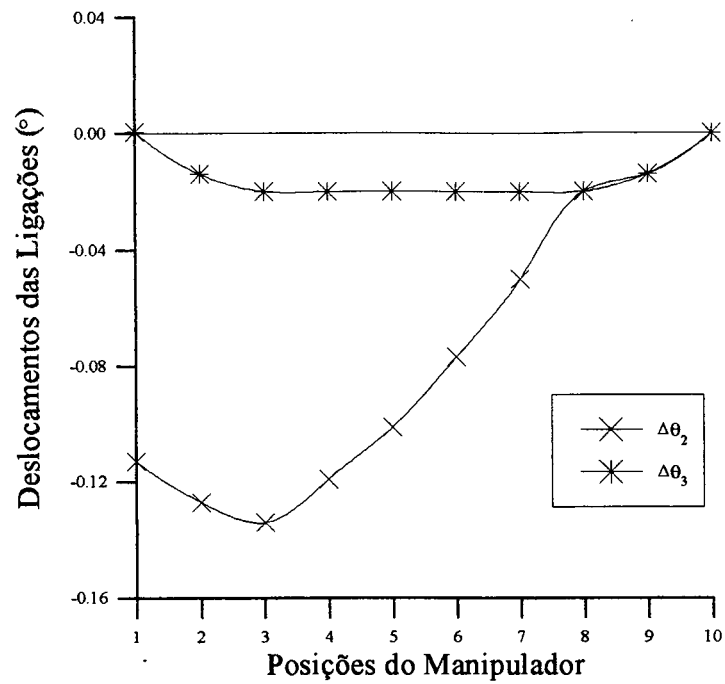


Fig. 6.3 - Deslocamentos das ligações, para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ Nmm/rad.

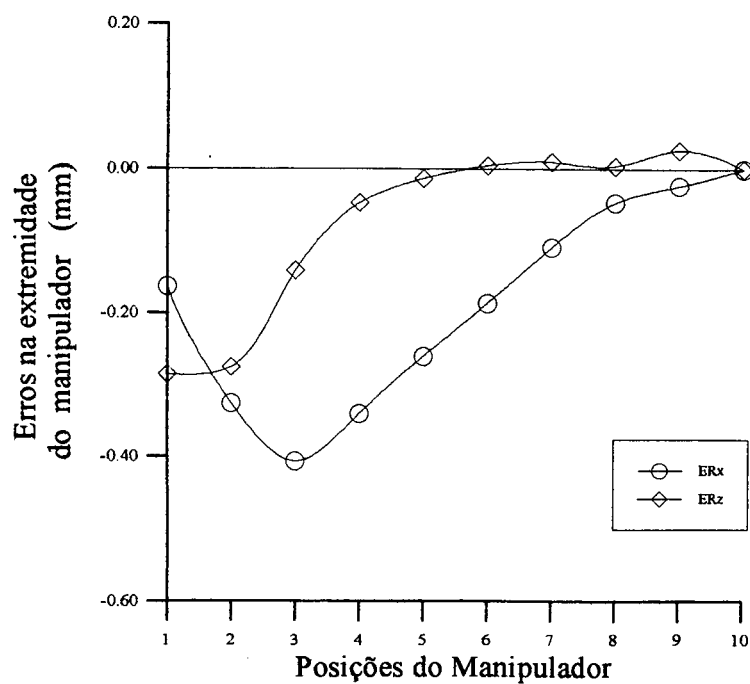


Fig. 6.4 - Erros na extremidade do manipulador, considerando as juntas rígidas.

erros, é bastante mais significativa que a devida aos deslocamentos nodais.

Observa-se que as posições onde ocorrem o maior e o menor erro, são onde a extremidade da cadeia alcança o limite do seu espaço de trabalho, e também que estão associadas, respectivamente, aos maiores e menores valores dos deslocamentos devidos à flexibilidade das juntas.

As figuras 6.5 e 6.6, mostram os resultados obtidos quando é considerada adicionalmente uma força de 100 N, atuando no sentido negativo do eixo X, onde observa-se um comportamento semelhante ao caso anterior, no tocante aos maiores e menores erros.

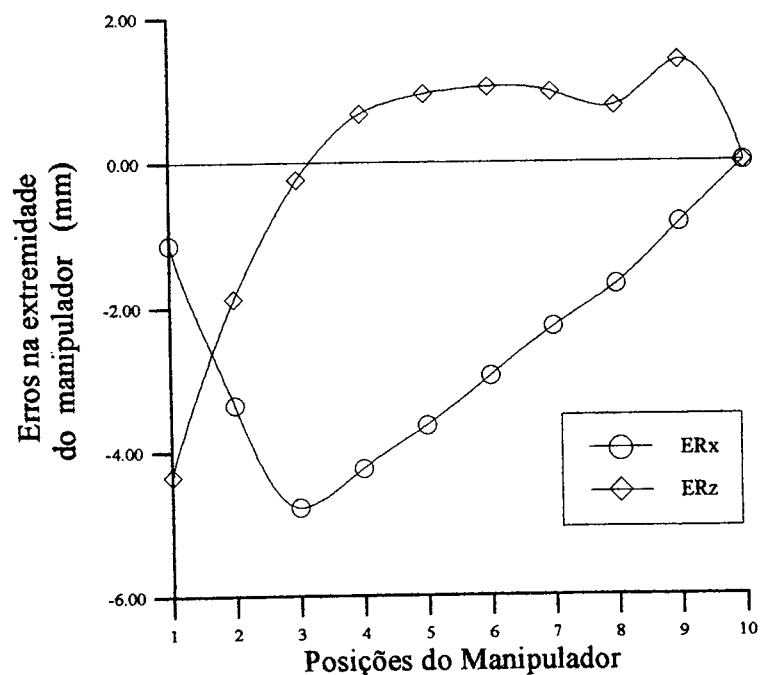


Fig. 6.5 - Erros na extremidade do manipulador para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad e $F_x = -100$ N.

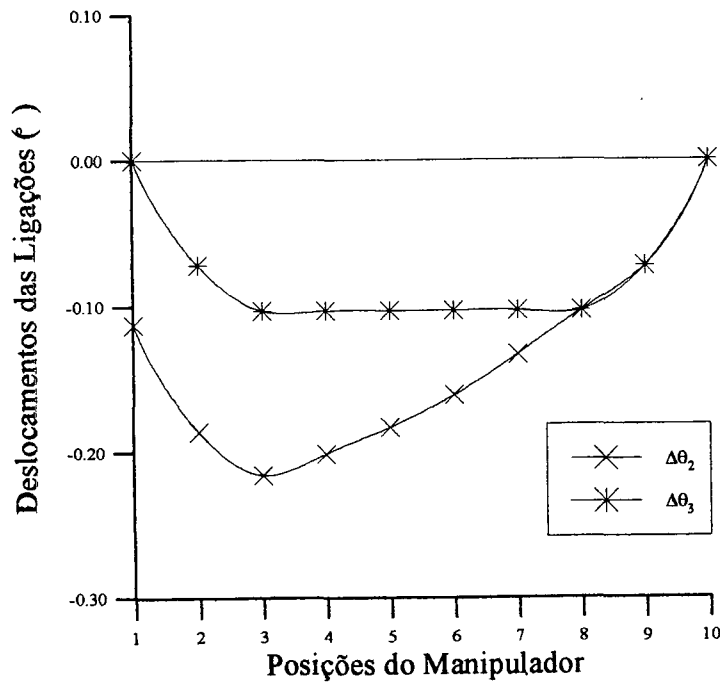


Fig. 6.6 - Deslocamentos das ligações para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad e $F_x = -100$ N.

A seguir são mostrados os resultados de outras simulações feitas para a mesma cadeia cinemática, onde obteve-se o comportamento do sistema para diferentes valores de flexibilidade das juntas.

Como não encontrou-se dados disponíveis, a respeito da rigidez de outros tipos de transmissão, possíveis de serem utilizados no acionamento de juntas rotacionais, foram simuladas situações para valores de rigidez maiores e menores que o valor de referência 30×10^6 N mm/rad, mantendo-se a rigidez das ligações inalterada.

As figuras 6.7 e 6.8, mostram, respectivamente os erros e os deslocamentos das juntas, considerando-se as juntas com rigidez dez vezes maior que valor de referência, ou seja, $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ Nmm/rad, e apenas sob efeito da gravidade.

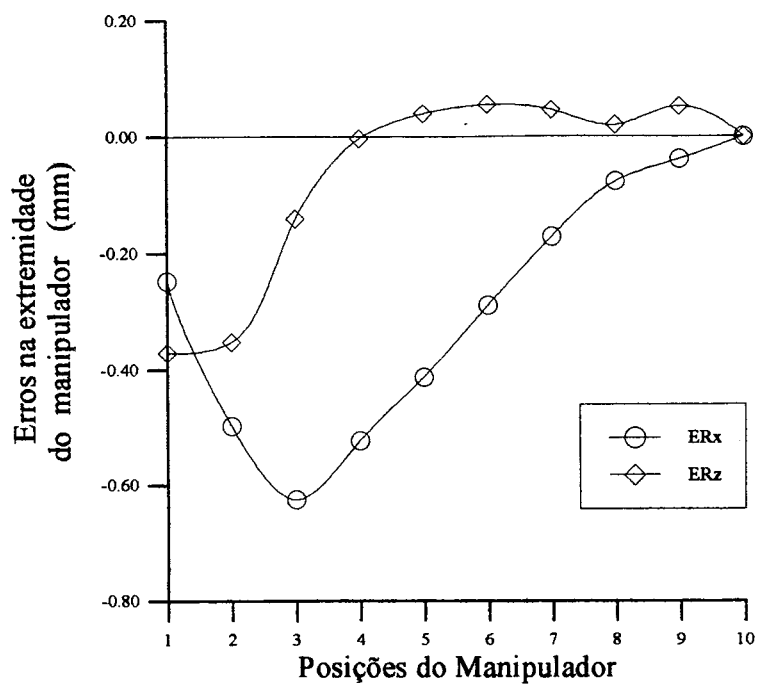


Fig. 6.7 - Erros na extremidade do manipulador, para

$$K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6 \text{ N}^6 \text{ mm/rad.}$$

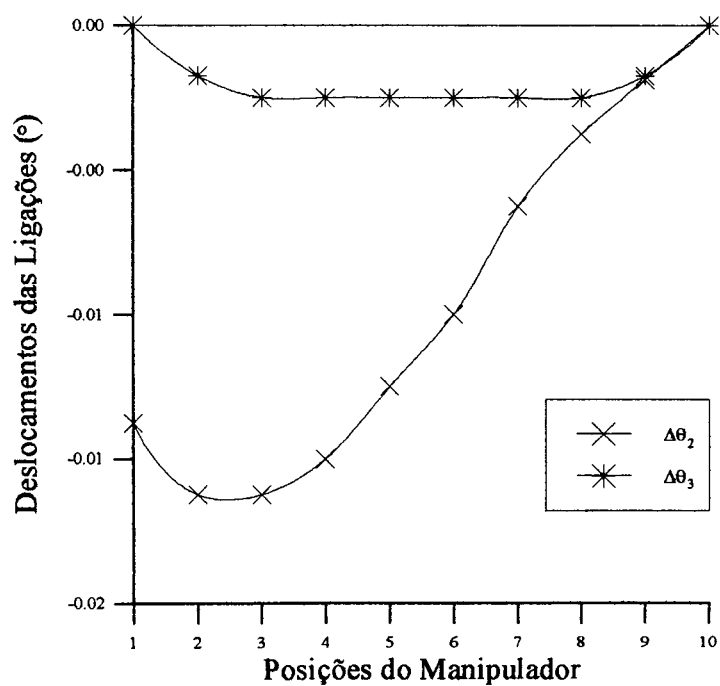


Fig. 6.8 - Deslocamentos das ligações para $K_1 = K_2 =$

$$K_3 = 300 \times 10^6 \text{ N mm/rad.}$$

Comparando-se as figuras 6.7 e 6.4, observa-se que para estes valores maiores de rigidez das juntas, os erros obtidos são bastante próximos aos obtidos para o mesmo manipulador com juntas rígidas, e que a contribuição dos deslocamentos devidos à flexibilidade das ligações nos erros, é maior que a devida à flexibilidade das juntas.

Para valores de rigidez das juntas menores que o valor de referência, utilizou-se $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ Nmm/rad, cujos resultados obtidos estão mostrados nas figuras 6.9 e 6.10. Como esperado, obteve-se erros maiores que nos casos anteriores, onde a contribuição dos deslocamentos devidos à flexibilidade das juntas foi predominante.

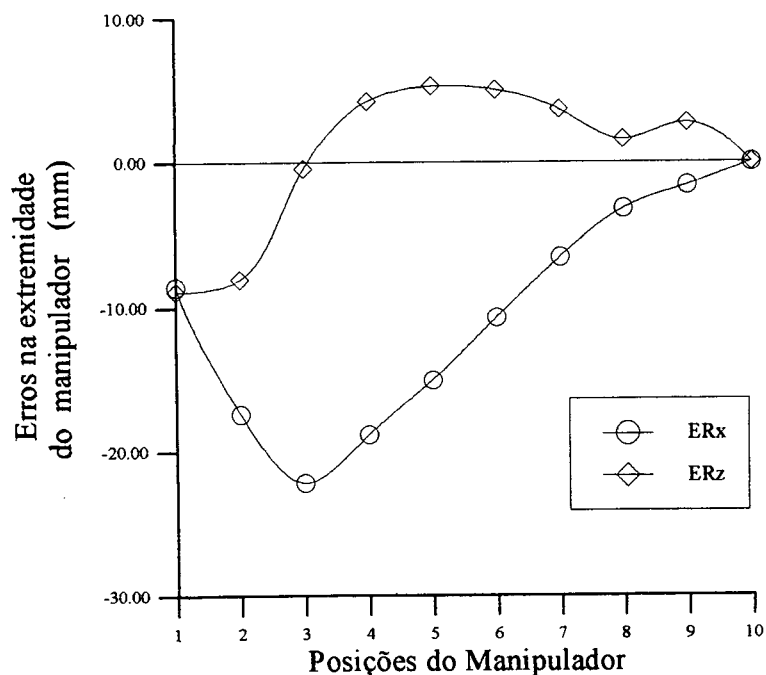


Fig. 6.9 - Erros na extremidade do manipulador, para

$$K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6 \text{ N mm/rad.}$$

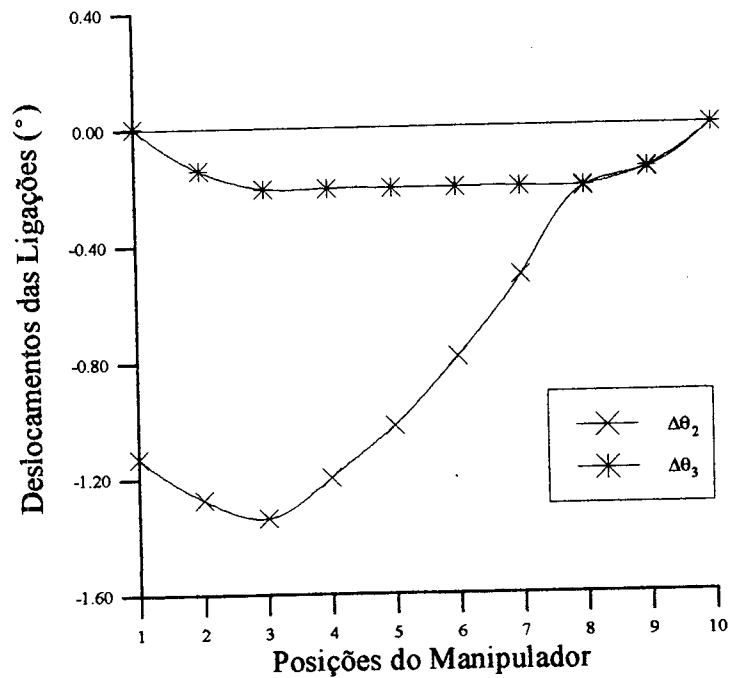


Fig. 6.10 - Deslocamentos das ligações para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ Nmm/rad.

A seguir são mostrados os resultados de outras simulações feitas com a mesma cadeia utilizada anteriormente, mas com a rigidez das ligações aumentada. Este aumento da rigidez foi obtido aumentando-se de dez vezes o momento de inércia da seção transversal, mantendo-se o mesmo material.

Desta forma as ligações passam a ter as seguintes características:

- $m_1 = 41,77$ kg, $m_2 = 56,29$ kg e $m_3 = 16,12$ kg
- $A_1 = 8048,02$ mm², $A_2 = 16585,61$ mm² e $A_3 = 4737,78$ mm²
- $I_1 = 5153881,70$ mm⁴, $I_2 = 21870470,40$ mm⁴ e $I_3 = 1783630,20$ mm⁴

Na figura 6.11 são mostrados os erros quando as juntas são consideradas como rígidas. E destes, observa-se que apesar de

erros bem pequenos, a variação destes ao longo das dez posições é semelhante a verificada na situação anterior.

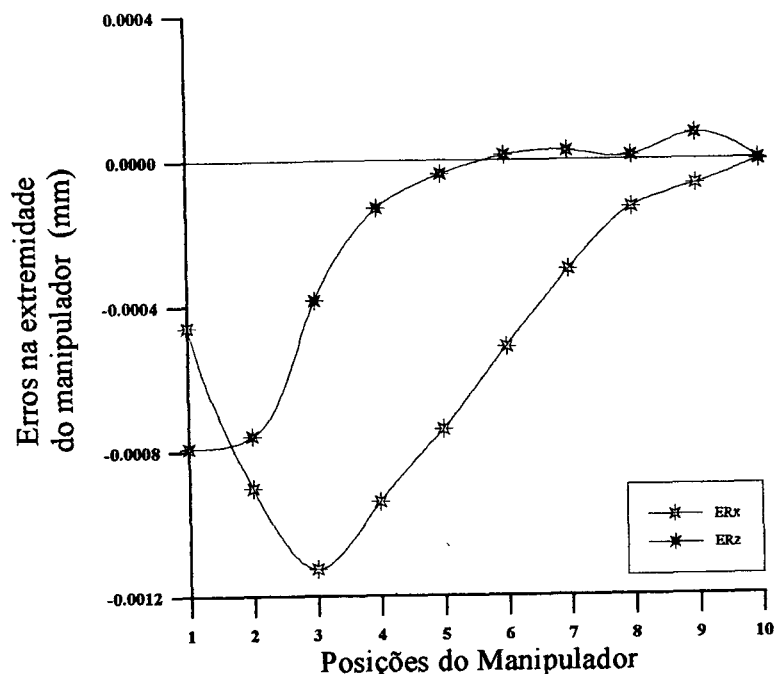


Fig. 6.11 - Erros na extremidade do manipulador, considerando as juntas rígidas.

As figuras 6.12 a 6.17 mostram o comportamento dos erros e deslocamentos das juntas, quando são usados os valores de rigidez nas juntas considerados nas simulações anteriores.

Pode-se observar que o aumento de rigidez das ligações associado com o aumento da massa das mesmas, mesmo diminuindo as deformações das ligações, provoca um aumento dos deslocamentos devidos à flexibilidade das juntas, e que ao final acaba provocando erros maiores na extremidade da cadeia cinemática.

Com isto, observa-se que em termos dos erros de posição, existe uma relação negativa entre a rigidez das ligações e o peso destas. Isto devido ao fato de este último quando

associado com a flexibilidade das juntas, deteriora os erros de posição da extremidade da cadeia cinemática.

Então, para se obter os menores erros estáticos possíveis, para a extremidade de manipuladores articulados, deve-se adotar ligações e juntas com rigidez adequadas, sendo que as ligações mais pesadas sejam sempre as mais adjacentes à base.

De uma forma geral, os resultados aqui fornecidos, tanto a análise dos erros no espaço de trabalho, quanto dos deslocamentos dos graus de liberdade que geram este erro, permitem que seja feita uma análise preliminar, a nível de projeto, da adequacidade dos mecanismos de transmissão e dos membros estruturais que compõem a cadeia cinemática.

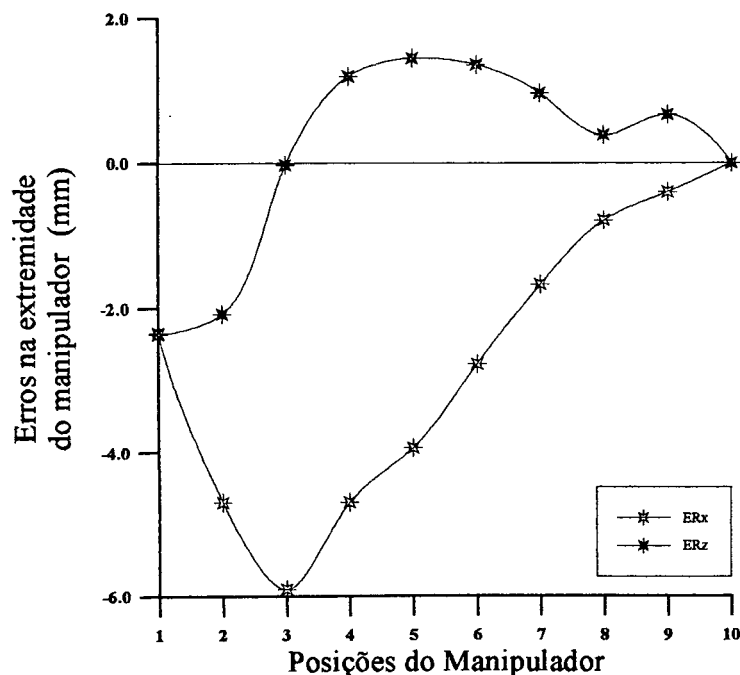


Fig. 6.12 - Erros na extremidade do manipulador, para

$$K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6 \text{ N mm/rad.}$$

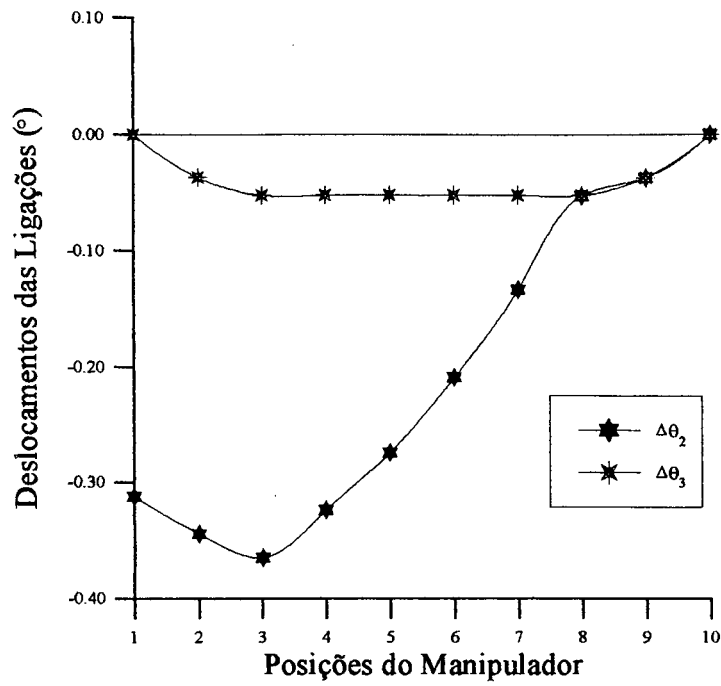


Fig. 6.13 - Deslocamentos das ligações para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ Nmm/rad.

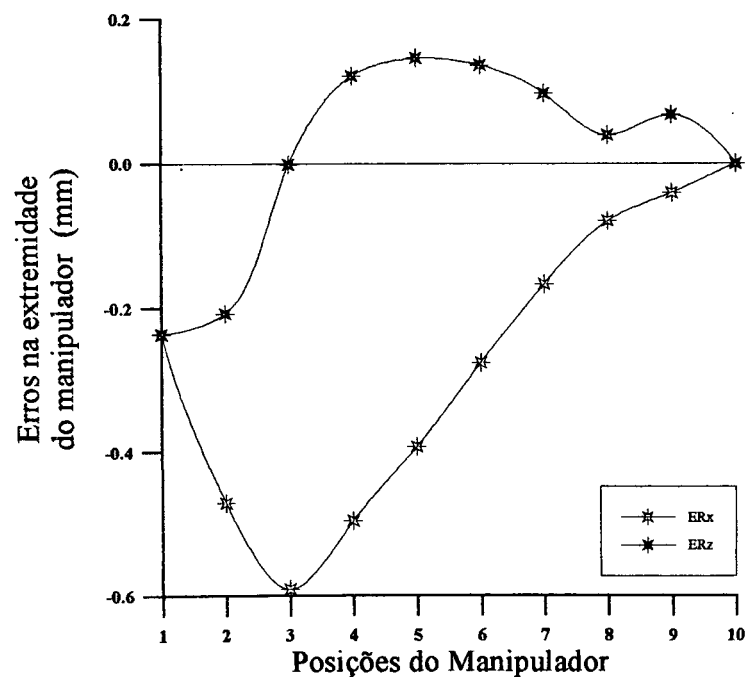


Fig. 6.14 - Erros na extremidade do manipulador, para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad.

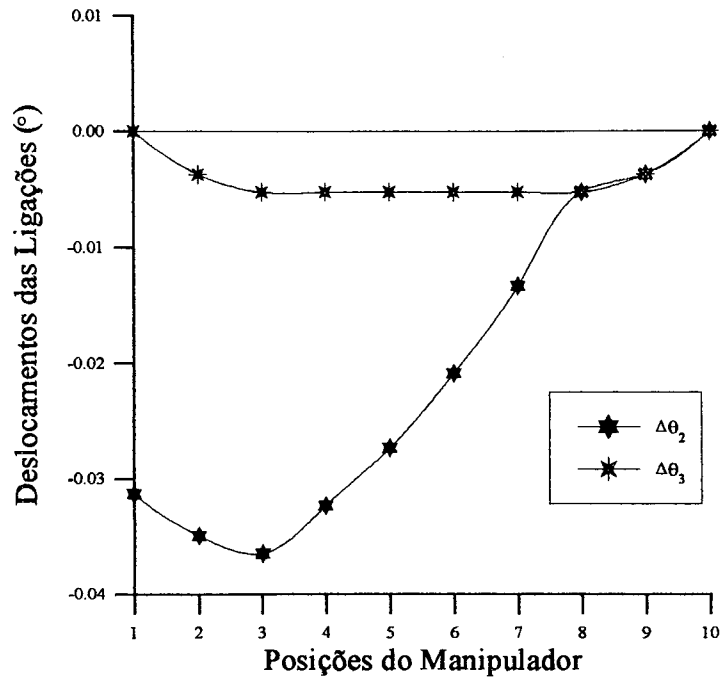


Fig. 6.15 - Deslocamentos das ligações para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ Nmm/rad.

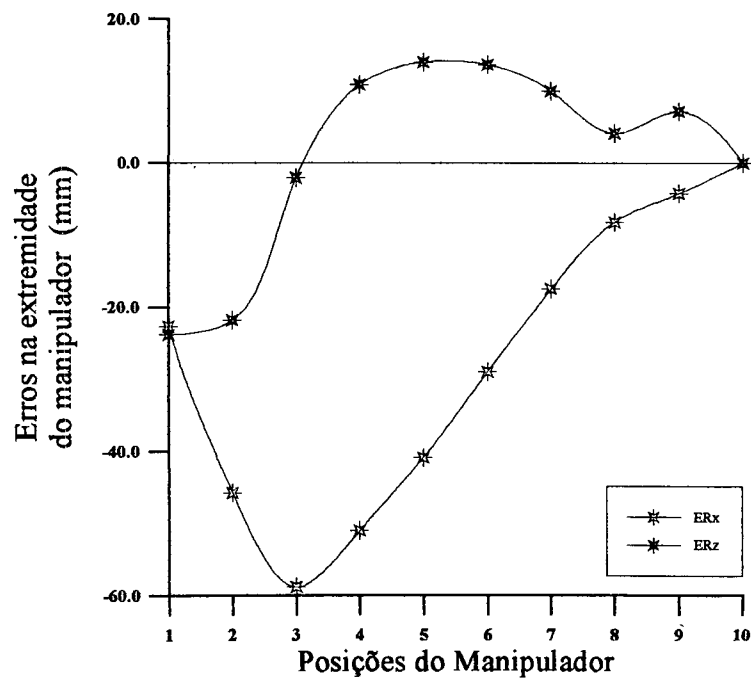


Fig. 6.16 - Erros na extremidade do manipulador, para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad.

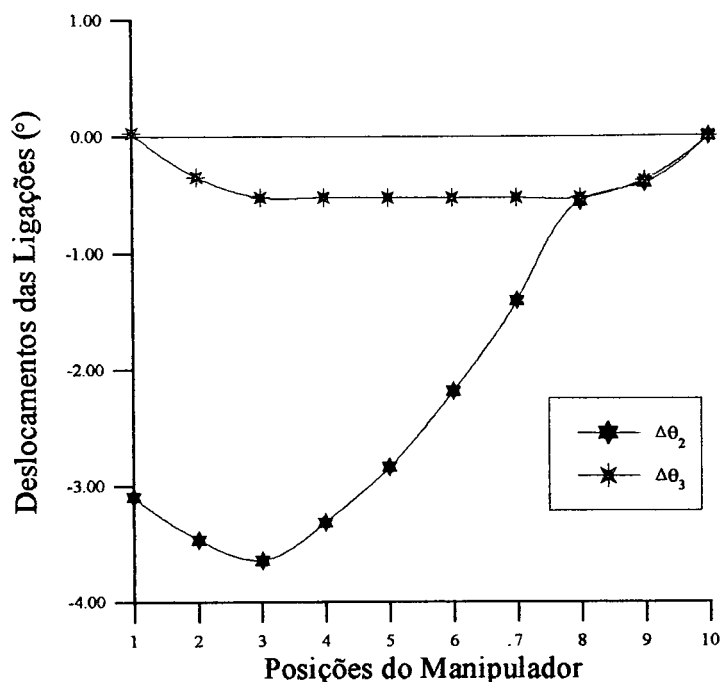


Fig. 6.17 - Deslocamentos das ligações para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ Nmm/rad.

6.3 - Simulações para os autovalores

O objetivo principal aqui é verificar a influência da posição e das flexibilidades do manipulador sobre as suas frequências naturais.

Serão mostrados os primeiros autovalores e autovetores, obtidos para as mesmas configurações de manipuladores utilizadas nas simulações para o caso estático.

A figura 6.18 mostra a variação dos cinco primeiros autovalores da configuração contendo as ligações mais flexíveis e juntas rígidas, para as dez posições mostradas na figura 6.1. Pode-se observar que não houve variação para a segunda e terceira frequências naturais ao longo das dez posições, e que a maior variação ficou para a primeira frequência natural, em torno de

18%, e a menor variação ficou por conta da quinta frequência, em torno de 6 %. Observa-se também, que é nas posições 1, 2 e 10 que ocorrem os maiores e menores valores para as cinco frequências naturais mostradas, e que somente para a primeira frequência é que o maior valor ocorre na posição 1, tendo as outras frequências um comportamento oposto.

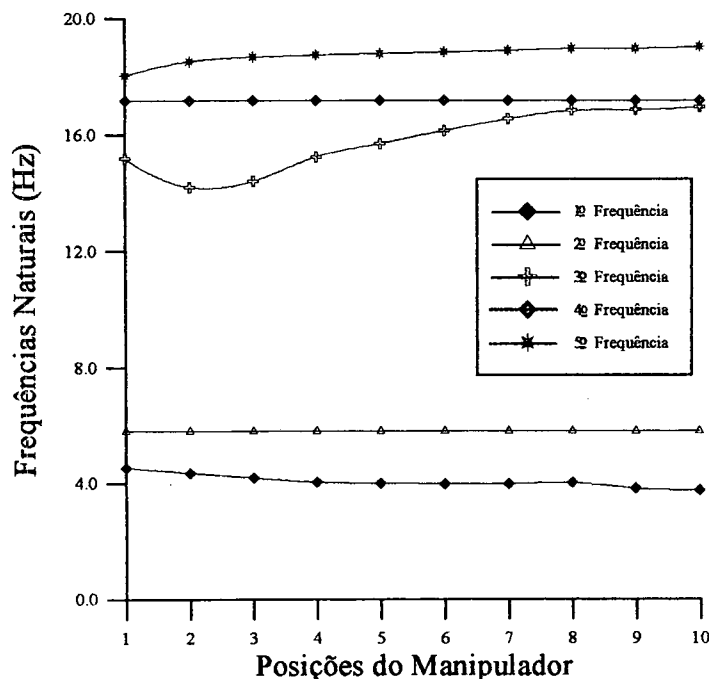


Fig. 6.18 - Autovalores considerando-se as juntas com sendo rígidas.

A figura 6.19 mostra os três primeiros autovetores para esta configuração, posicionada com as seguintes coordenadas de juntas: $\phi_1 = 0^0$, $\phi_2 = 45^0$ e $\phi_3 = -90^0$.

A figura 6.20, mostra a variação dos autovalores, quando as juntas possuem como rigidez o valor de referência, $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad.

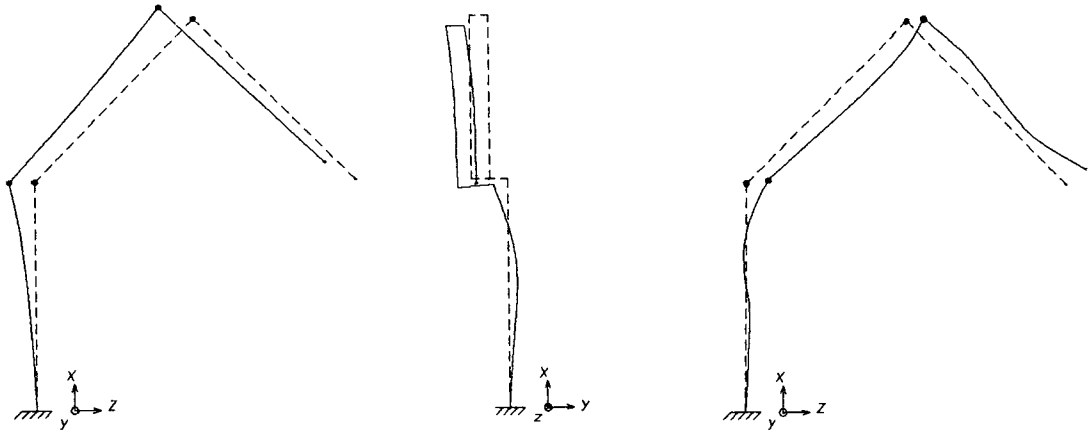


Fig. 6.19 - Autovetores para as três frequências mais baixas, considerando-se as juntas rígidas.

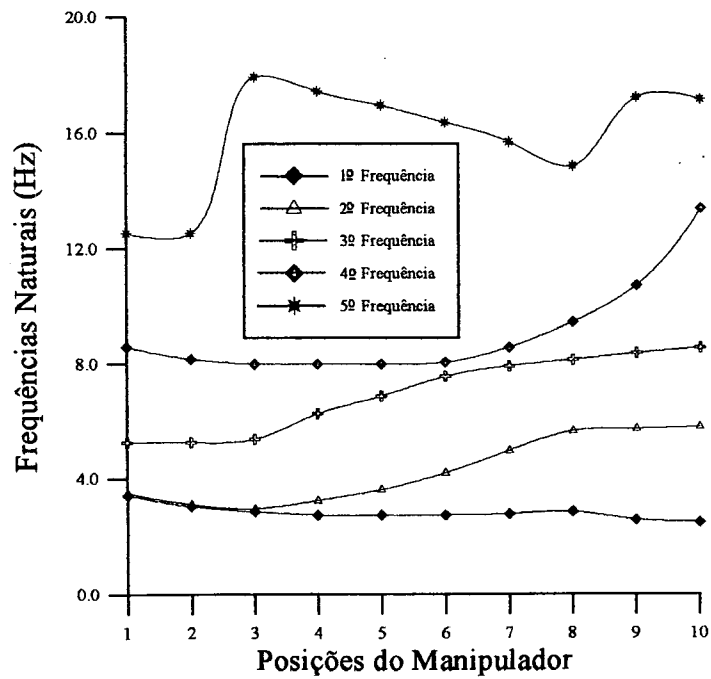


Fig. 6.20 - Autovalores para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad.

Comparando-se as figuras 6.18 e 6.20, pode-se notar que a flexibilidade das juntas além de reduzir os valores das frequências afeta a variação destes, para as posições da cadeia cinemática dentro do seu espaço de trabalho. Observa-se que a configuração contendo juntas flexíveis, apresenta uma diminuição média dos valores de frequência de 35 %, com relação à configuração contendo juntas rígidas. Ainda relativo a figura 6.20, observa-se que a maior variação dos valores para as dez posições, ficou por conta da segunda frequência, em torno de 50 % e a menor variação ficou com a primeira frequência, em torno de 28 %. As posições onde ocorrem os maiores e menores valores para as frequências mostradas, são agora 1,3 e 10.

A figura 6.21 mostra os três primeiros modos de vibração, para o manipulador contendo $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad.

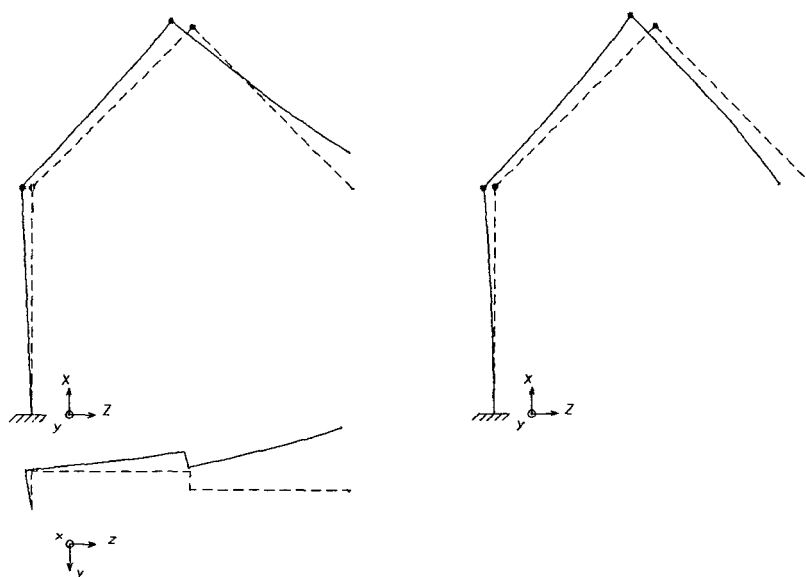


Fig. 6.21 - Autovetores para as três frequências mais baixas, com $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ Nmm/rad.

Comparando-se estes modos com os mostrados na figura 6.19, observa-se a flexibilidade das juntas gera movimentos de oscilação das ligações em torno dos eixos das juntas, e que os movimentos devidos aos deslocamentos nodais ficam menores.

A figura 6.22 mostra os autovalores para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, onde com relação à configuração contendo juntas rígidas, ocorre uma redução média de 13 % para o valor das frequências.

Ao longo das dez posições, a maior variação ocorreu para a primeira frequência, em torno de 21 %, e a menor variação para a quinta frequência, em torno de 7 %.

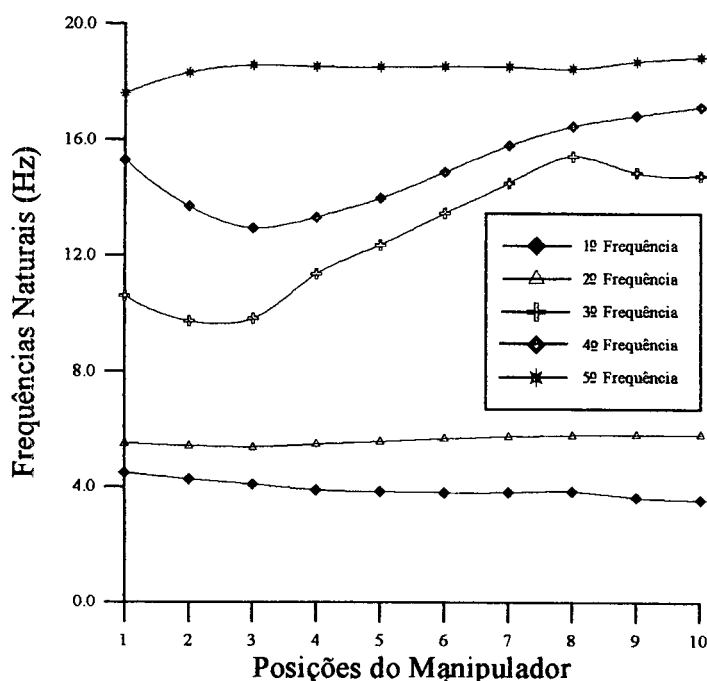


Fig. 6.22 - Autovalores para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad.

A figura 6.23 mostra os três primeiros modos para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, onde percebe-se uma certa semelhança com os modos obtidos para o manipulador contendo juntas rígidas.

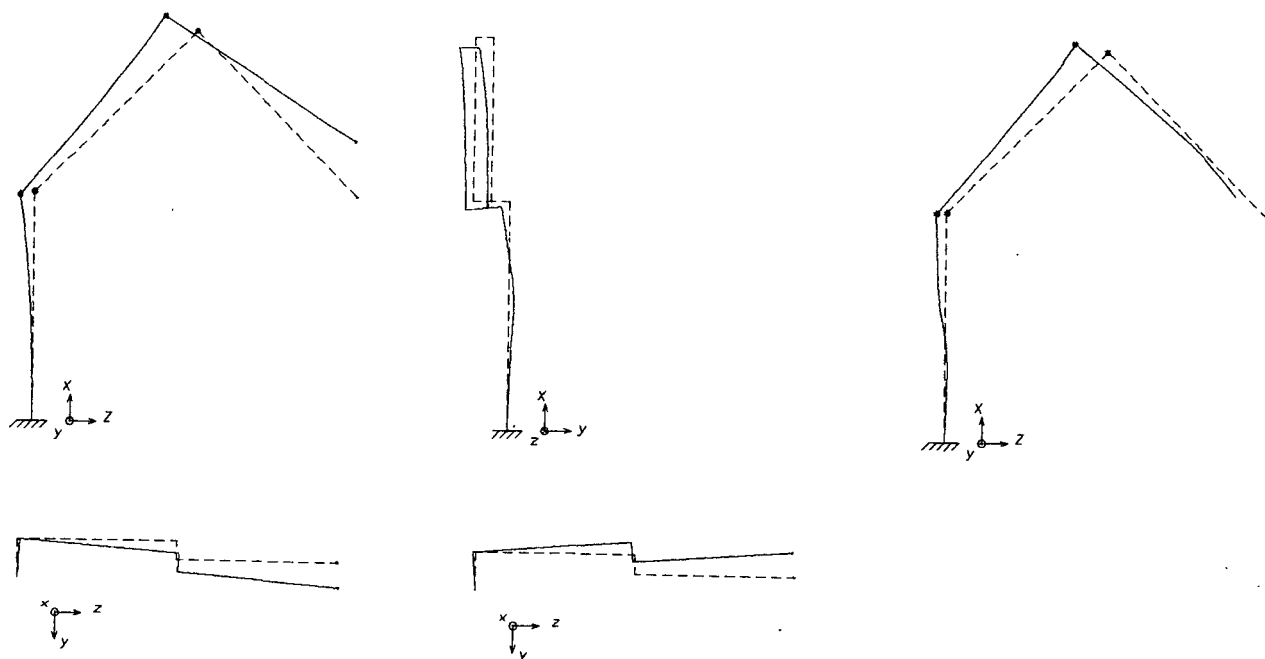


Fig. 6.23 - Autovetores para as três frequências mais baixas, com $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6 \text{ Nmm/rad}$.

Para o caso onde $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, cujos autovalores para as dez posições estão mostrados na figura 6.24, verifica-se uma redução média de 65 % para as frequências, com relação a configuração contendo juntas rígidas.

Para os modos obtidos para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6 \text{ mm/rad}$, apresentados na figura 6.25, observa-se que apenas a extremidade da primeira ligação sofre deslocamentos significativos, enquanto que as outras ligações praticamente oscilam como corpos rígidos em torno dos eixos das juntas.

Na seqüência, serão apresentados os autovalores obtidos para a configuração contendo ligações com maior massa e rigidez.

A figura 6.26 mostra os resultados quando as juntas são consideradas como sendo rígidas, onde observa-se com relação aos

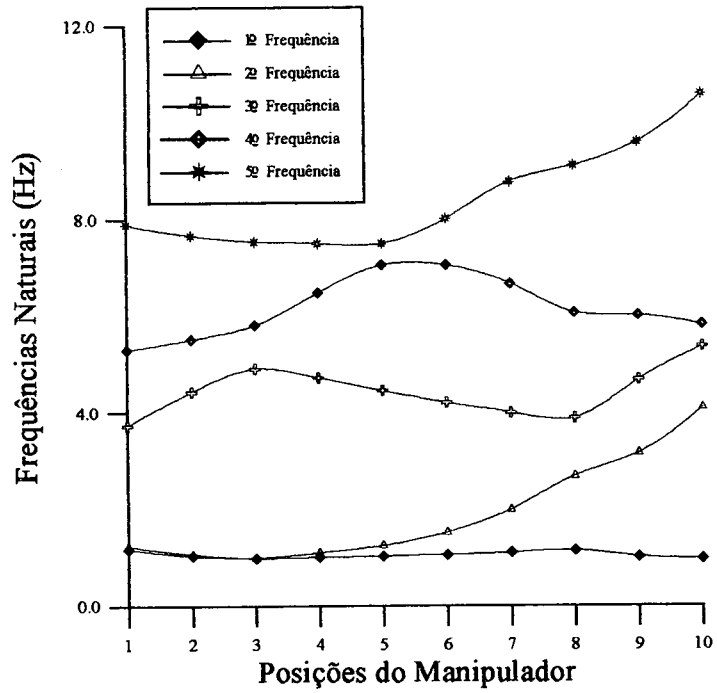


Fig. 6.24 - Autovalores para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad.

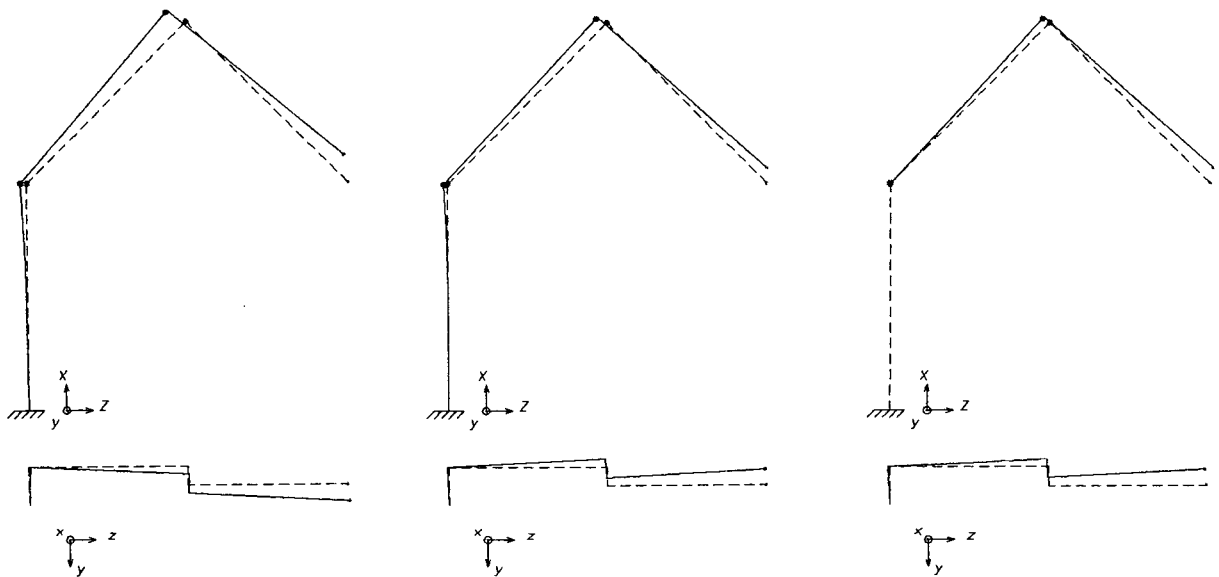


Fig. 6.25 - Autovetores para as três frequências mais baixas, com $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ Nmm/rad.

flexíveis, mostrados na figura 6.18, um aumento médio dos valores das frequências da ordem de 13 vezes.

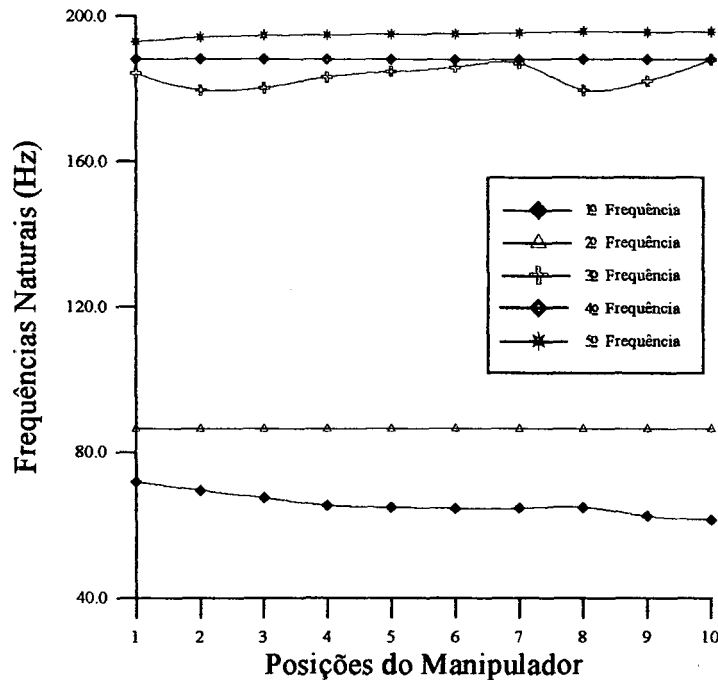


Fig. 6.26 - Autovalores considerando-se as juntas com sendo rígidas.

A figura 6.27 mostra os resultados obtidos para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6 \text{ Nmm/rad}$. Comparando-se estes resultados com os da figura anterior, verifica-se uma queda dos valores, principalmente para as três primeiras frequências naturais.

O mesmo comportamento é verificado para valores de rigidez das juntas, maiores e menores que o valor de referência, conforme mostrado nas figuras 6.28 e 6.29, respectivamente. Desta forma, percebe-se para o caso de ligações com alta rigidez, a influência direta do parâmetro flexibilidade das juntas sobre os valores das primeiras frequências naturais.

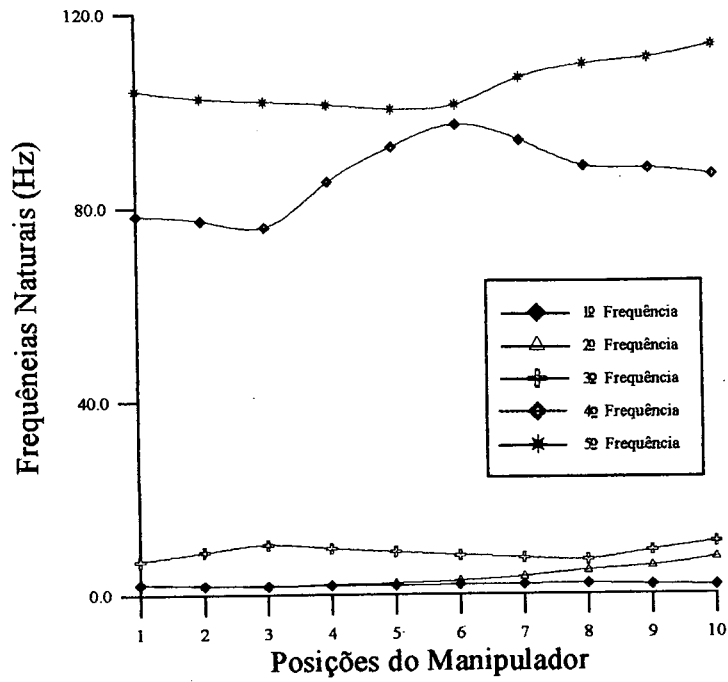


Fig. 6.27 - Autovalores para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad.

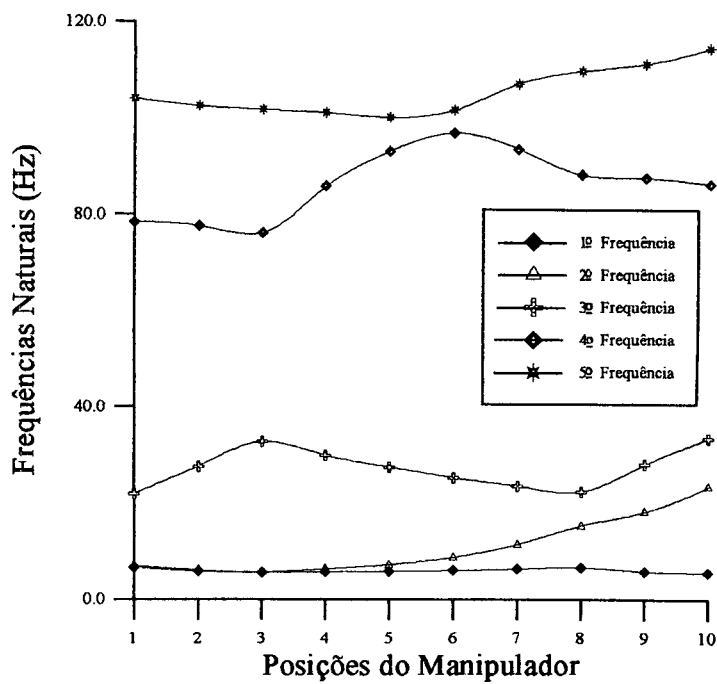


Fig. 6.28 - Autovalores para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad.

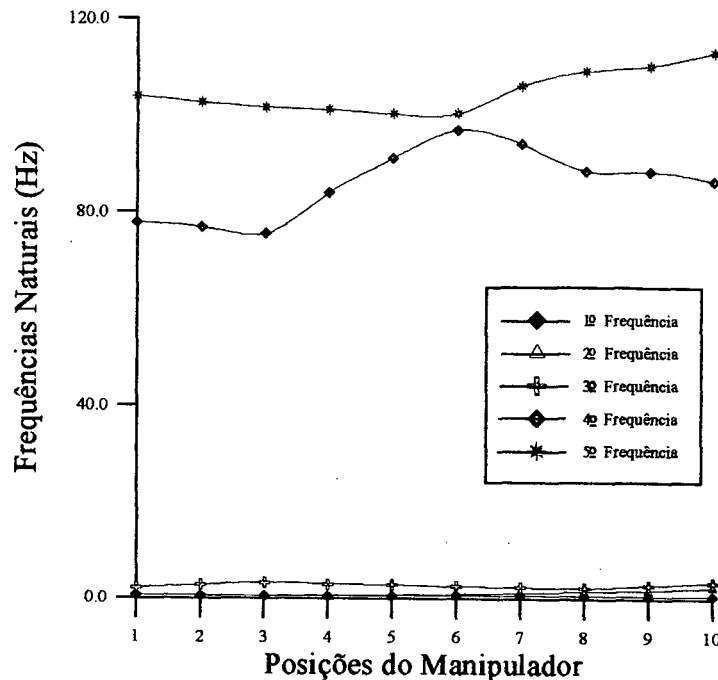


Fig. 6.29 - Autovalores para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$
N mm/rad.

Outro aspecto importante que pode ser observado nas figuras 6.27 a 6.29, são as separações existentes entre os valores da 3ª e 4ª frequências naturais, para os diferentes valores de rigidez das juntas, criando assim uma faixa dentro da qual pode ser definida a frequência do controlador e as excitações externas, sem risco de comportamento instável do sistema.

6.4 - Simulações para o caso transiente

O objetivo desta etapa é a verificação do comportamento dinâmico da estrutura do manipulador, dentro do seu espaço de trabalho. Ou seja, verificar os efeitos causados pela flexibilidade das ligações e juntas durante movimentos da cadeia cinemática.

Os resultados aqui apresentados referem-se as mesmas configurações de manipuladores utilizados nas simulações anteriores, cujos movimentos da cadeia são descritos através de determinadas trajetórias.

A primeira trajetória considerada consiste em conduzir o manipulador de uma posição inicial, descrita em coordenadas das juntas por $\phi_1 = \phi_2 = 0^0$ e $\phi_3 = 90^0$, até a posição final $\phi_1 = 90^0$, $\phi_2 = 45^0$ e $\phi_3 = -45^0$, sendo que a extremidade do manipulador se desloca em linha reta, entre as posições inicial e final.

A figura 6.30, mostra o modelo da cadeia cinemática para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0^0$.

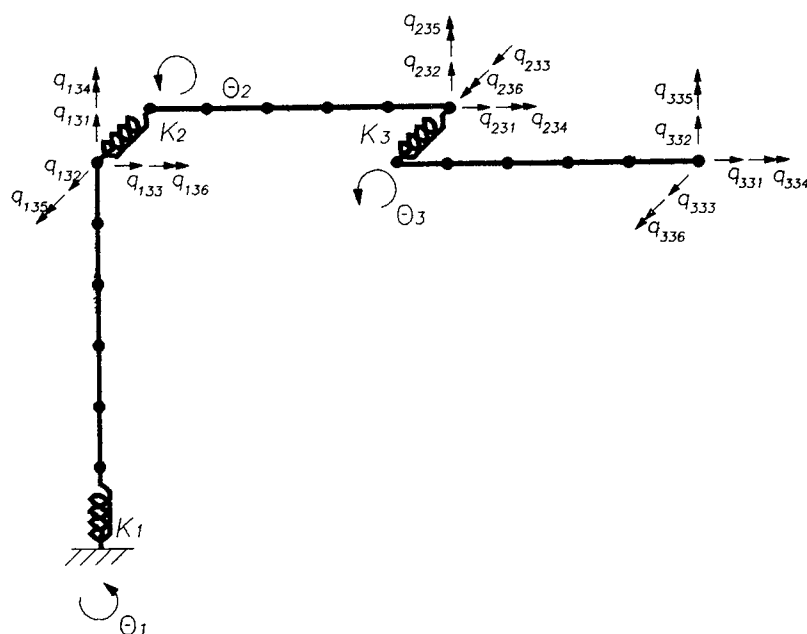


Fig. 6.30 - Vista do modelo da cadeia cinemática, para

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0^0.$$

Serão consideradas duas situações quanto ao tempo de trajetória: 5 segundos e 2 segundos. Os perfis de velocidade e aceleração das juntas para estas trajetórias são mostrados nas

figuras 6.31 a 6.34 .

O parâmetro h , passo de tempo, é obtido como sendo $1/60$ do tempo da trajetória, ou seja, para trajetória de 5 s $h = 0,0833$ s, e para a trajetória de 2 s $h = 0,0333$ s.

Como relações de amortecimento serão utilizadas $\xi_1 = 0,03$ e $\xi_2 = 0,3$, associadas respectivamente a frequência natural mais baixa e mais alta, obtidas na etapa anterior de simulação.

As simulações serão feitas sem realimentação, ou seja, será simulado o movimento com controle em malha aberta.

As primeiras simulações foram feitas para a configuração dotada de ligações mais leves e flexíveis.

A seguir, nas figuras 6.35 a 6.40, são apresentados os erros de posição da extremidade da cadeia cinemática, para as trajetórias de 5 e 2 s e diferentes valores de rigidez de juntas.

Nas figuras 6.41 a 6.58 são mostrados os resultados para algumas das coordenadas nodais dos últimos nós, das três ligações, onde são variados os parâmetros: tempo da trajetória (2 e 5 seg.) e rigidez das juntas ($K = 300, 30$ e 3×10^6 Nmm/rad). As coordenadas q_{133} e q_{132} , representam os pequenos deslocamentos nas direções z e y , respectivamente, do sistema de coordenadas local da ligação 1; q_{233} e q_{232} , os deslocamentos ao longo das direções z e y do sistema local da ligação 2, e q_{333} e q_{332} , os deslocamentos nas direções z e y do sistema local da ligação 3.

Nas figuras 6.59 a 6.64, são mostrados os resultados obtidos para as coordenadas que descrevem os grandes deslocamentos sofridos pelas ligações em torno dos eixos das juntas, θ_1 , θ_2 e θ_3 , onde são variados também os parâmetros tempo da trajetória (2 e 5 seg.) e rigidez das juntas ($K = 300, 30$ e 3×10^6 Nmm/rad).

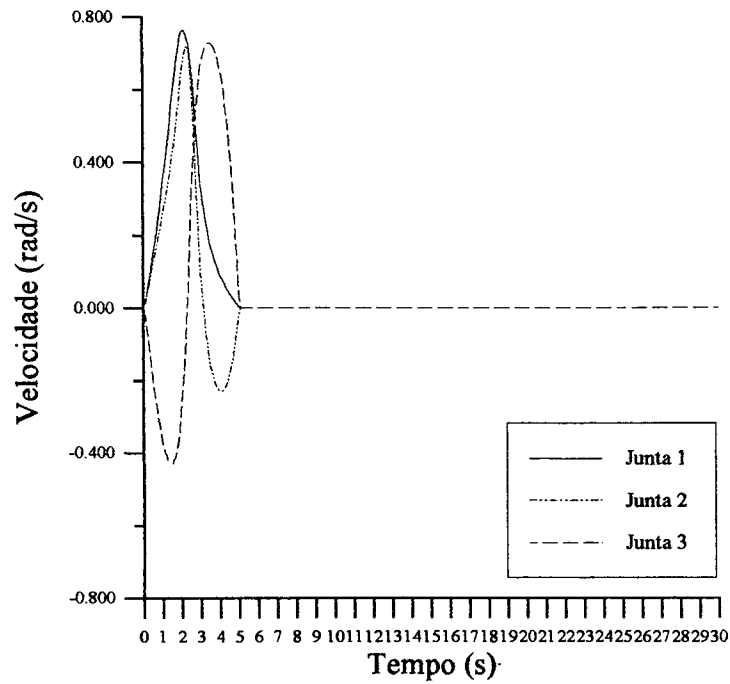


Fig. 6.31 - Perfis de velocidade para a trajetória de 5 segundos ($\dot{\phi}_i$, $i = 1, 2, 3$)

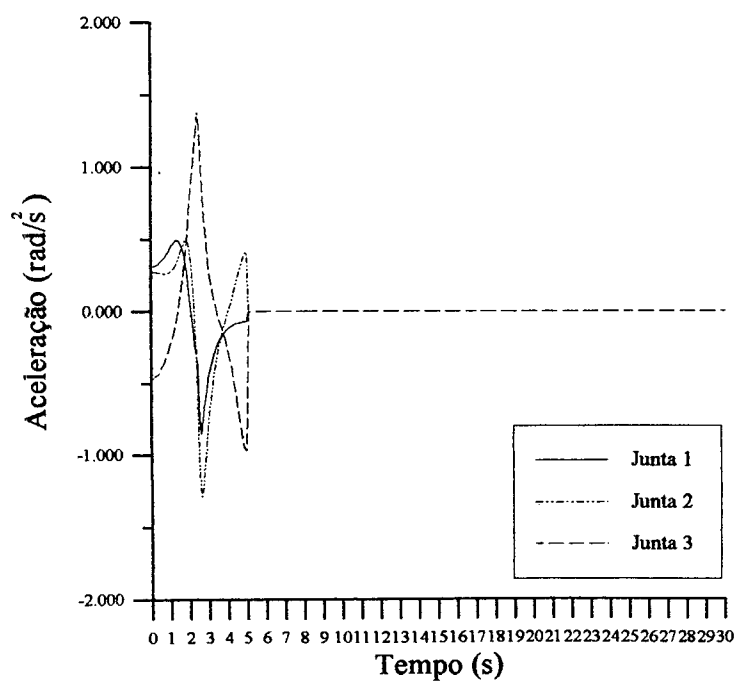


Fig. 6.32 - Perfis de aceleração para a trajetória de 5 segundos ($\ddot{\phi}_i$, $i = 1, 2, 3$).

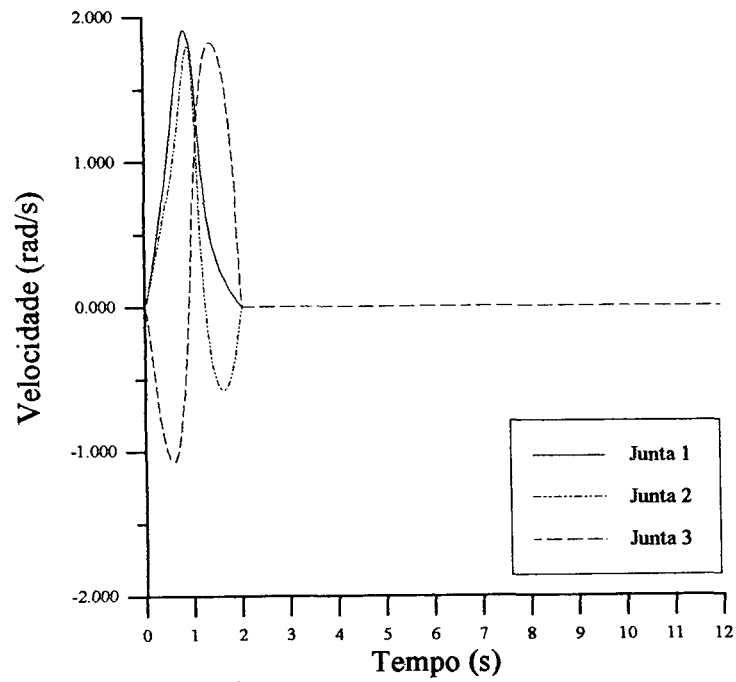


Fig. 6.33 - Perfis de velocidade para a trajetória de 2 segundos ($\dot{\phi}_i$, $i = 1,2,3$)

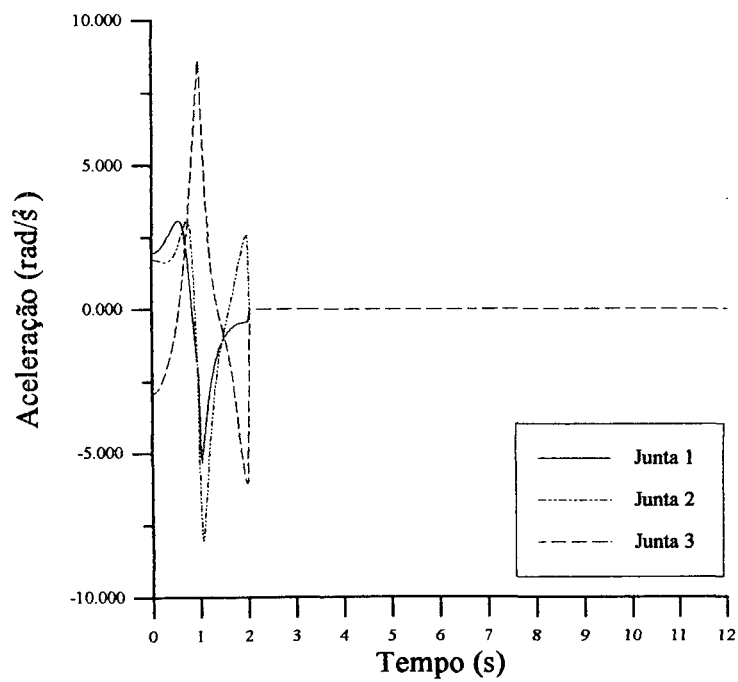


Fig. 6.34 - Perfis de aceleração para a trajetória de 2 segundos ($\ddot{\phi}_i$, $i = 1,2,3$).

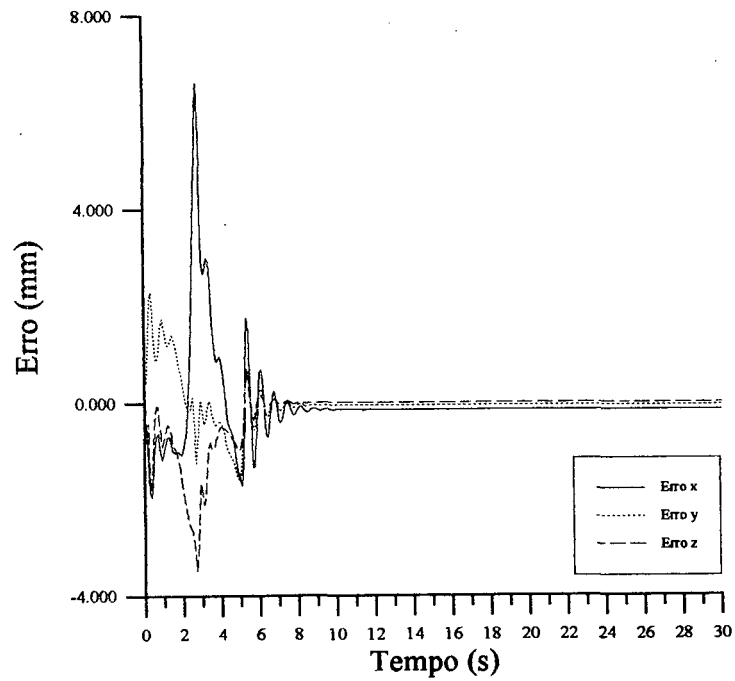


Fig. 6.35 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 seg..

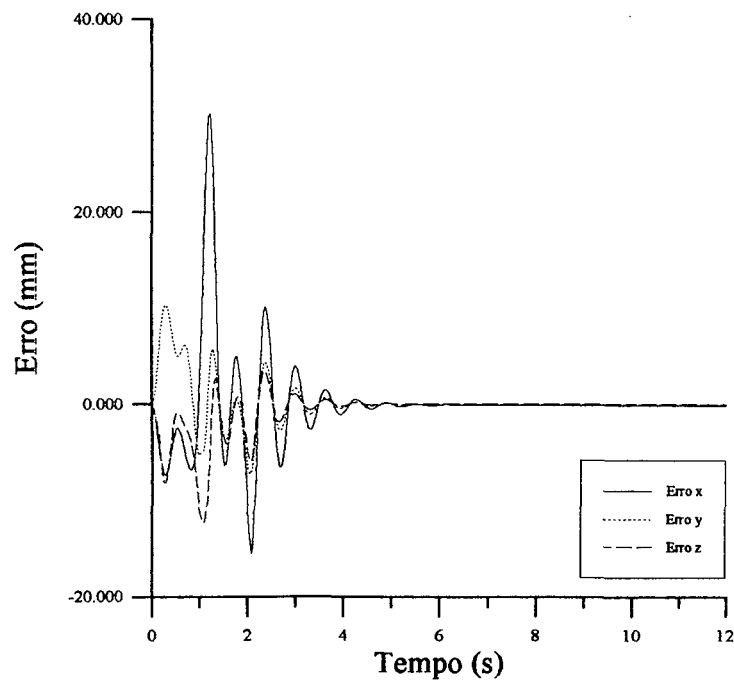


Fig. 6.36 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 seg..

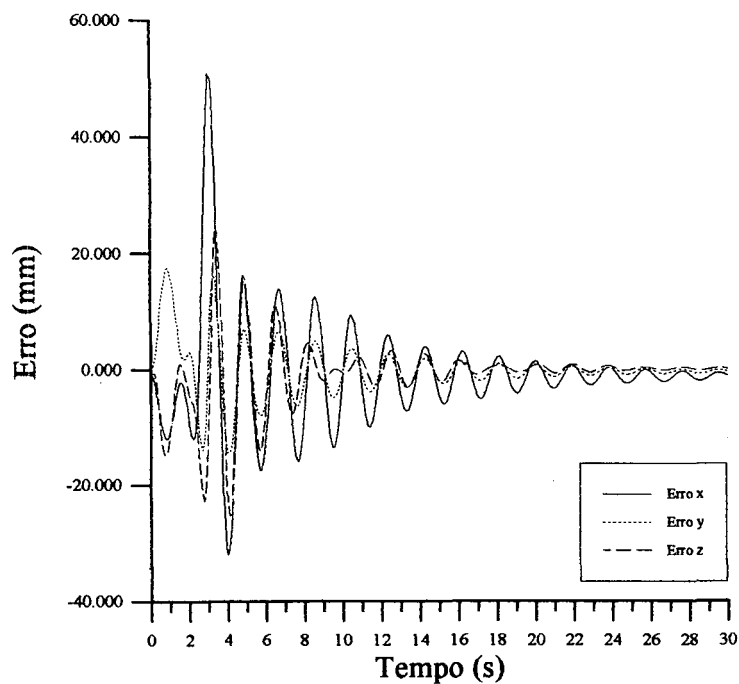


Fig. 6.37 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 seg..

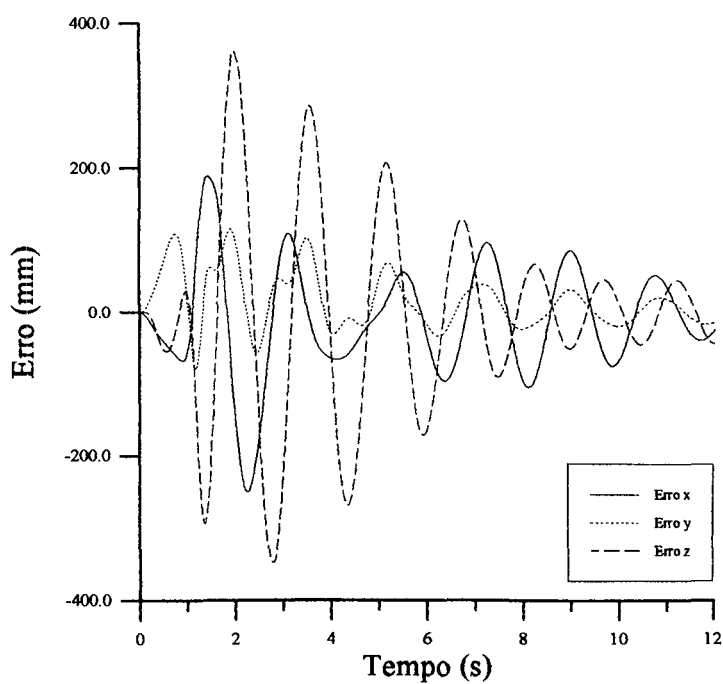


Fig. 6.38 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 seg..

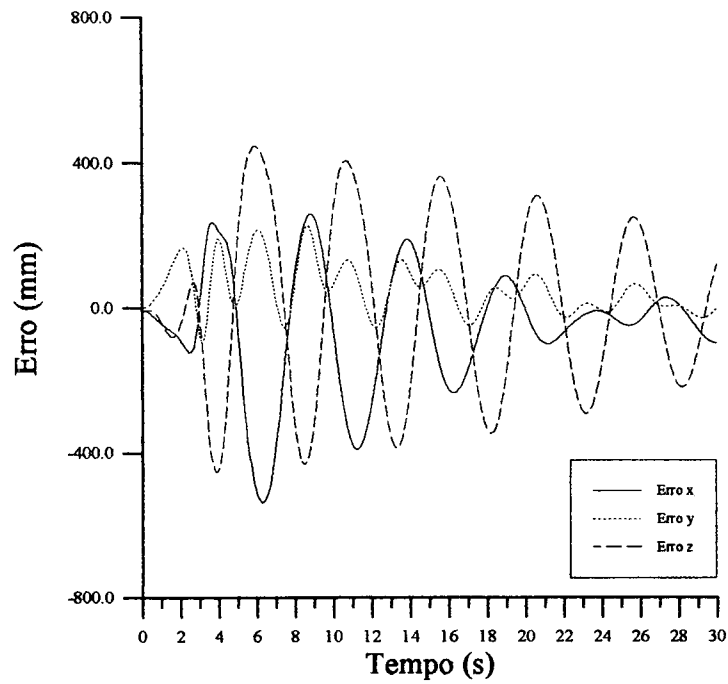


Fig. 6.39 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 seg..

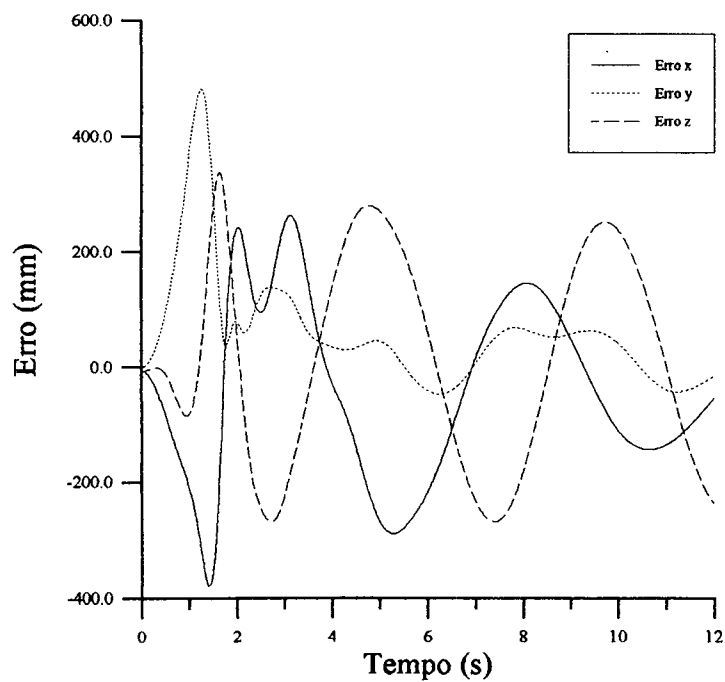


Fig. 6.40 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 seg..

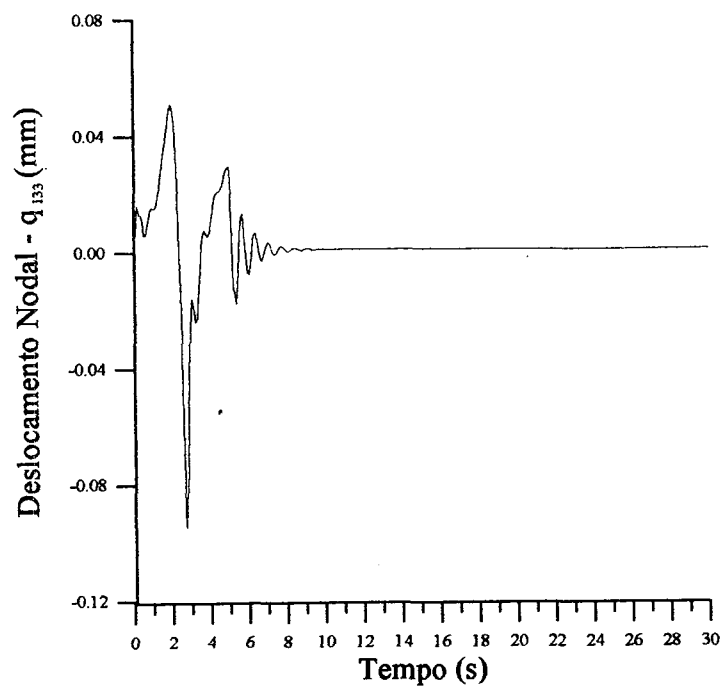


Fig 6.41 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 seg..

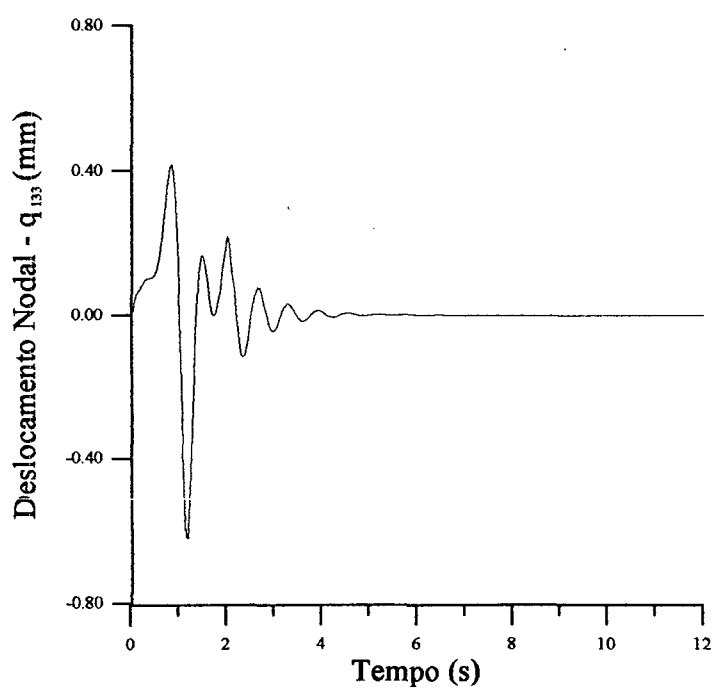


Fig 6.42 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 seg..

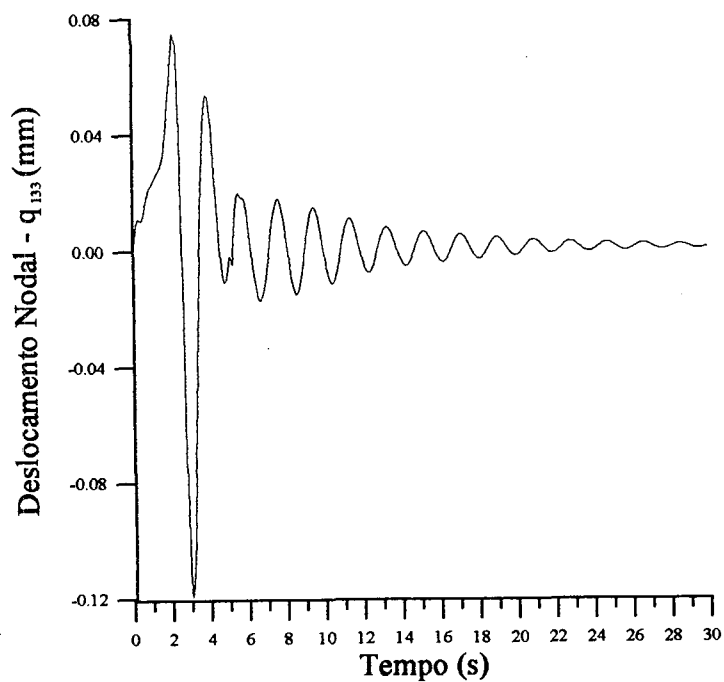


Fig 6.43 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 seg..

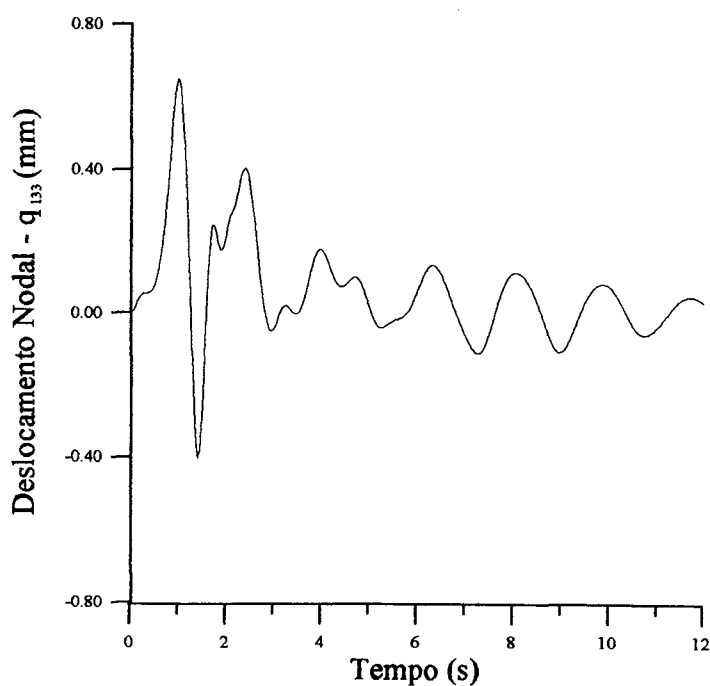


Fig 6.44 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 seg..

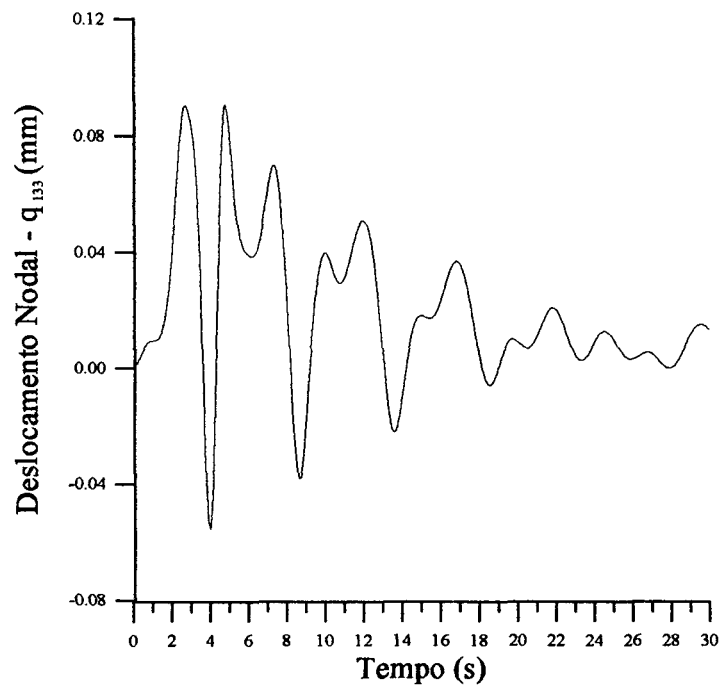


Fig 6.45 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 s.

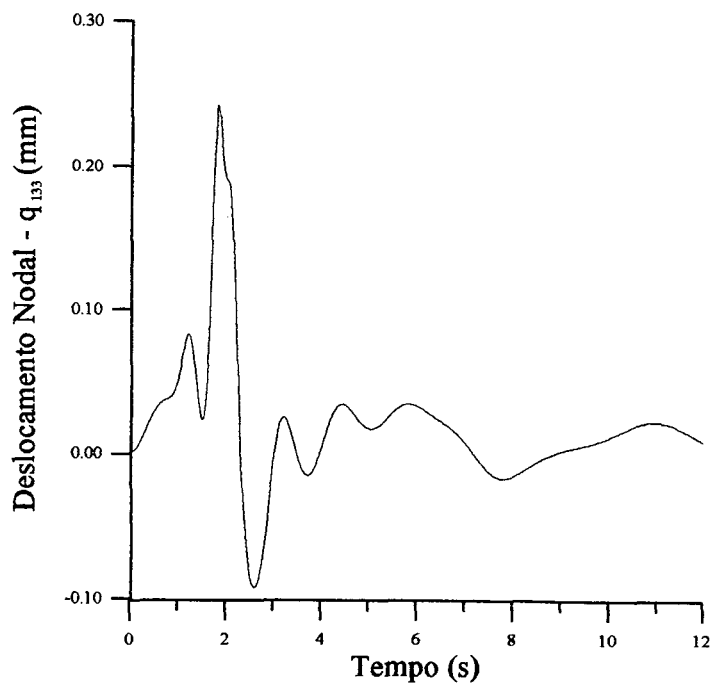


Fig 6.46 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 s.

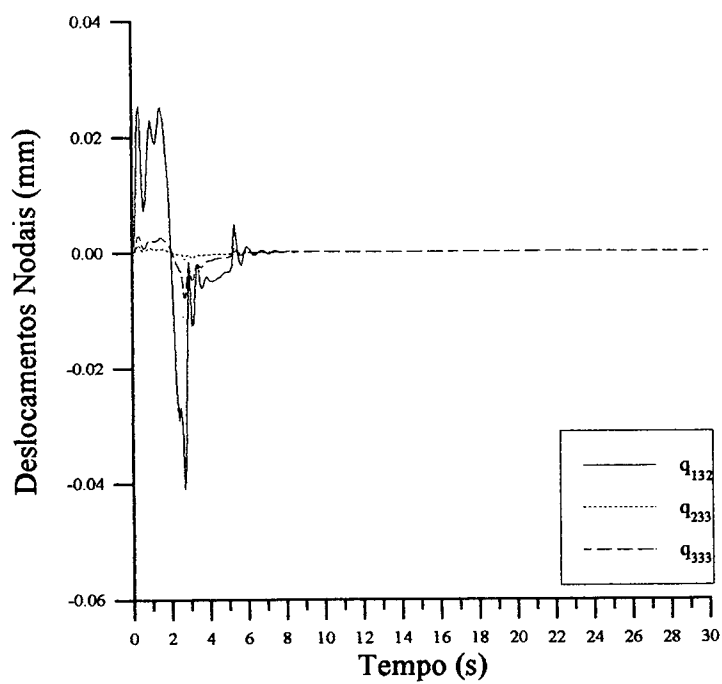


Fig. 6.47 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} e q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

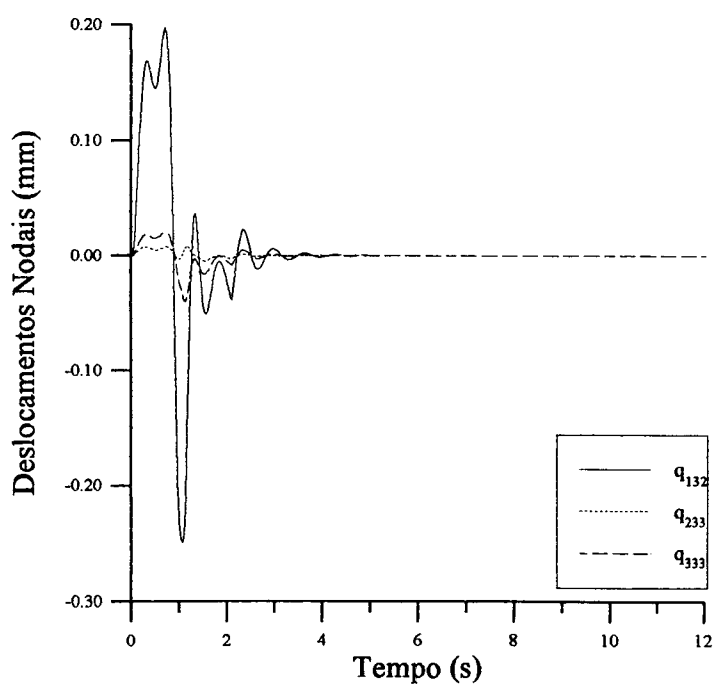


Fig. 6.48 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} e q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

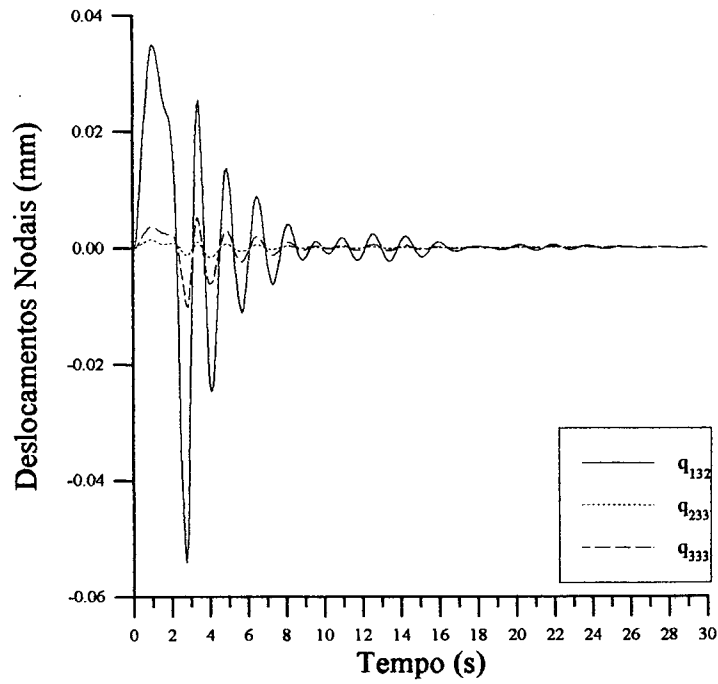


Fig. 6.49 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} e q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

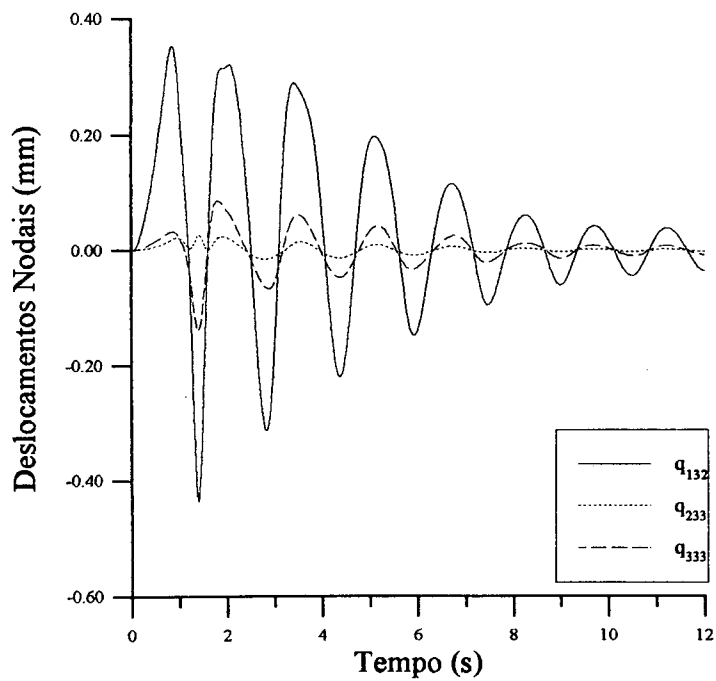


Fig. 6.50 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} e q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

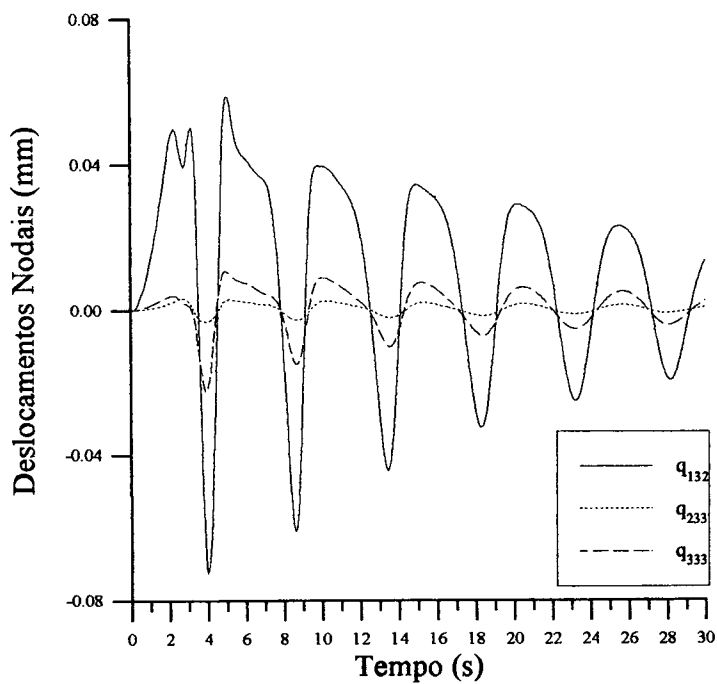


Fig. 6.51 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} e q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

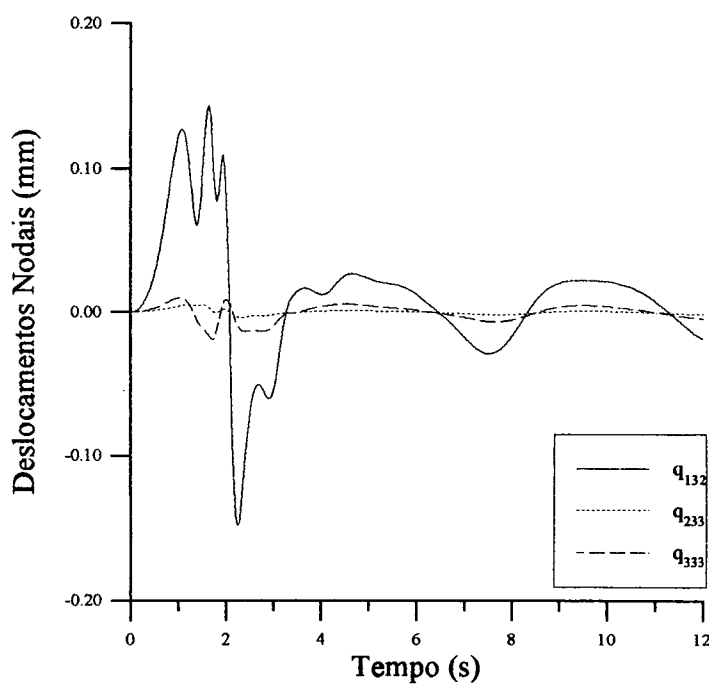


Fig. 6.52 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} e q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

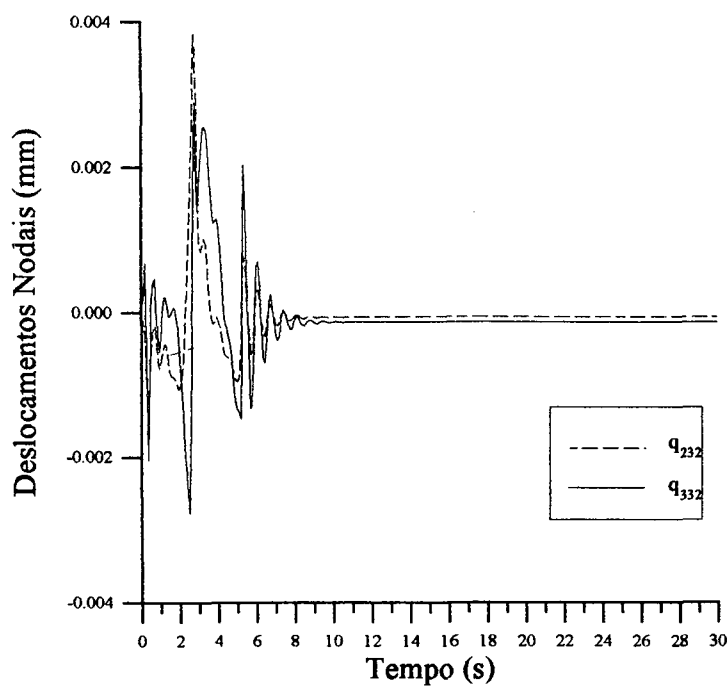


Fig. 6.53 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

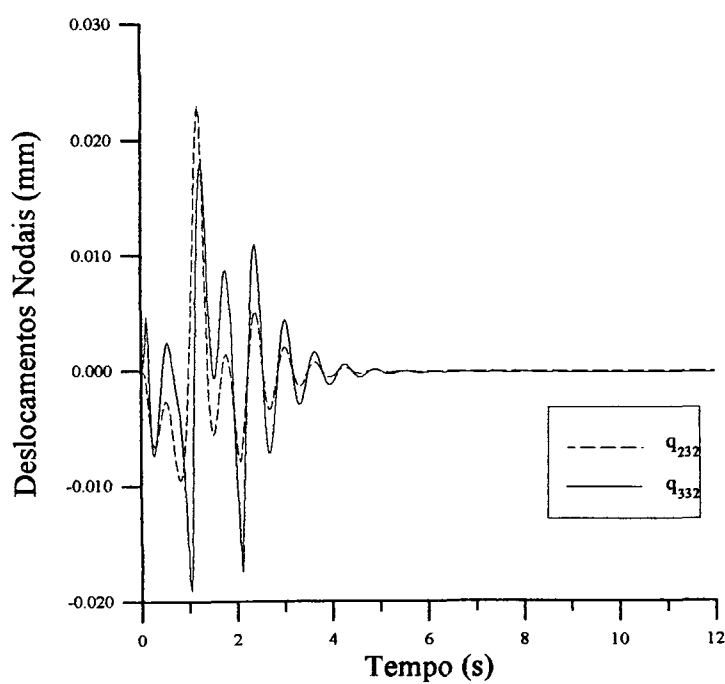


Fig. 6.54 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

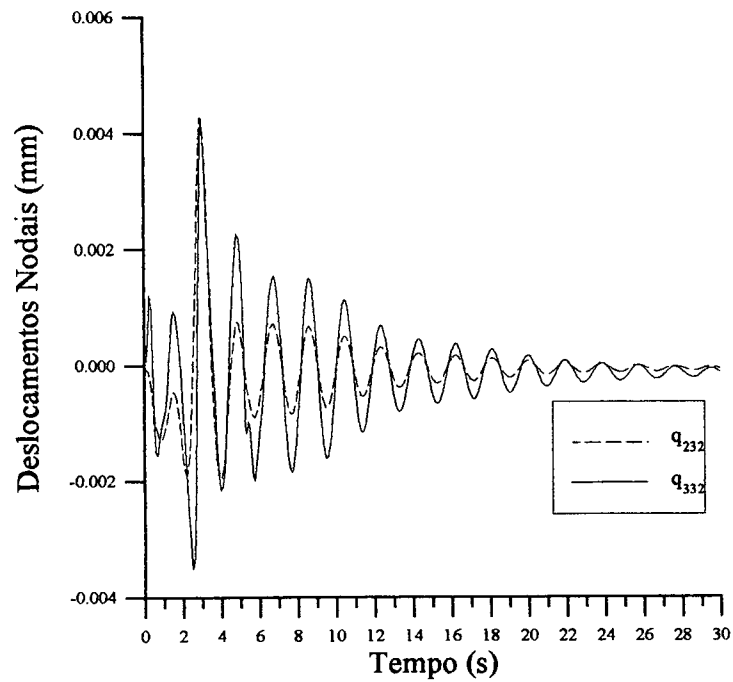


Fig. 6.55 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

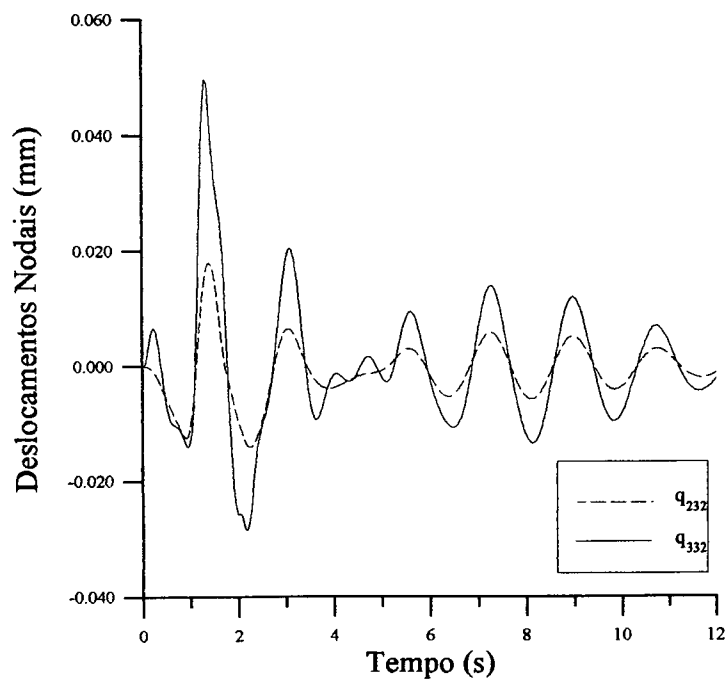


Fig. 6.56 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

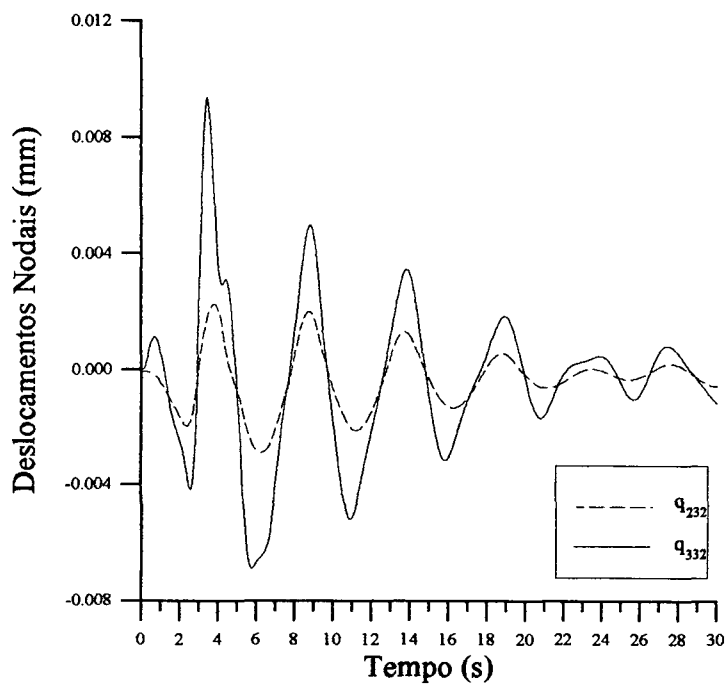


Fig. 6.57 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

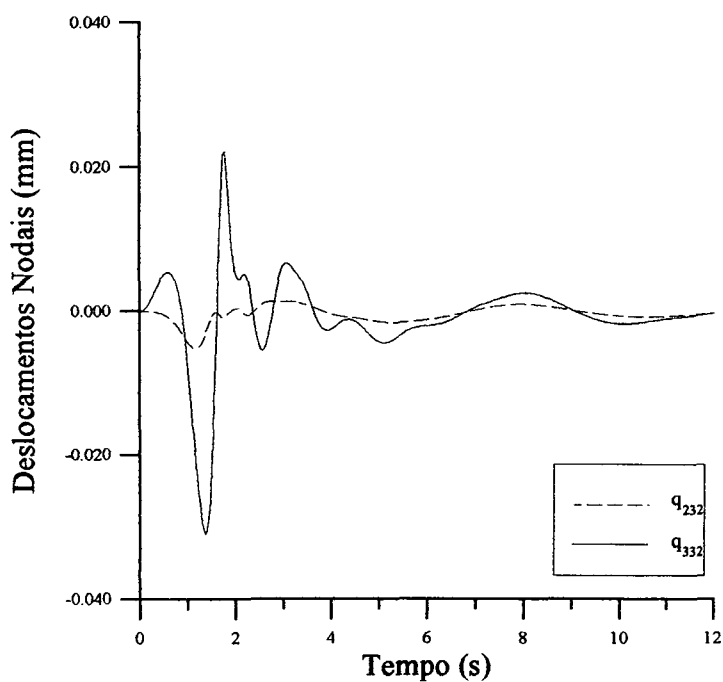


Fig. 6.58 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

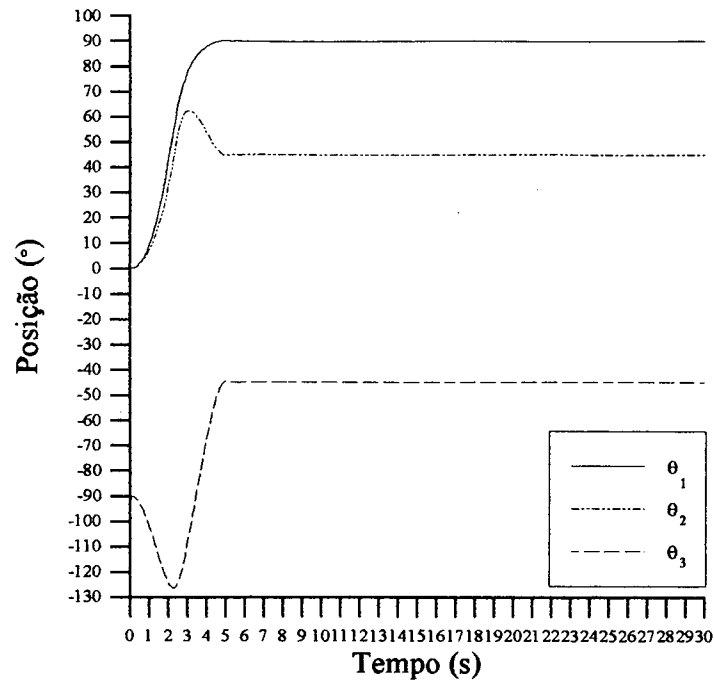


Fig. 6.59 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p / K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, e $t = 5 \text{ s}$.

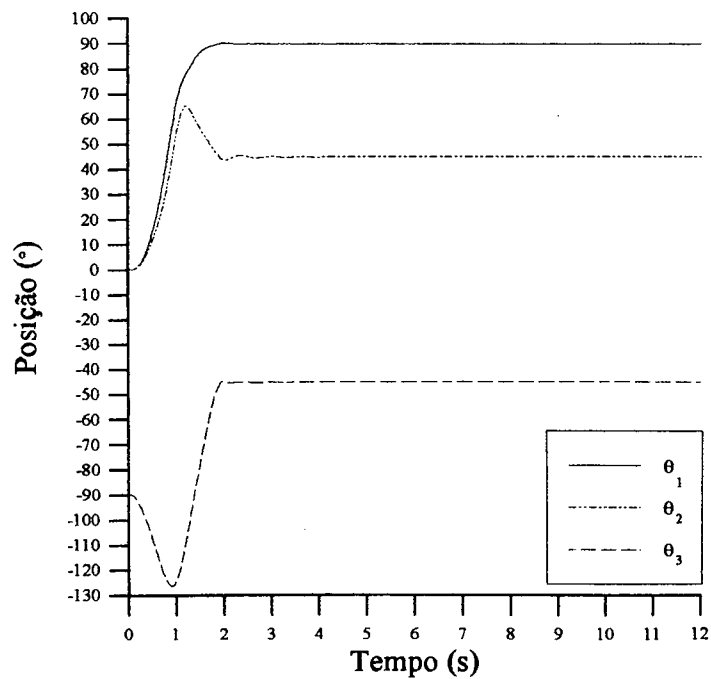


Fig. 6.60 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p / K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, e $t = 2 \text{ s}$.

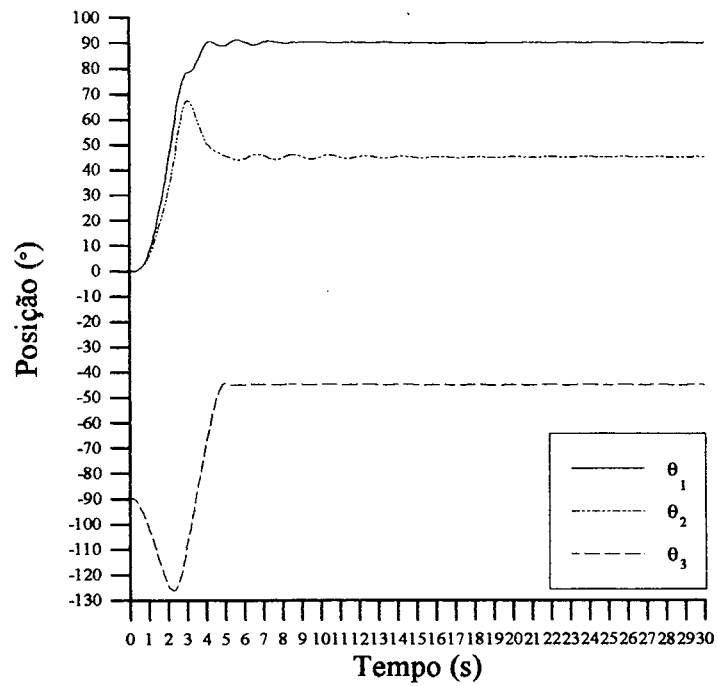


Fig. 6.61 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p / K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, e $t = 5 \text{ s}$.

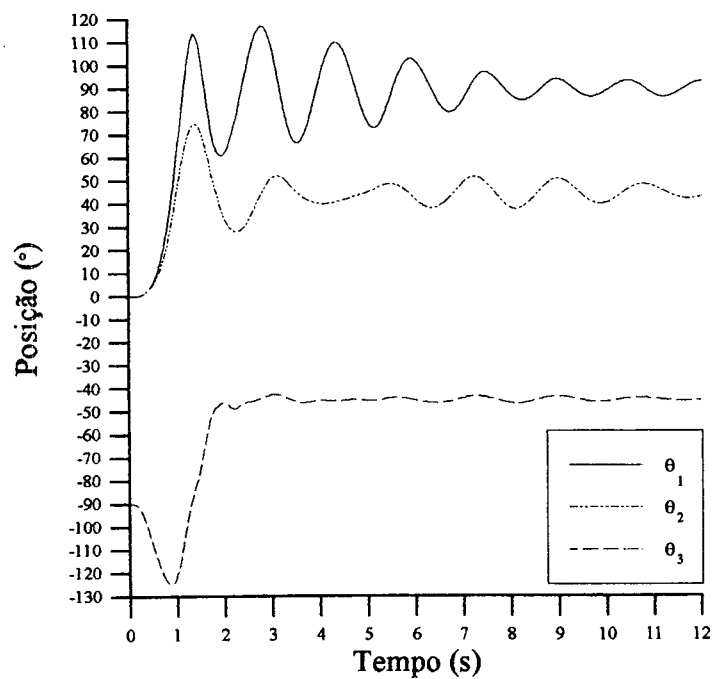


Fig. 6.62 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p / K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, e $t = 2 \text{ s}$.

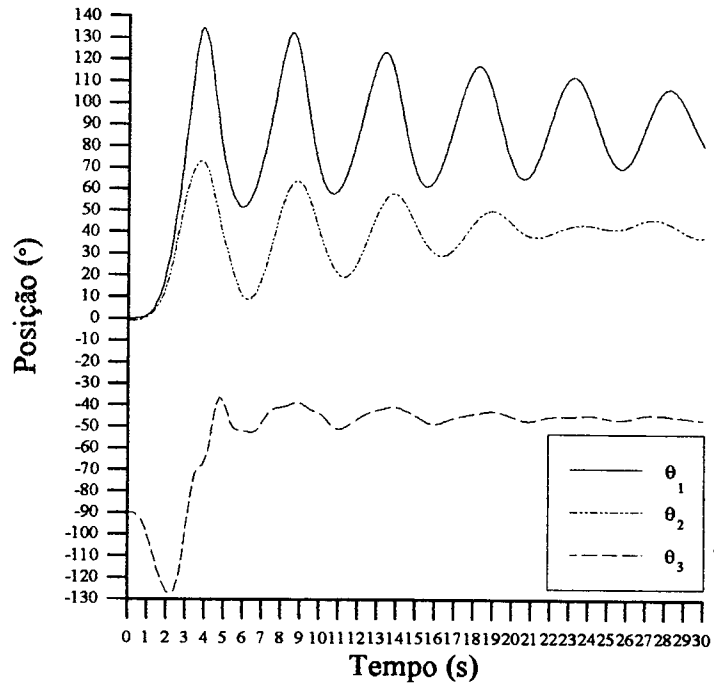


Fig. 6.63 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p/ K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, e $t = 5 \text{ s}$.

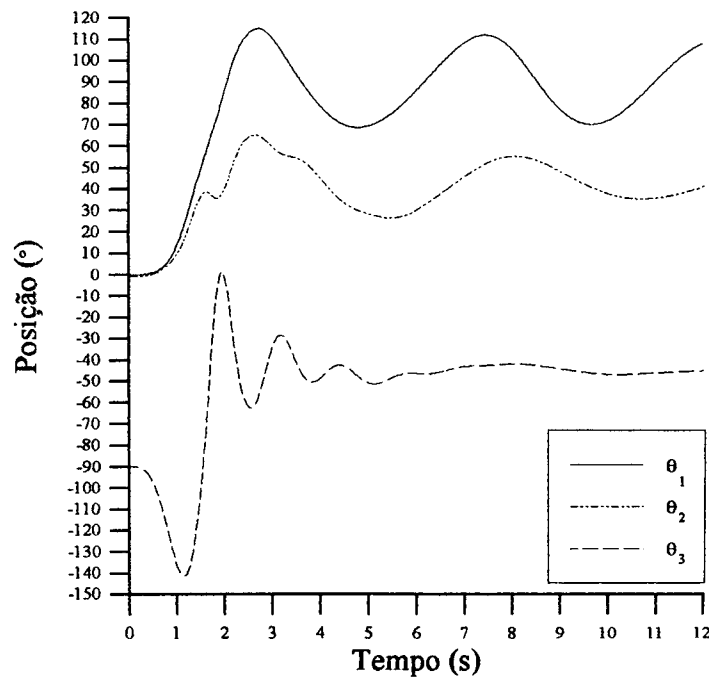


Fig. 6.64 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p/ K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, e $t = 2 \text{ s}$.

Os resultados obtidos permitem uma avaliação do desempenho e do comportamento global do sistema.

Conforme já observado na etapa de análise estática, são aqui também os deslocamentos devidos à flexibilidade das juntas que mais influenciam nos erros obtidos. Também pode-se observar que a alteração dos carregamentos inerciais e giroscópicos devida a alteração dos parâmetros ligados ao tempo de trajetória (aceleração e velocidade), sensibiliza enormemente o comportamento do sistema.

Outro aspecto importante, é que a determinação da variação dos valores dos deslocamentos das coordenadas no tempo, possibilita a identificação dos pontos e aspectos mais críticos da estrutura, e desta forma avaliá-los para as diferentes situações de modelagem.

A seguir, são mostrados os resultados obtidos para a configuração contendo ligações mais pesadas e mais rígidas, cujas características são mostradas na página 120.

Nas figuras 6.65 a 6.70, são apresentados os erros de posição da extremidade da cadeia cinemática, para as trajetórias de 5 e 2 s, cujos perfis estão mostrados nas figuras 6.31 a 6.34, para os diferentes valores de rigidez das juntas.

Nas figuras 6.71 a 6.88, são mostrados os deslocamentos de algumas das coordenadas dos últimos nós de cada ligação, onde são variados os parâmetros: tempo da trajetória (2 e 5 seg.) e rigidez das juntas ($K = 300, .30$ e 3×10^6 Nmm/rad). As coordenadas q_{133} e q_{132} , representam os pequenos deslocamentos nas direções z e y, respectivamente, do sistema de coordenadas da ligação 1, q_{233} e q_{232} , os deslocamentos ao longo das direções y e z do sistema local da ligação 2, e q_{333} e q_{332} , os

deslocamentos nas direções z e y do sistema local da ligação 3.

Nas figuras 6.89 a 6.94 são mostrados obtidos para as coordenadas que descrevem os grandes deslocamentos efetuados pelas ligações em torno dos eixos das juntas, θ_1 , θ_2 e θ_3 , onde são variados também os parâmetros tempo de trajetória e rigidez das juntas.

Comparando-se estes resultados com os obtidos para a configuração anterior, pode-se observar que apesar dos deslocamentos nodais serem agora menores, resultantes da utilização de ligações com maior rigidez, os erros ficaram maiores. Isto ocorre em consequência do aumento dos deslocamentos devidos à flexibilidade das juntas, que por sua vez é provocado pelo aumento da inércia das ligações.

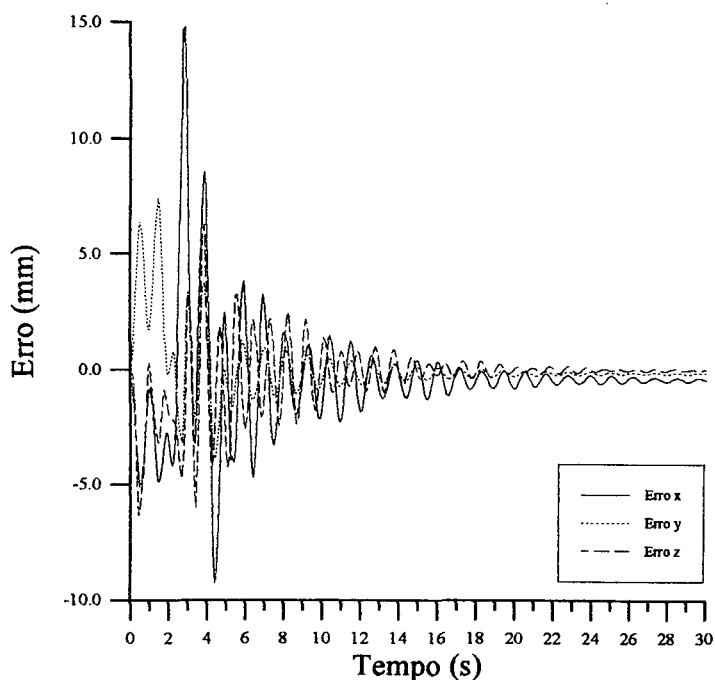


Fig. 6.65 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 seg.

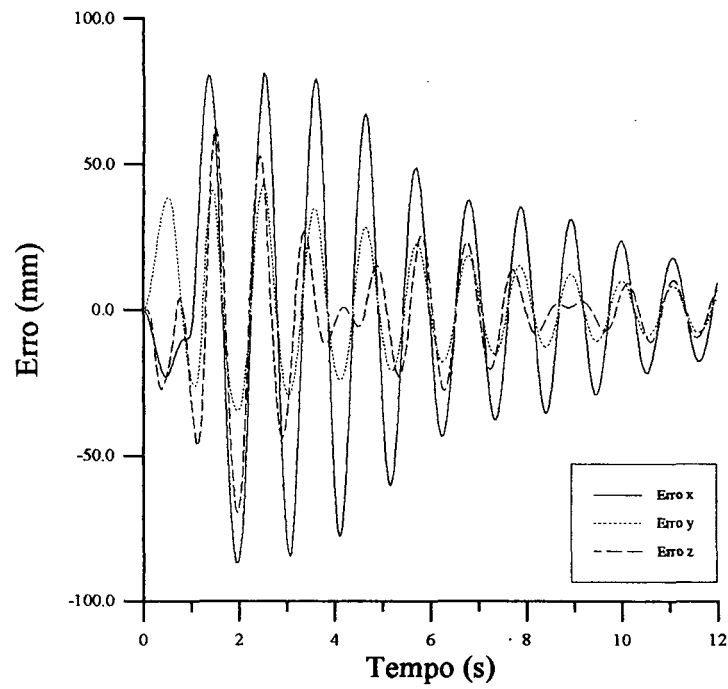


Fig. 6.66 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 seg.

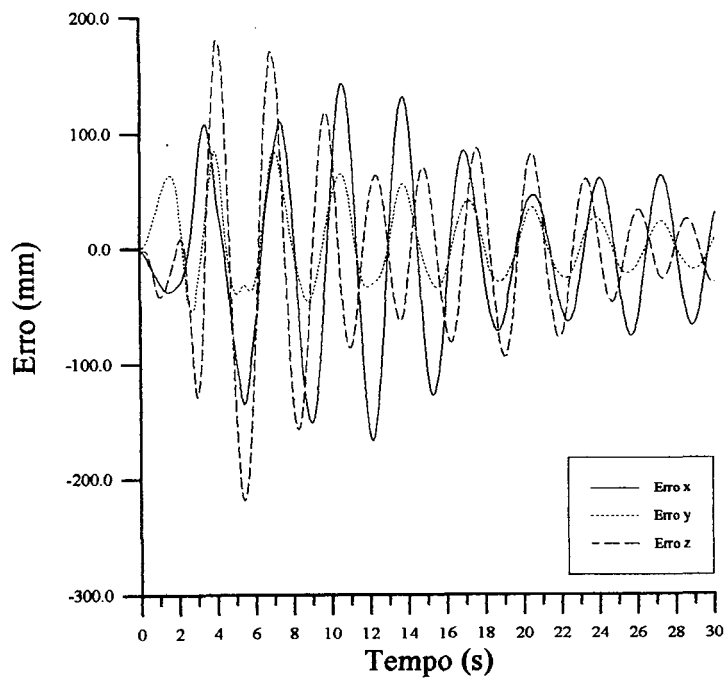


Fig. 6.67 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 seg.

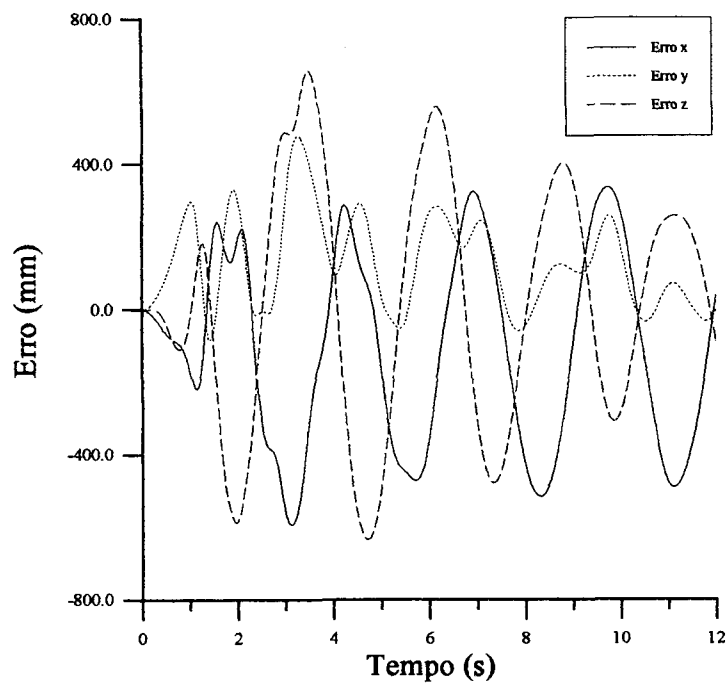


Fig. 6.68 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 seg.

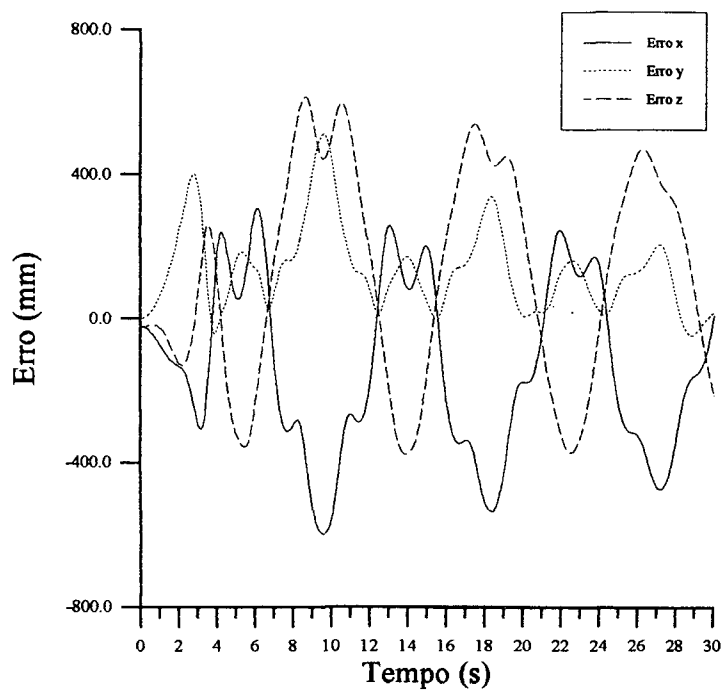


Fig. 6.69 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 seg.

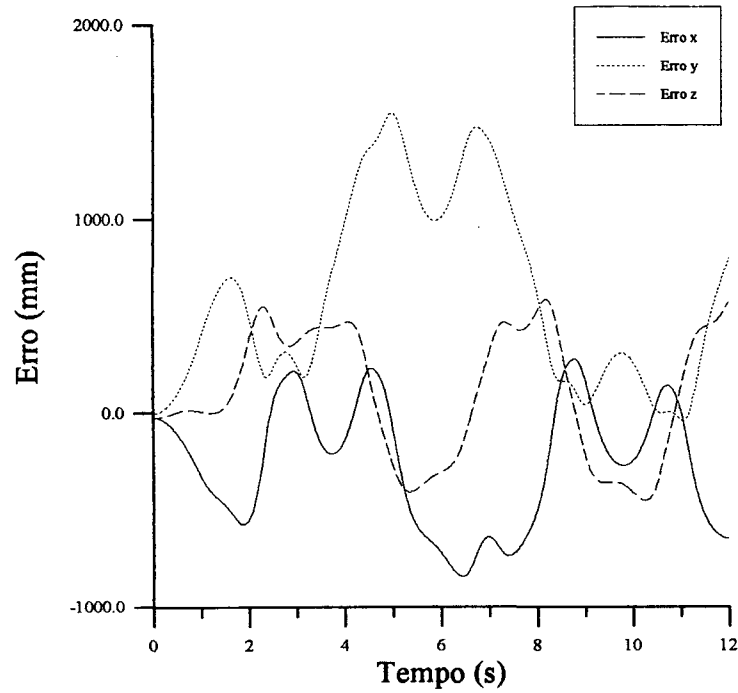


Fig. 6.70 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 seg.

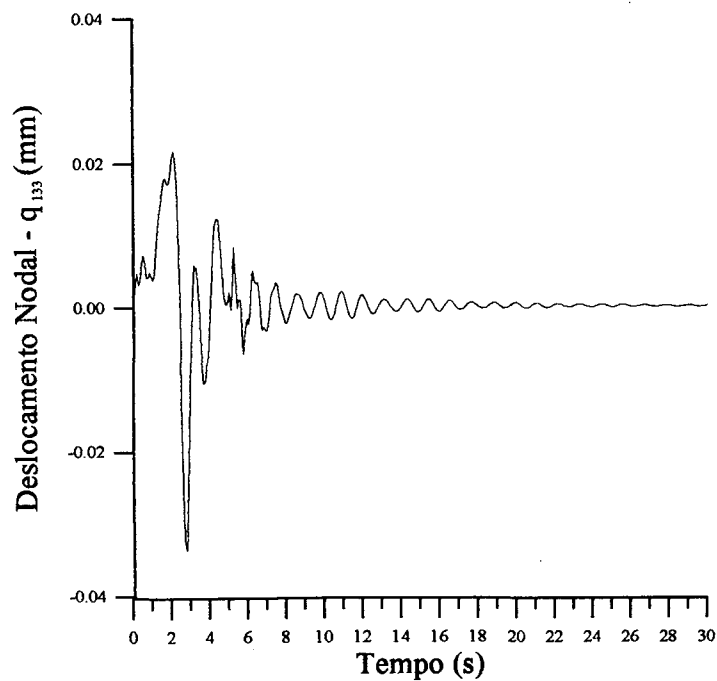


Fig 6.71 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 s.

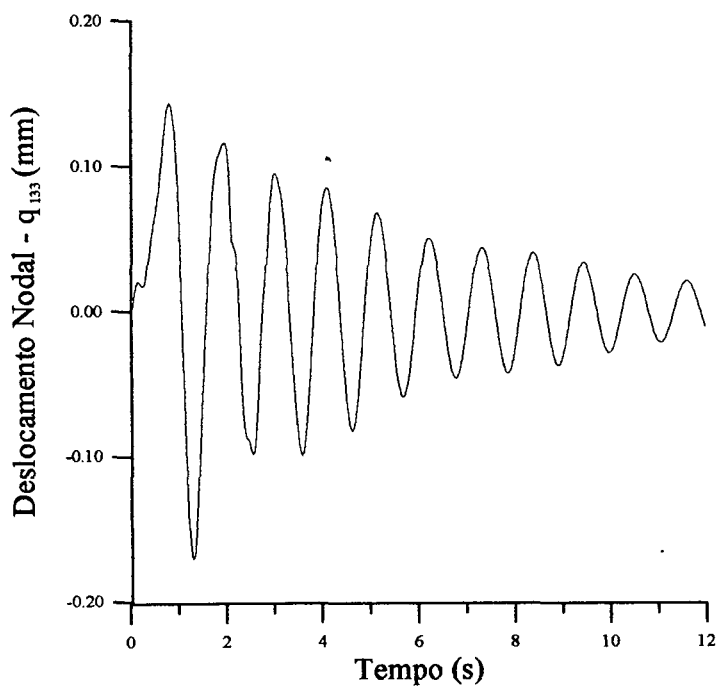


Fig 6.72 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 s.

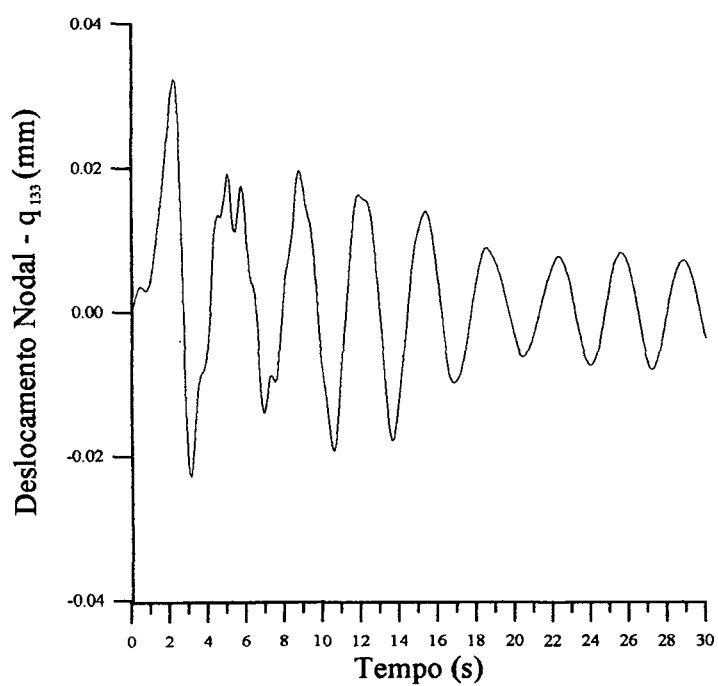


Fig 6.73 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 s.

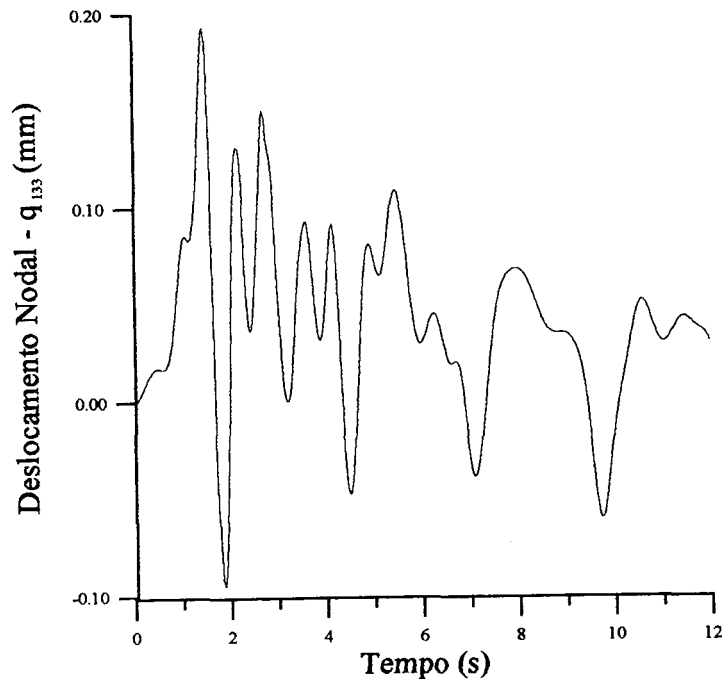


Fig 6.74 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 s.

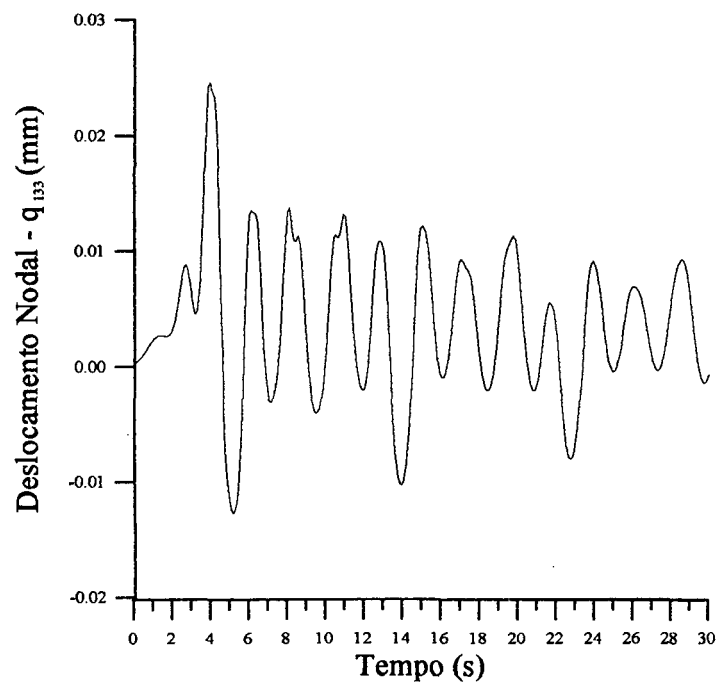


Fig 6.75 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 5 s.

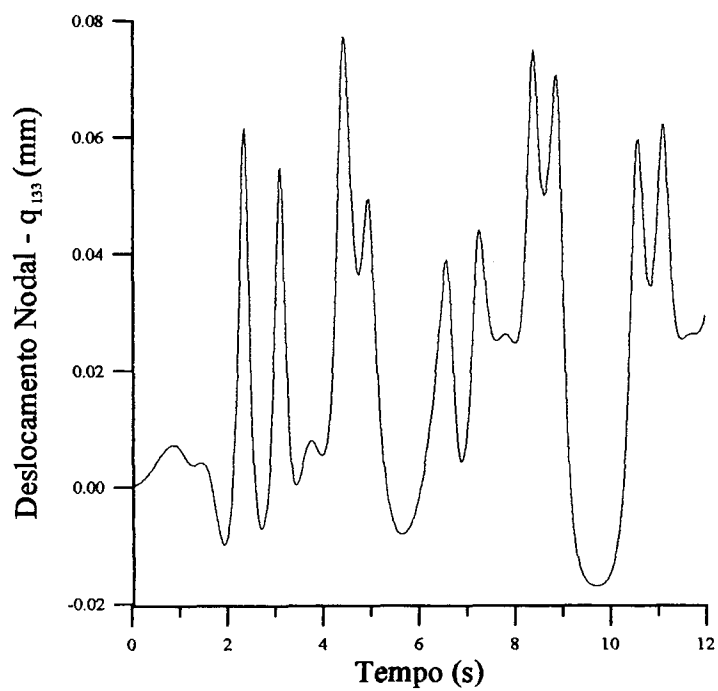


Fig 6.76 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e tempo de trajetória 2 s.

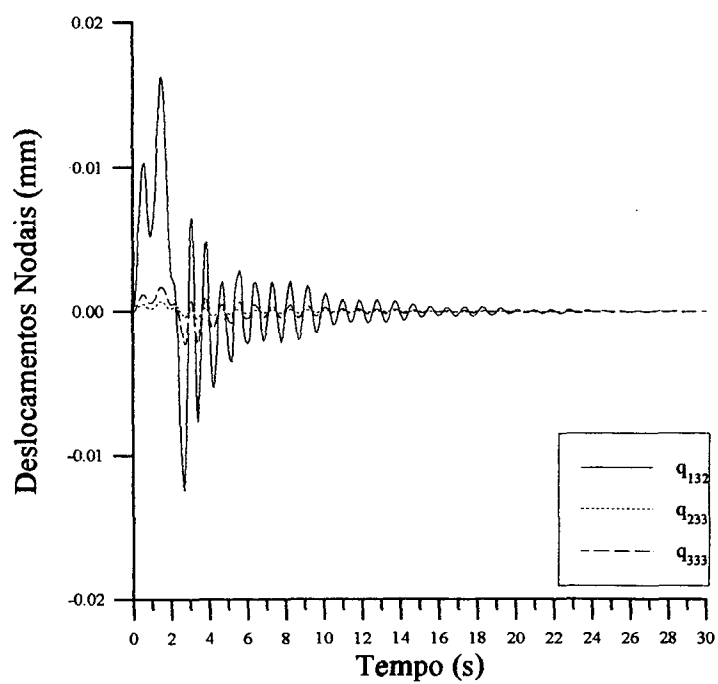


Fig 6.77 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} , q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

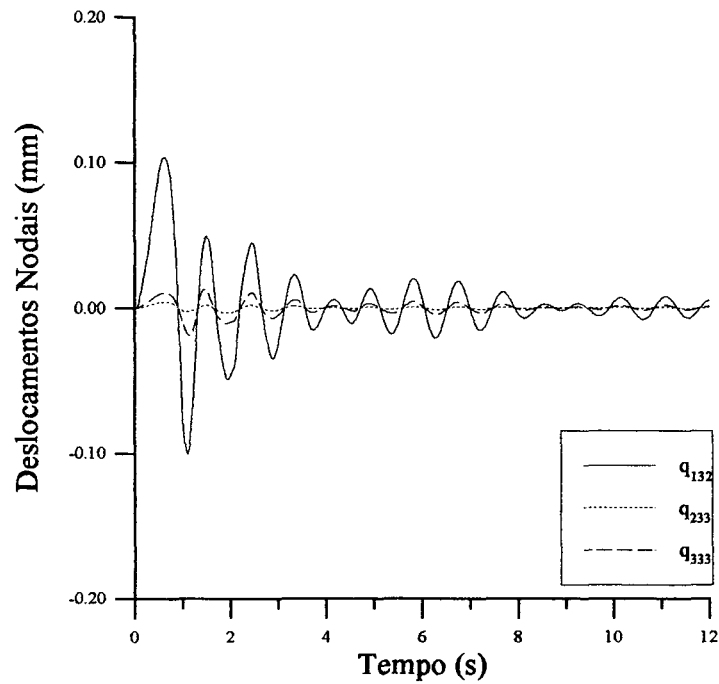


Fig 6.78 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} , q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

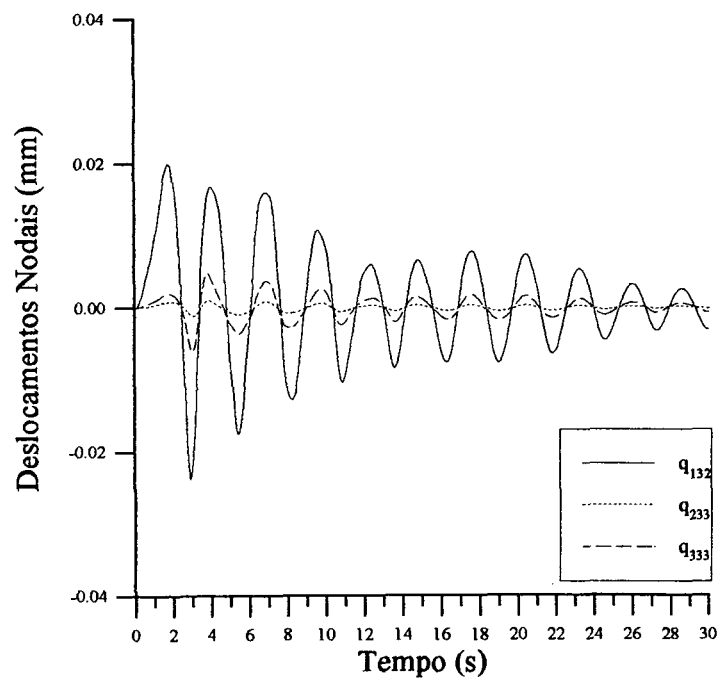


Fig 6.79 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} , q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

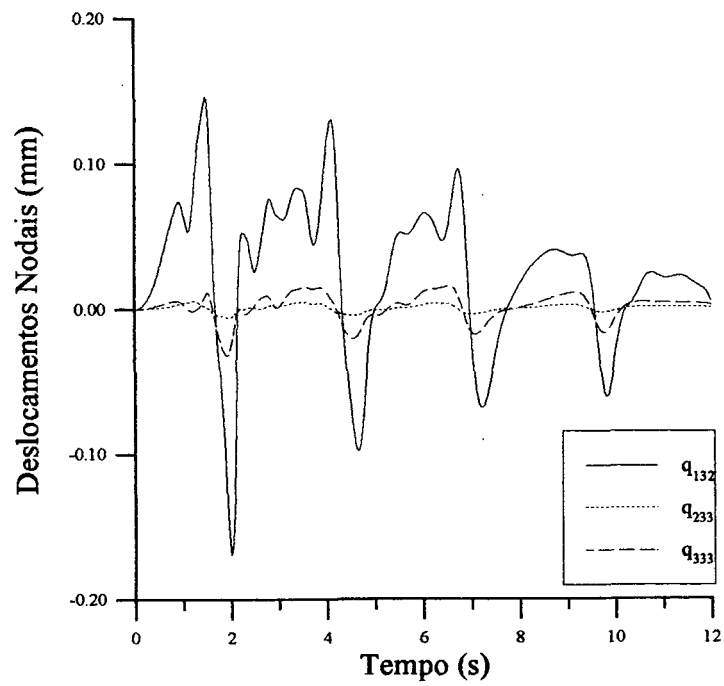


Fig 6.80 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} , q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

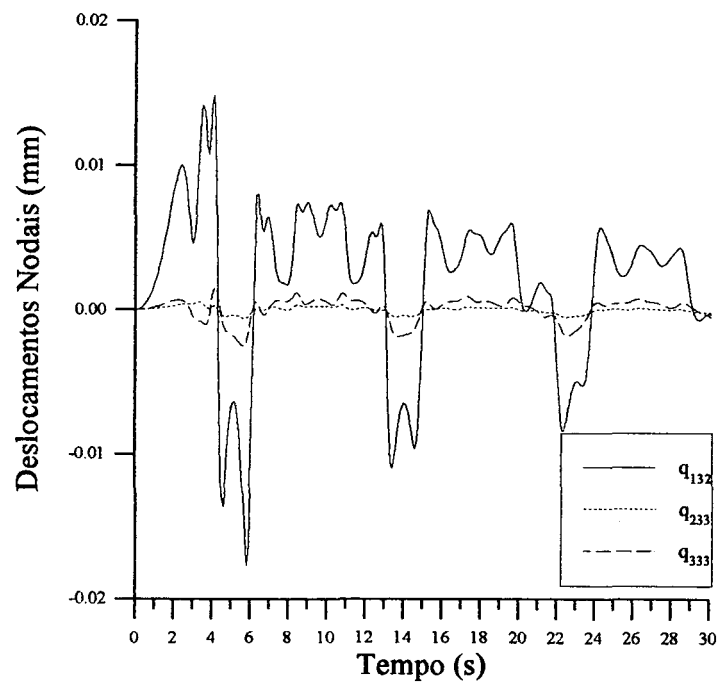


Fig 6.81 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} , q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

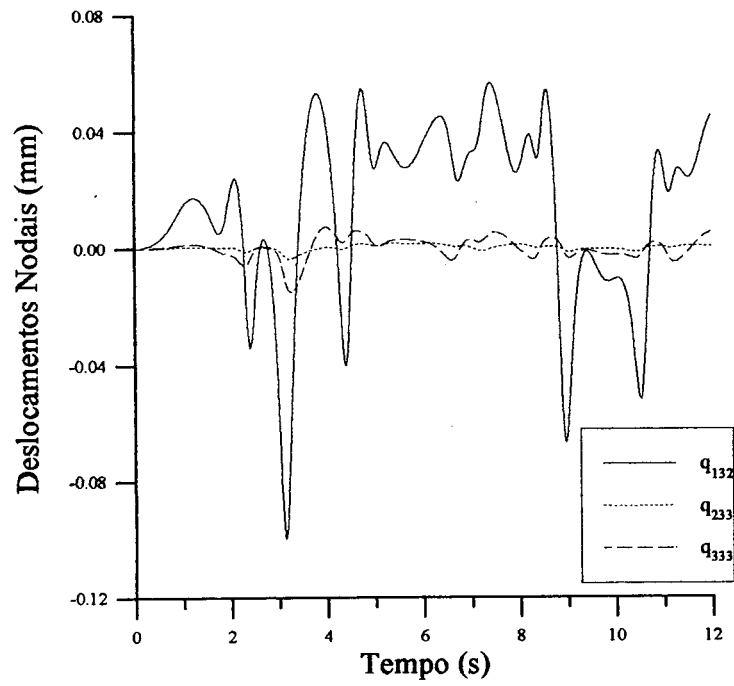


Fig 6.82 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} , q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

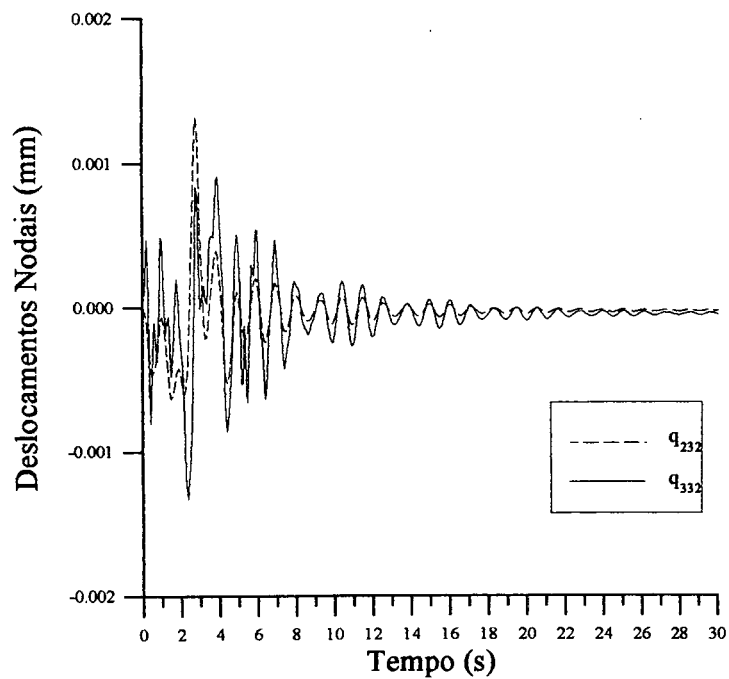


Fig 6.83 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} , para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

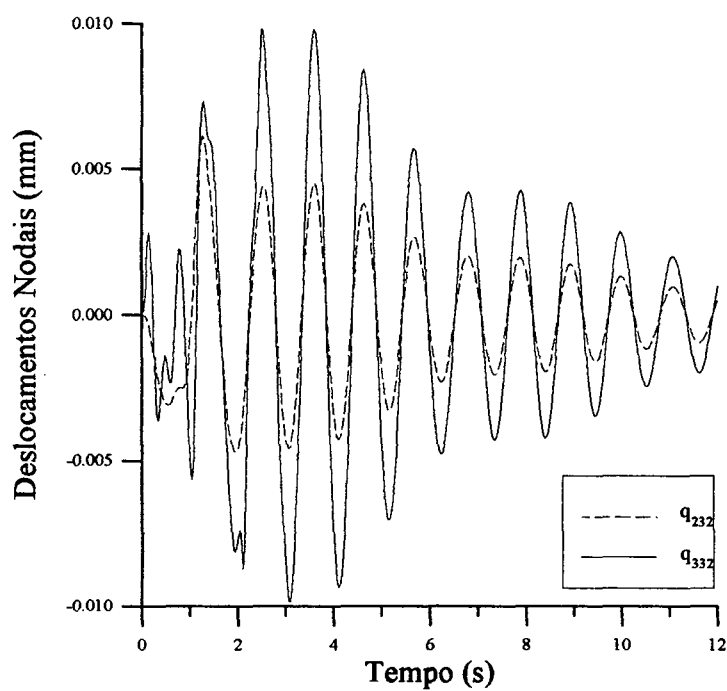


Fig 6.84 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} , para $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

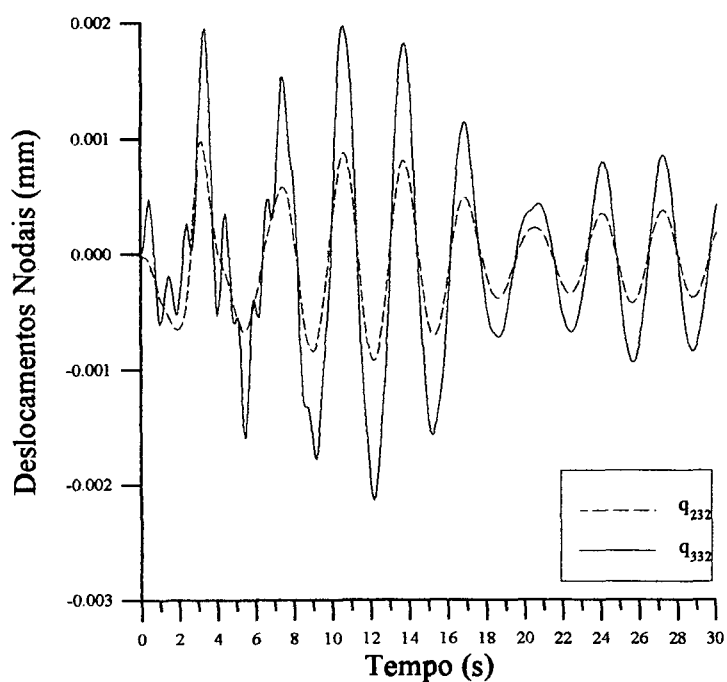


Fig 6.85 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} , para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

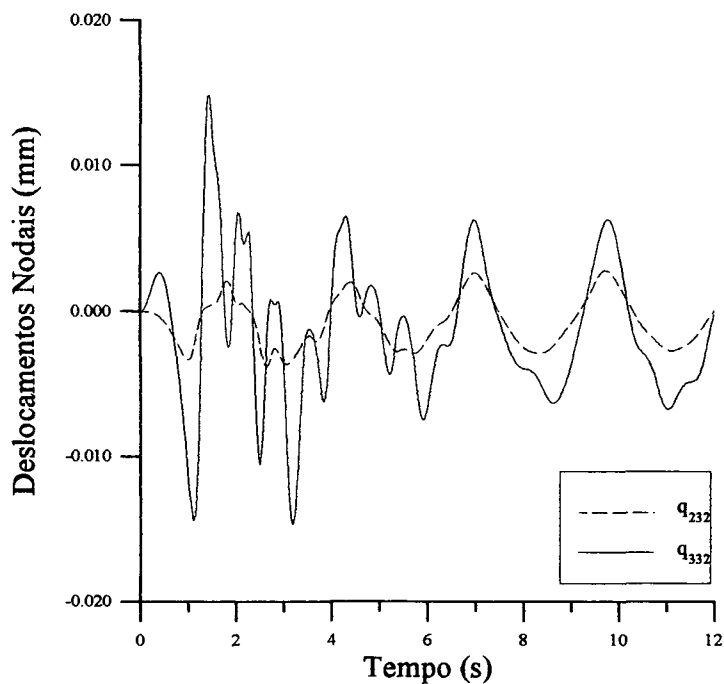


Fig 6.86 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} , para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

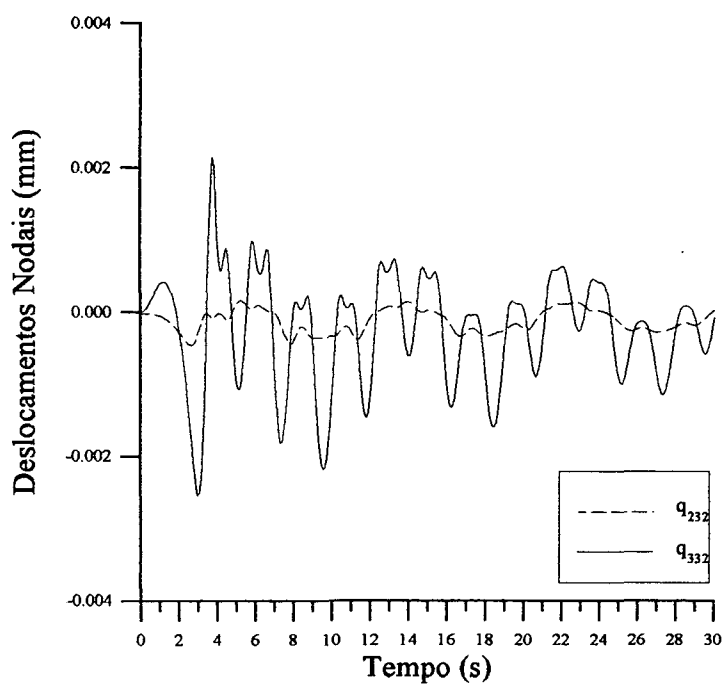


Fig 6.87 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} , para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

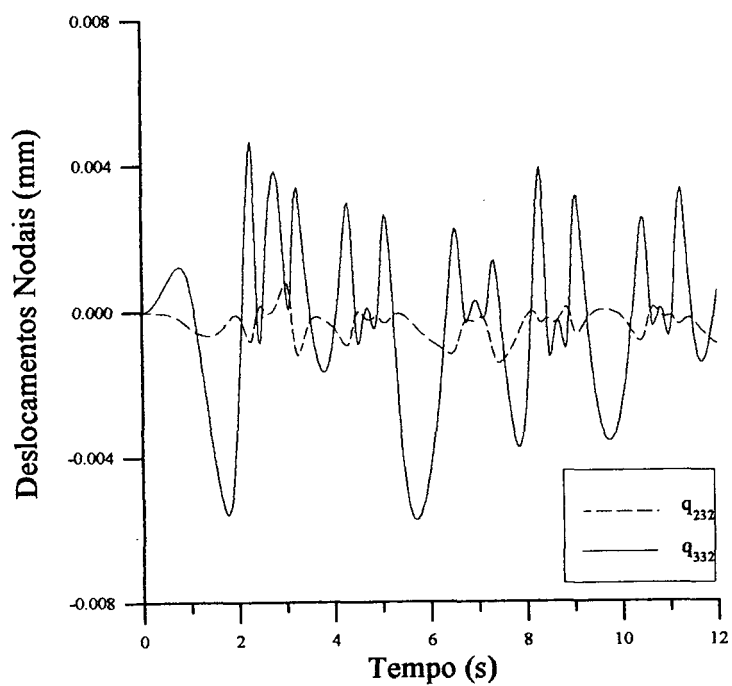


Fig 6.88 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} , para $K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

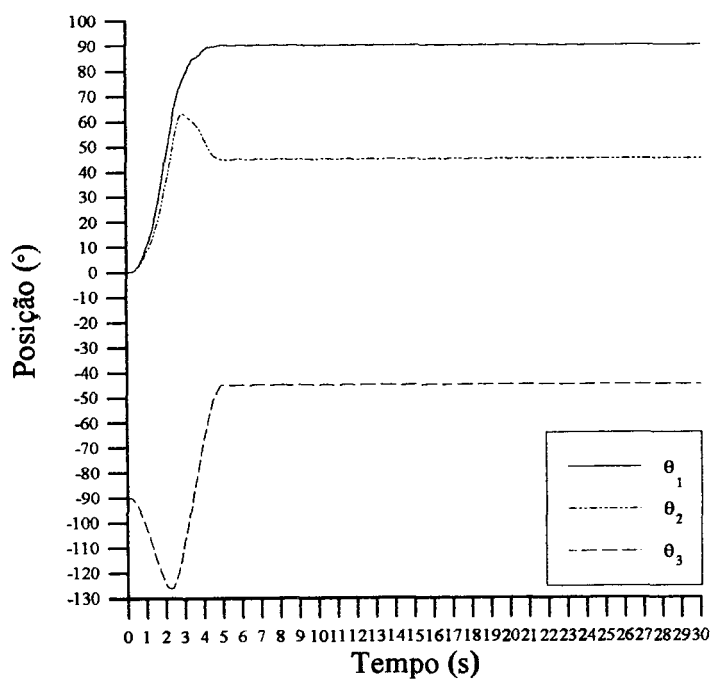


Fig. 6.89 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 p/ $K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 5$ s.

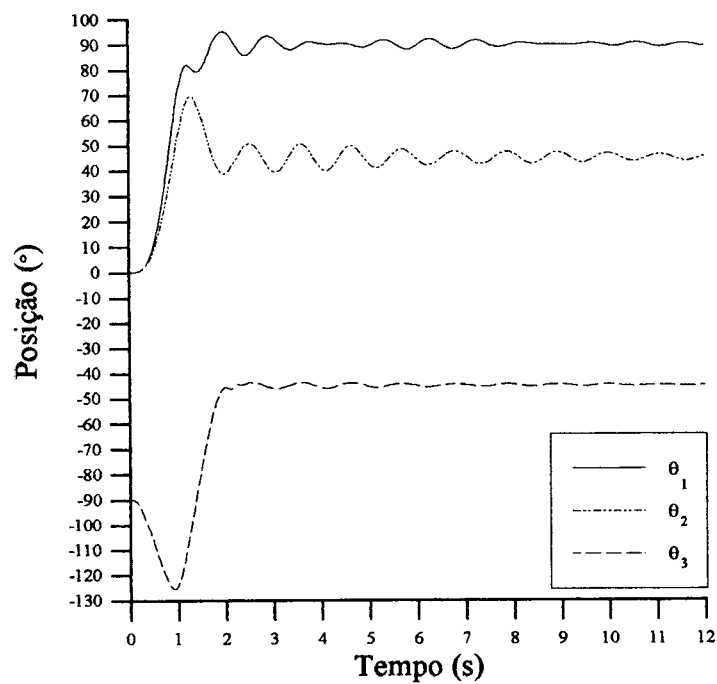


Fig. 6.90 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p / K_1 = K_2 = K_3 = 300 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, e $t = 2 \text{ s}$.

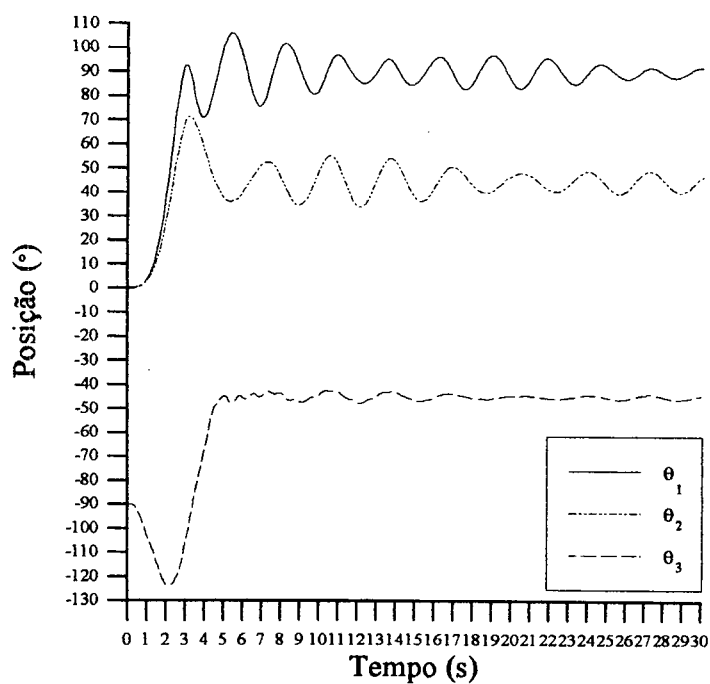


Fig. 6.91 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p / K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, e $t = 5 \text{ s}$.

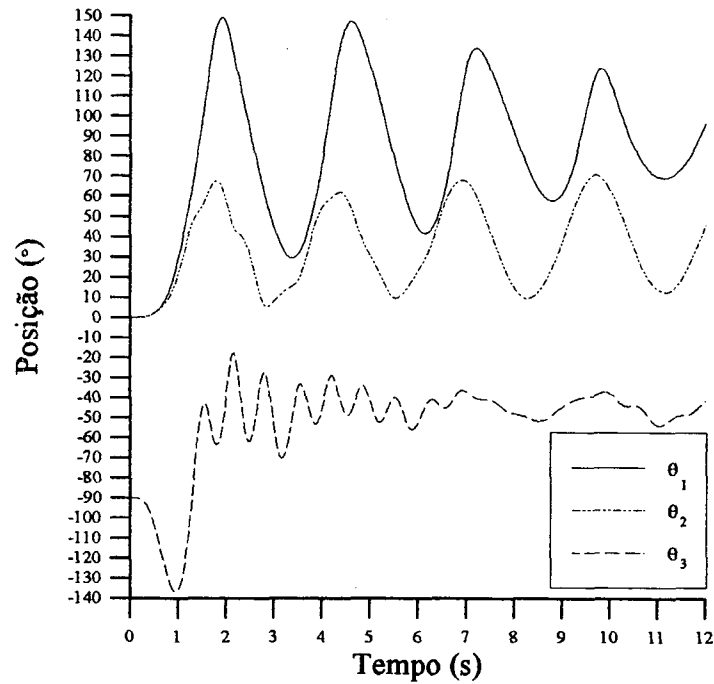


Fig. 6.92 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p / K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, e $t = 2 \text{ s}$.

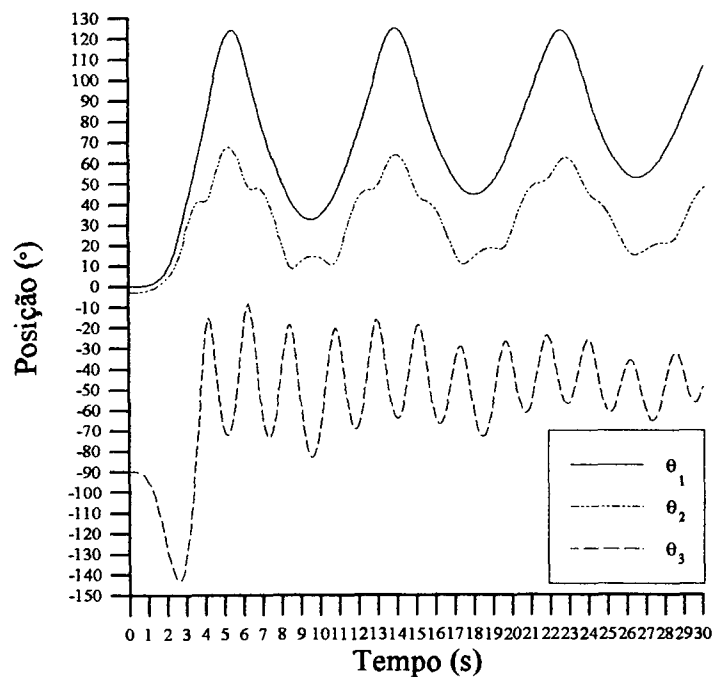


Fig. 6.93 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p / K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$, e $t = 5 \text{ s}$.

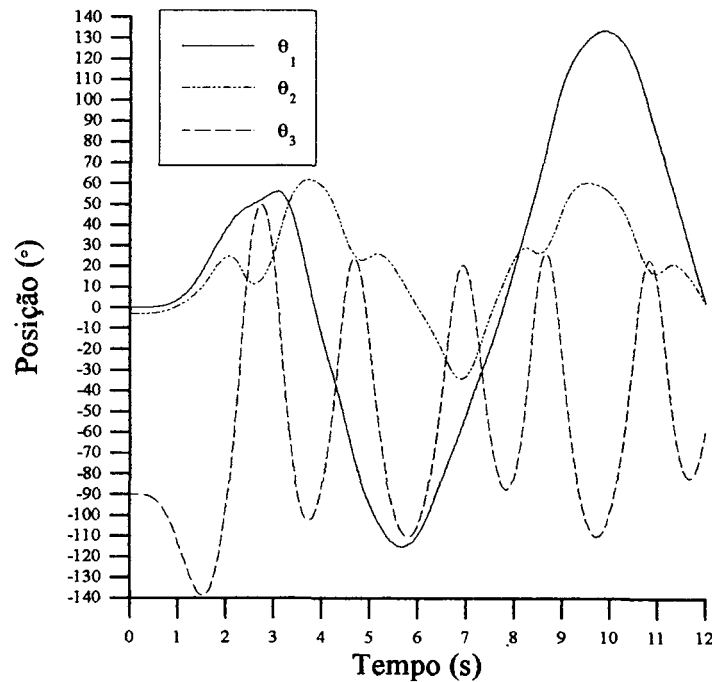


Fig. 6.94 - Deslocamentos das coordenadas θ_1 , θ_2 e θ_3
 $p/K_1 = K_2 = K_3 = 3 \times 10^6$ N mm/rad, e $t = 2$ s.

A seguir são apresentados os resultados obtidos para uma trajetória, onde a extremidade do manipulador movimenta-se um plano vertical, paralelo ao plano XZ. Esta trajetória consiste em conduzir o manipulador da posição inicial $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0^0$ para a posição $\phi_1 = 0^0$, $\phi_2 = 90^0$ e $\phi_3 = 0^0$, sendo o deslocamento da extremidade da cadeia feito sobre uma linha reta entre as duas posições.

Os resultados mostram o comportamento da configuração contendo as ligações mais leves e flexíveis, para um tempo de trajetória de 5 segundos e considerando-se duas situações quanto a flexibilidade das juntas: uma com $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad, e outra com $K_1 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad e $K_2 = 300 \times 10^6$ N mm/rad.

Observa-se que, apesar do movimento das ligações realizar-se num plano vertical, ocorrem erros de posição fora deste plano. Estes são consequência das ligações 2 e 3 não estarem dispostas sobre o mesmo plano da ligação 1, de modo que os carregamentos dinâmicos surgidos pelos movimentos destas, geram momentos sobre o eixo da junta, que acaba sofrendo deslocamentos devidos a sua flexibilidade. Esta situação também é responsável pelo aparecimento de deslocamentos nodais fora do plano vertical.

Pode-se observar também, que o aumento da rigidez da junta 2, mesmo provocando um aumento dos valores dos deslocamentos das coordenadas nodais, provoca uma melhora no desempenho global, principalmente pela grande diminuição da parcela de erro E_z .

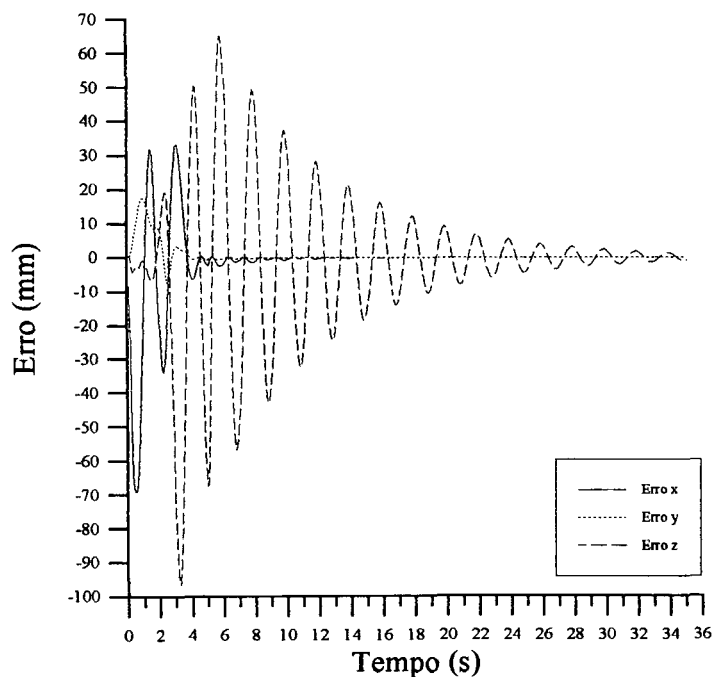


Fig. 6.95 - Erros de posição para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad.

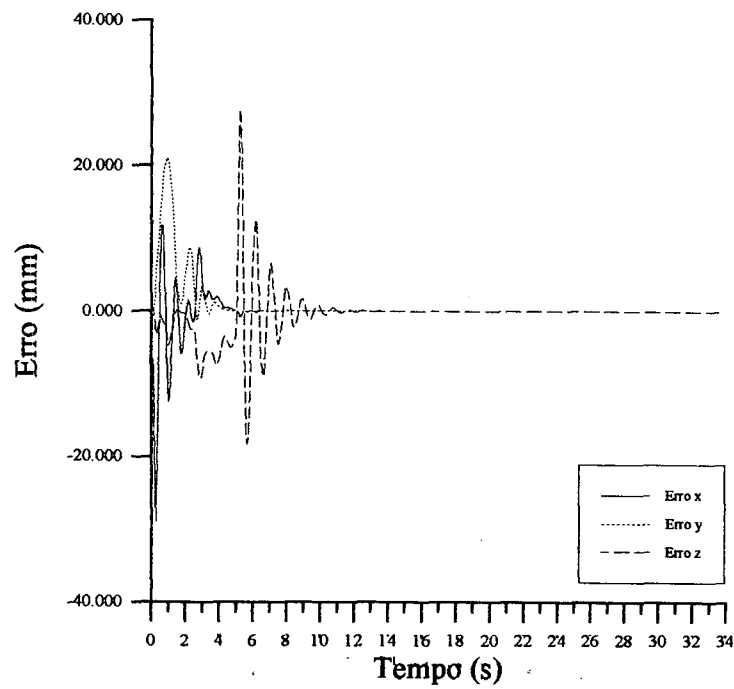


Fig. 6.96 - Erros de posição para $K_2 = 300 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$
e $K_1 = K_3 = 30 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$.

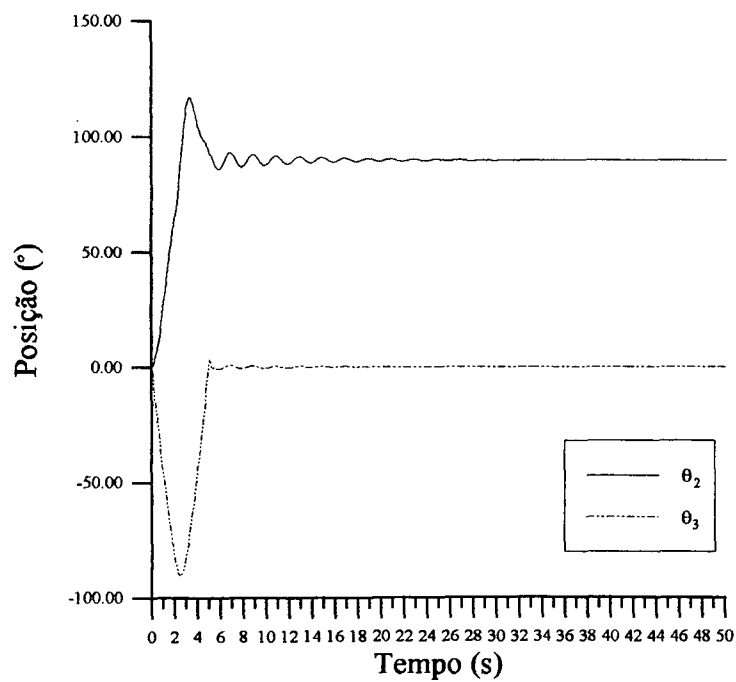


Fig. 6.97 - Deslocamentos das coordenadas θ_2 e θ_3 para
 $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6 \text{ N mm/rad}$.

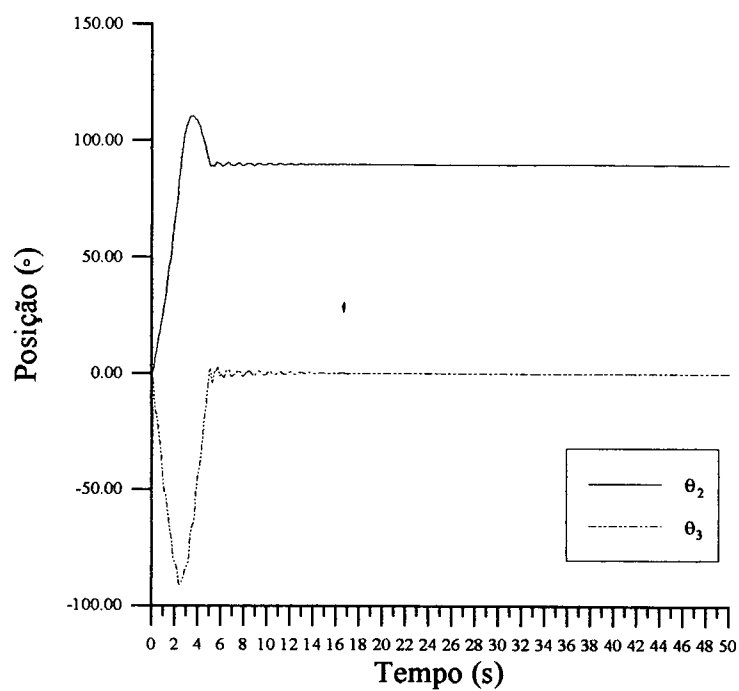


Fig. 6.98 - Deslocamentos das coordenadas θ_2 e θ_3 para $K_1 = K_3 = 30 \times 10^6$ e $K_2 = 300 \times 10^6$ N mm/rad.

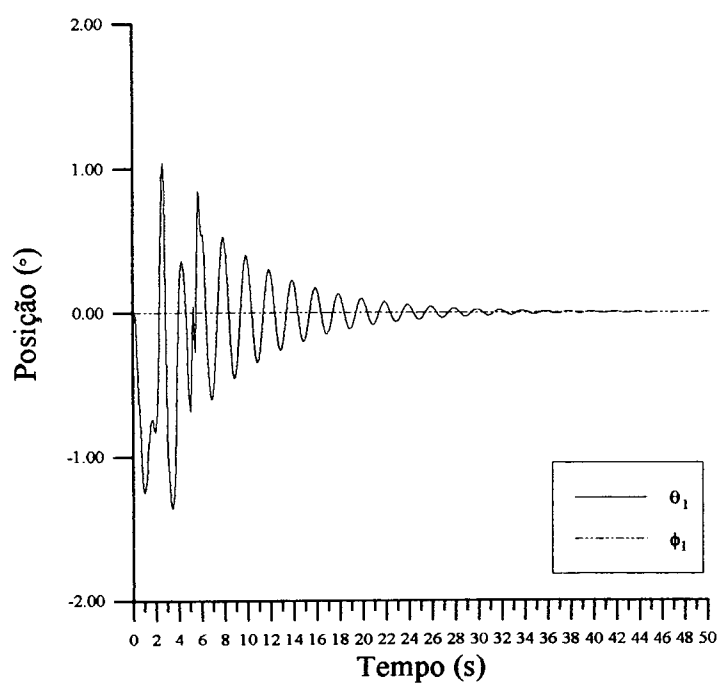


Fig. 6.99 - Deslocamentos da coordenada θ_1 para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad.

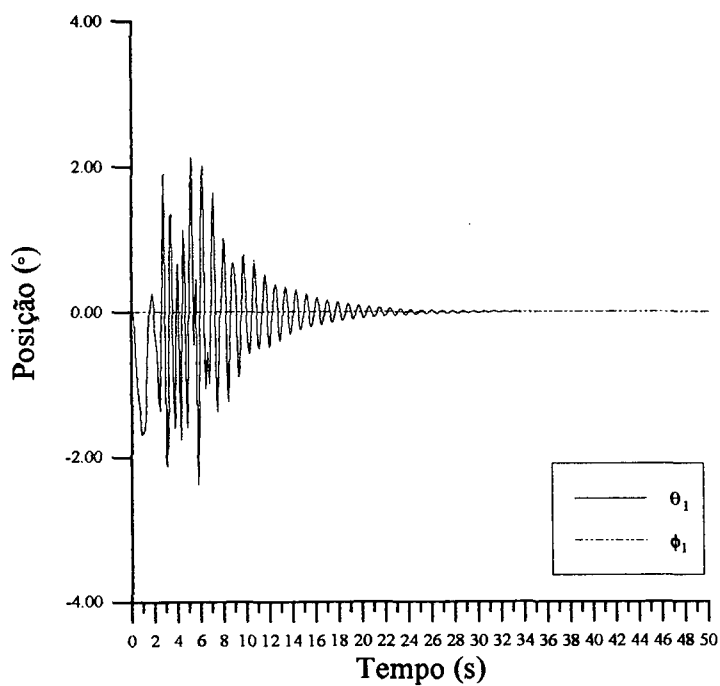


Fig. 6.100 -Deslocamentos da coordenada θ_1 para $K_1 = K_3 = 30 \times 10^6$ e $K_2 = 300 \times 10^6$ N mm/rad.

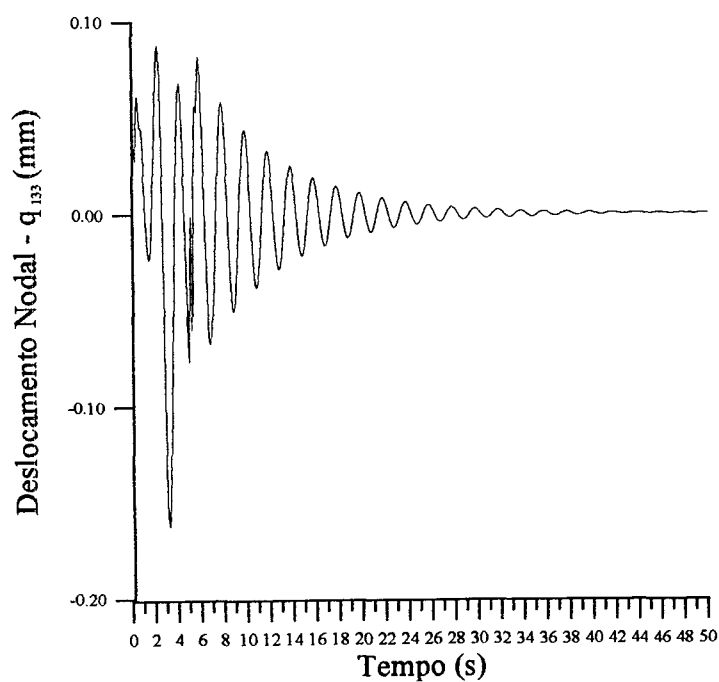


Fig. 6.101 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad.

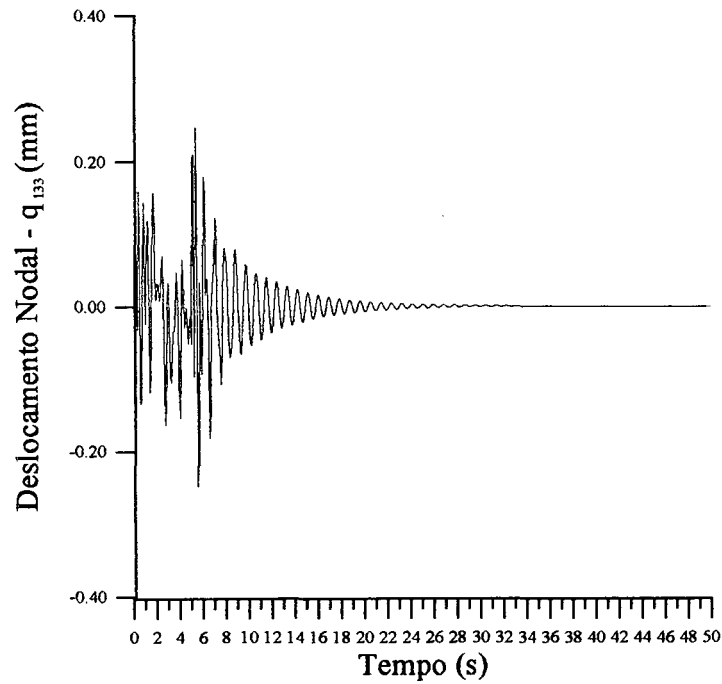


Fig. 6.102 - Deslocamento nodal q_{133} para $K_1 = K_3 = 30 \times 10^6$ e $K_2 = 300 \times 10^6$ N mm/rad.

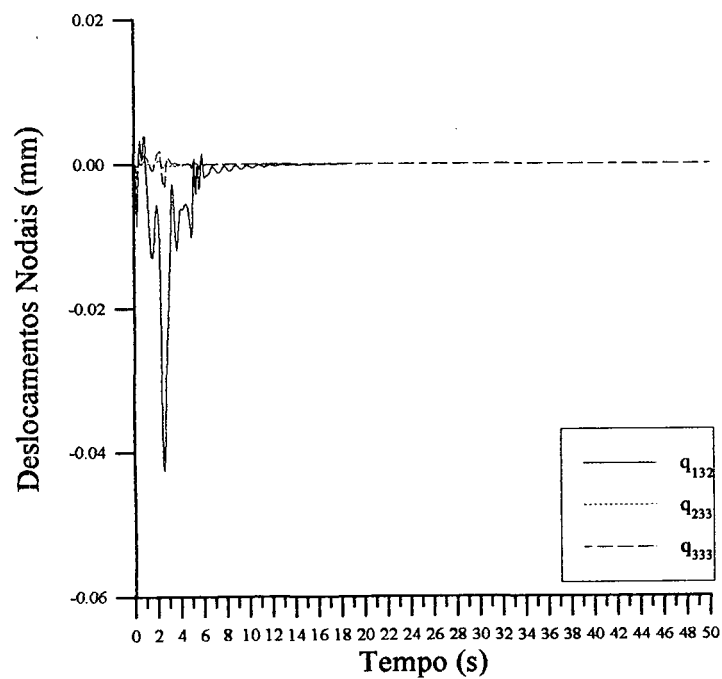


Fig. 6.103 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} , q_{333} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad

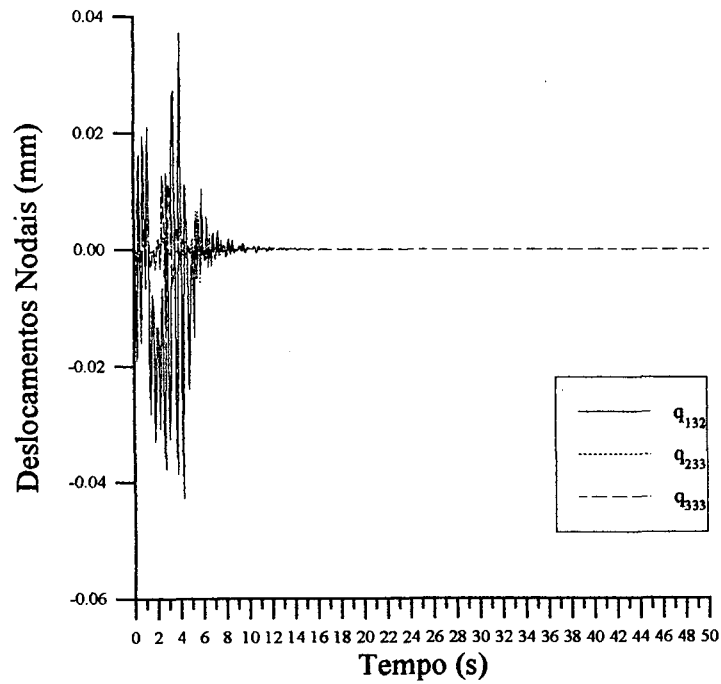


Fig. 6.104 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} , q_{333} para $K_1 = K_3 = 30 \times 10^6$ e $K_2 = 300 \times 10^6$ N mm/rad.

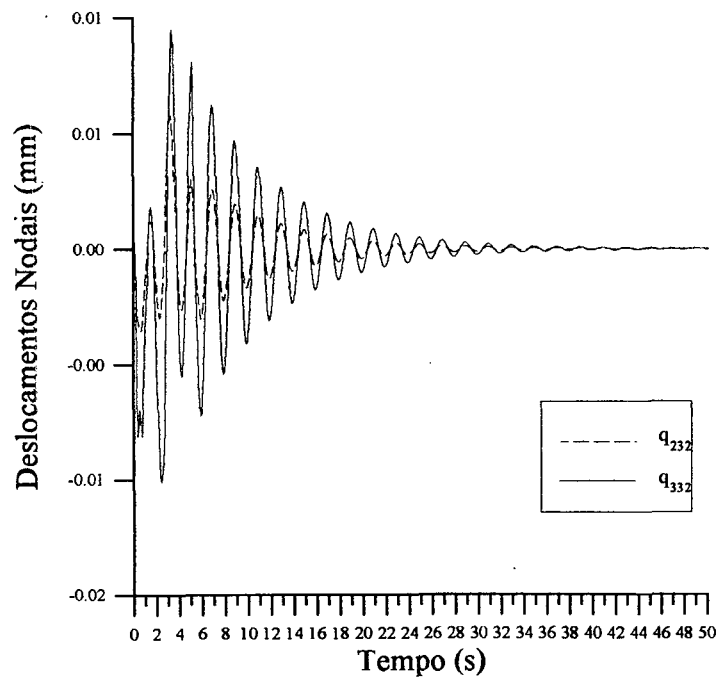


Fig. 6.105 - Deslocamentos nodais q_{232} , q_{332} para $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad.

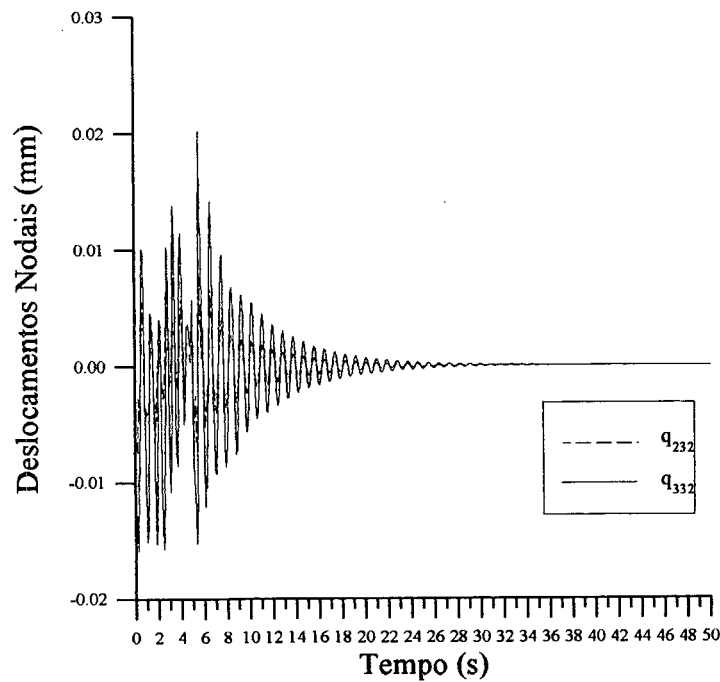


Fig. 6.106 - Deslocamentos nodais q_{232} , q_{332} para $K_1 = K_3 = 30 \times 10^6$ e $K_2 = 300 \times 10^6$ N mm/rad.

Outra trajetória simulada, consiste em conduzir o manipulador da posição $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0^0$, movendo-se apenas a coordenada ϕ_1 , para a posição $\phi_1 = 90^0$ e $\phi_2 = \phi_3 = 0^0$, num tempo de 5 segundos, considerando-se a configuração utilizada na simulação anterior com $K_1 = K_2 = K_3 = 30 \times 10^6$ N mm/rad.

As figuras 107 e 108, mostram os perfis de velocidade e aceleração para esta trajetória.

A figura 109, mostra o erro total de posição de extremidade da cadeia cinemática, calculado através da seguinte expressão: $E_T = \sqrt{(E_x)^2 + (E_y)^2 + (E_z)^2}$, onde pode-se observar que o maior valor de erro ocorre no final da trajetória, na fase de desaceleração, e o mesmo está associado ao deslocamento θ_1 , mostrado na figura 110. Também pode-se notar que mesmo a trajetória sendo no plano horizontal, ocorrem vibrações no plano

vertical, conforme mostrado nas figuras 111 e 114.

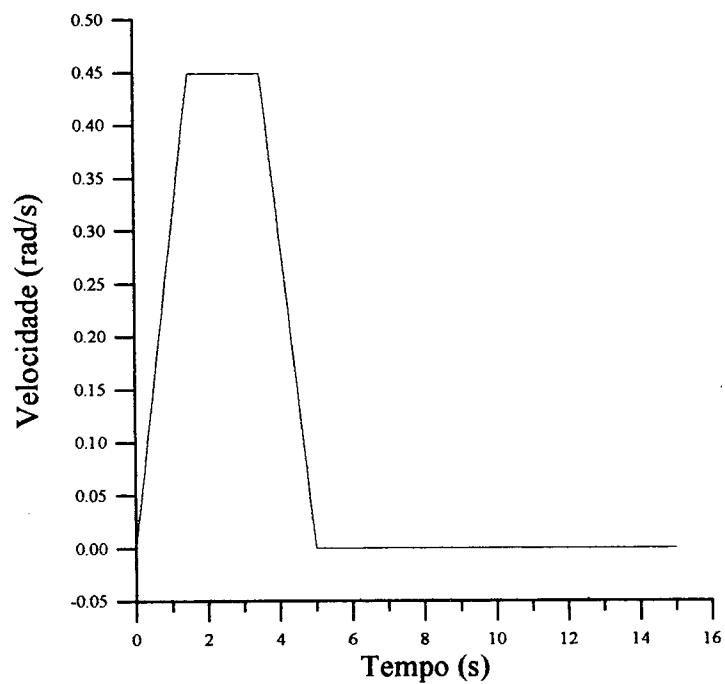


Fig. 6.107 - Perfil de velocidade da junta 1 ($\dot{\phi}_1$).

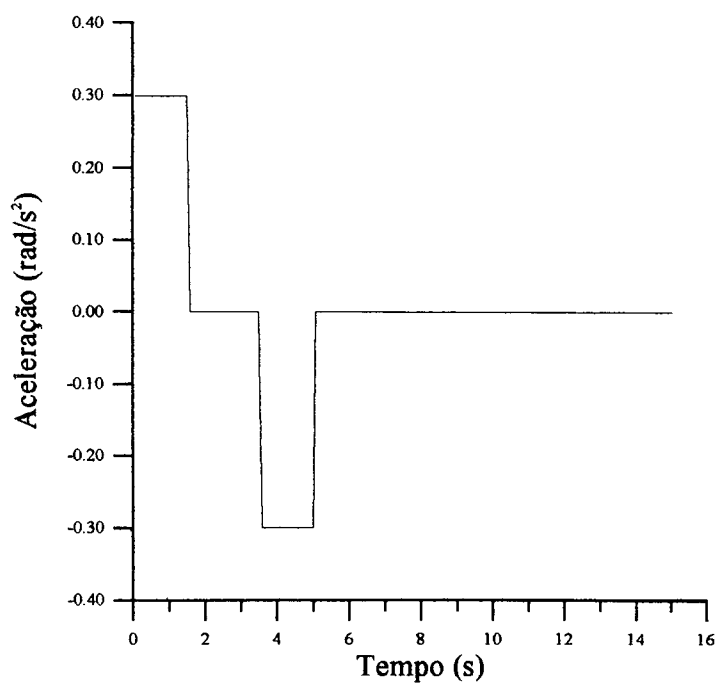


Fig. 6.108 - Perfil de aceleração da junta 1 ($\ddot{\phi}_1$).

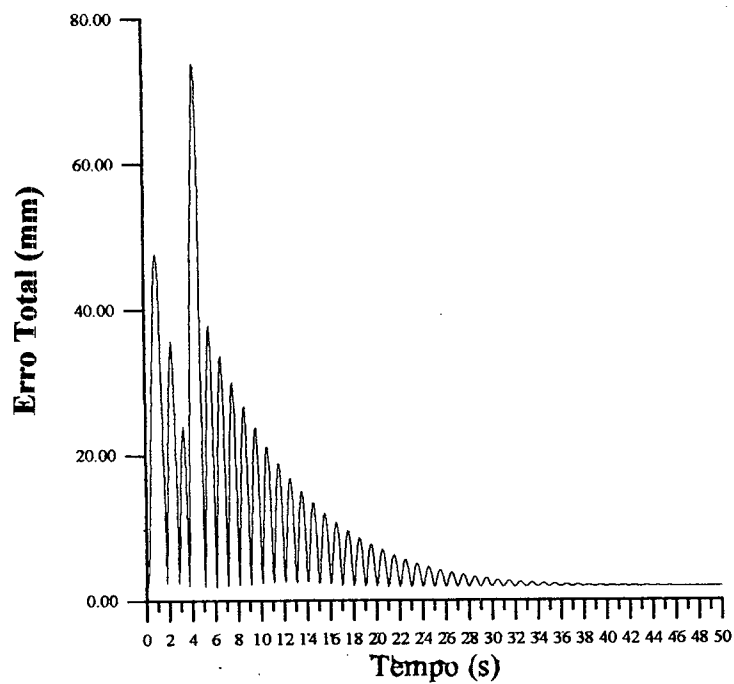


Fig. 6.109 - Erro total de posição.

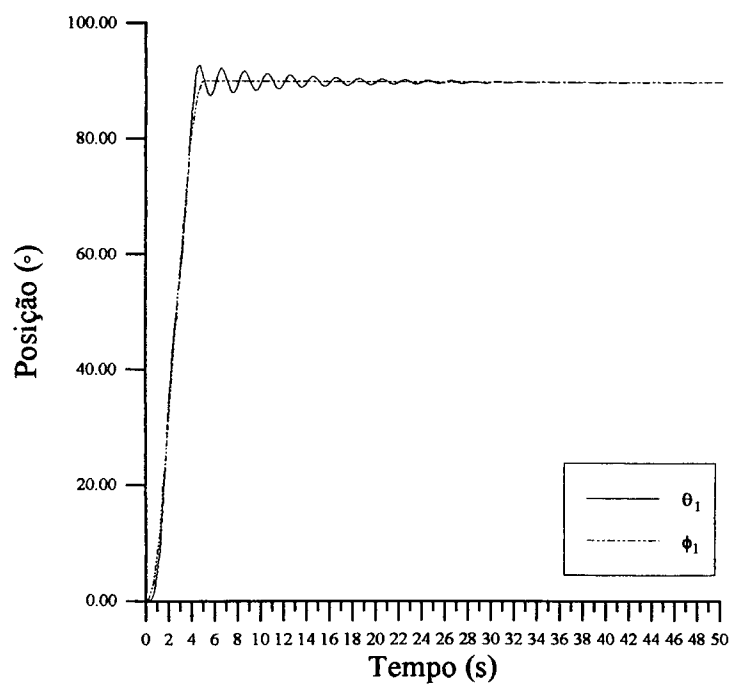


Fig. 6.110 - Deslocamento da coordenada θ_1 .

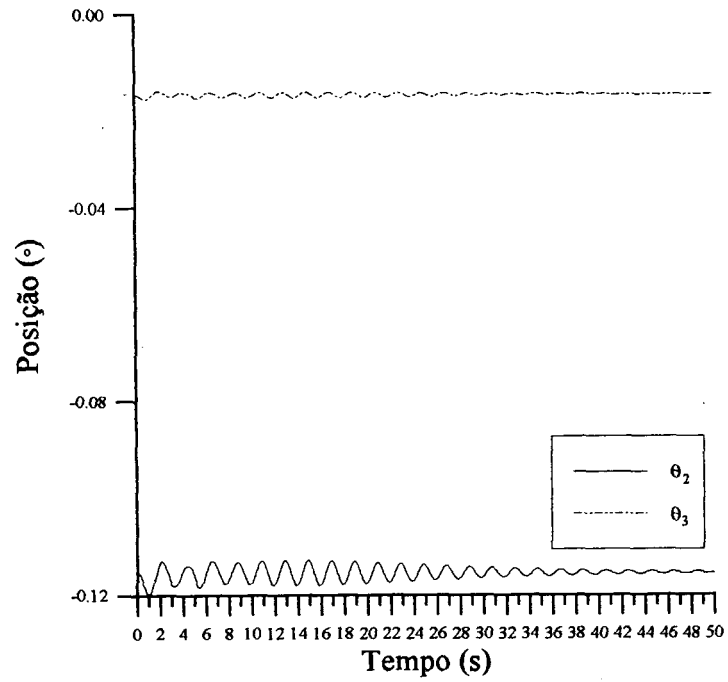


Fig. 6.111 - Deslocamento das coordenadas θ_2 e θ_3 .

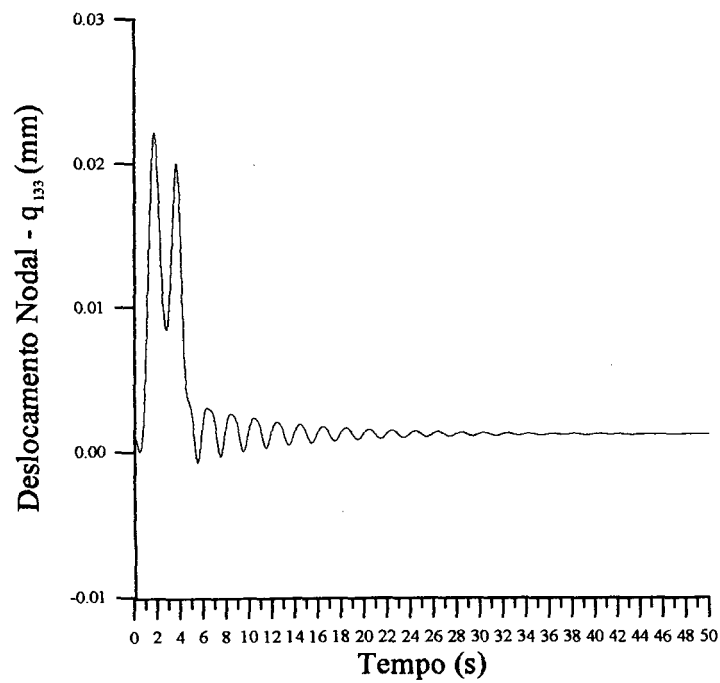


Fig. 6.112 - Deslocamento nodal q_{133} .

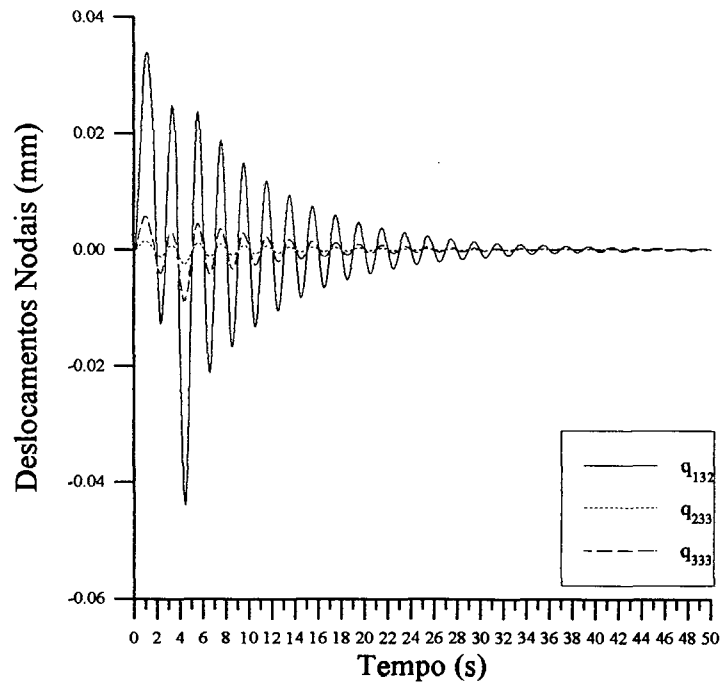


Fig. 6.113 - Deslocamentos nodais q_{132} , q_{233} e q_{333} .

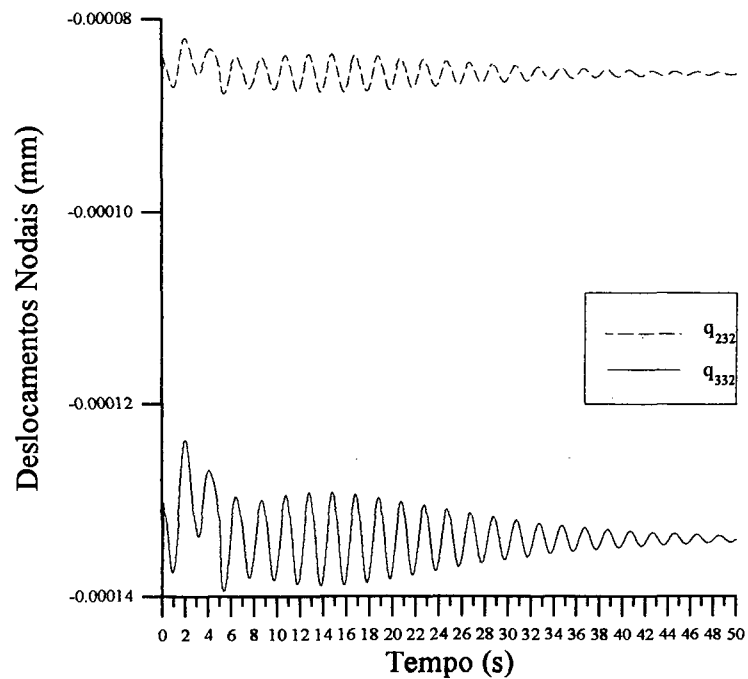


Fig. 6.114 - Deslocamentos nodais q_{232} e q_{332} .

6.5 - Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas simulações, onde o principal objetivo foi a obtenção de informações que permitem que o desempenho estrutural da cadeia cinemática seja observado sob vários aspectos.

Conforme já mencionado, procurou-se mostrar principalmente, a influência das flexibilidades das ligações e juntas sobre o desempenho da cadeia.

Desta forma torna-se possível, a nível de projeto preliminar, a identificação dos pontos mais críticos da estrutura, ou seja, aqueles que mais contribuem para a deterioração do desempenho desta.

Neste sentido, já na análise estática pode-se fazer uma primeira avaliação sobre a adequacidade dos membros estruturais. Onde a variação dos erros para as várias situações, apontou como sendo a flexibilidade das juntas, a maior responsável pela deterioração da resposta estática do sistema.

Outra informação importante, refere-se aos autovalores e autovetores. Estes foram obtidos para diferentes posições e flexibilidades dos componentes, onde pode-se perceber a significativa influência da flexibilidade das juntas sobre o comportamento das frequências naturais e modos de vibração do sistema. Também importante, foi a separação entre os valores da 3ª e 4ª frequências naturais, a qual é tanto maior quanto maior for a rigidez e a massa das ligações, e menor a rigidez das juntas. Além disto, estes resultados influenciam diretamente na definição da frequência de operação do controlador.

Os autovetores, embora fornecendo apenas a forma de

vibrar da estrutura, permitem que sejam identificados os componentes que mais se deformam nestas vibrações.

Finalmente, na análise transiente, pode-se observar o comportamento dinâmico de estrutura, em termos dos deslocamentos das coordenadas generalizadas no tempo, para diferentes flexibilidades dos componentes, trajetórias e tempo destas. Os resultados obtidos identificaram novamente o parâmetro flexibilidade das juntas, como sendo o mais crítico com relação ao desempenho do sistema durante o movimento.

Convém resaltar aqui, que não somente os erros de posição da extremidade da cadeia podem ser obtidos, e tomados como medida de desempenho. Os erros de orientação de extremidade, podem também ser utilizados, e perfeitamente obtidos tanto na análise estática, quanto na transiente.

Em consequência do acima exposto, pode-se dizer que o procedimento proposto constitui-se de uma ferramenta extremamente valiosa para a fase de projeto preliminar de manipuladores articulados, na qual os aspectos críticos do projeto devem ser verificados a fim de validar a concepção e fornecer informações essenciais para as fases posteriores.

Isto é decorrência direta da modelagem utilizada, que apresenta uma representatividade e versatilidade bastante adequada, em termos da inclusão dos principais efeitos envolvidos, gerando resultados que permitem a análise da influência de parâmetros de geometria, de posição, de trajetória, de carregamentos estáticos e dinâmicos e de rigidez dos membros estruturais (ligações e juntas), sobre o desempenho do manipulador na execução de suas tarefas.

Desta forma, as informações geradas nas simulações, são

de extrema importância não somente para o projeto da estrutura mecânica, mas também para o projeto do sistema de controle a ser utilizado.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Conforme visto ao longo do trabalho, a busca por sistemas robóticos com características de desempenho cada vez melhores, tem se refletido atualmente, no desenvolvimento de novas e melhores técnicas de simulação para o projeto destes sistemas.

A sistemática apresentada no presente trabalho, representa uma contribuição para a área de modelagem e simulação de robôs, constituindo-se de uma ferramenta extremamente valiosa para a fase de projeto preliminar de manipuladores articulados, possibilitando que a concepção do sistema seja avaliada, quanto ao seu desempenho, e a obtenção de outras informações importantes para as demais fases do projeto.

A modelagem empregada possui como ponto forte a consideração da flexibilidade nas juntas decorrentes da elasticidade do sistema de transmissão, através de molas torcionais lineares, e da flexibilidade das ligações, através do método de elementos finitos, onde são considerados os efeitos de deflexão, deformação axial, cisalhamento, inércia rotatória e torção, permitido assim a modelagem adequada de ligações curtas e longas.

Estas considerações aliadas a uma descrição cinemática adequada e ao formalismo Lagrangiano, geram um modelo extremamente representativo, formado por um conjunto de equações

de movimento, não lineares e acopladas, expressas em termos de coordenadas generalizadas que representam os grandes deslocamentos das ligações em torno dos eixos das juntas, devidos ao movimento de corpo rígido das ligações e à elasticidade nas juntas, e também das coordenadas que representam os pequenos deslocamentos decorrentes das deformações das ligações.

Este modelo, além de sua implementação computacional ser de razoável facilidade, permite ao projetista uma fácil e rápida manipulação dos dados referentes às características de geometria, material e forças, associadas às partes que configuram o sistema.

Na etapa de simulação foram utilizados procedimentos numéricos adequados, para a obtenção das propriedades que descrevem o comportamento do sistema, permitindo que sejam feitas as análises estática, de autovalores e autovetores e transiente.

Na análise estática, devido ao fato de o vetor carga ser definido em função das coordenadas generalizadas, e estas serem também as incógnitas a determinar, foi desenvolvido um procedimento numérico de fácil implementação e rápida convergência.

Nesta análise pode-se verificar os erros de posição da extremidade da cadeia cinemática e o deslocamento das ligações devido à flexibilidade nas juntas, para várias posições dentro do espaço de trabalho, variando-se os parâmetros flexibilidade nas juntas, flexibilidade das ligações e carregamentos externos.

Desta forma torna-se possível uma identificação dos pontos mais críticos da estrutura, ou seja, aqueles que mais contribuem para a deterioração do desempenho desta, e uma primeira avaliação sobre a adequabilidade dos membros estruturais.

Os resultados obtidos nestas simulações, apontaram como sendo a flexibilidade das juntas, a maior responsável pela deterioração da resposta estática do sistema.

Na análise dos autovalores e autovetores, a determinação das frequências naturais e dos modos de vibração, tem por principal objetivo permitir que seja definida a frequência do controlador e verificadas as excitações externas, de modo a obter-se um comportamento estável por parte do sistema.

Para a resolução do problema utilizou-se o método da Iteração Subespacial, onde pode-se obter a resposta do sistema em várias posições da cadeia cinemática e para diferentes valores dos parâmetros flexibilidade das ligações e juntas.

Os resultados obtidos mostraram que a flexibilidade nas juntas além de reduzir os valores das frequências naturais afeta a variação destes, para as várias posições da cadeia cinemática dentro do seu espaço de trabalho. A comparação entre os modos de vibração da estrutura, obtidos para uma configuração do sistema com e sem a flexibilidades nas juntas, mostra que a consideração deste parâmetro faz aparecerem movimentos de oscilação das ligações em torno do eixo das juntas, enquanto que os deslocamentos nodais ficam diminuídos.

Outro resultado importante obtido, foi a grande separação entre os valores da 3^a e 4^a frequências naturais, verificada para a situação onde tem-se uma elevada rigidez das ligações e uma baixa rigidez nas juntas, o que em termos de projeto destes sistemas, proporciona uma faixa de frequências dentro da qual pode ser definida a frequência do controlador, sem risco de comportamento instável do sistema.

Na análise transiente, o objetivo principal é a

verificação do comportamento dinâmico da estrutura, quando a mesma é movimentada dentro do seu espaço de trabalho, através da obtenção dos deslocamentos sofridos pelas coordenadas generalizadas no tempo, para diferentes valores de flexibilidade dos componentes, trajetórias e tempo destas.

Para a solução numérica deste problema foi implementado um método implícito, no caso o método de Newmark $\beta = 1/4$, e simulados movimentos com controle em malha aberta. Os resultados obtidos identificaram novamente o parâmetro flexibilidades nas juntas, como sendo o mais crítico com relação ao desempenho do sistema durante o movimento.

Desta forma, a sistemática desenvolvida possibilita que sejam efetuadas diferentes simulações, as quais fornecem informações sobre o desempenho do manipulador considerado. As informações obtidas permitem não somente uma avaliação global do sistema, mas também uma análise da adequacidade dos vários componentes que formam o sistema.

Por ser a robótica, uma área essencialmente multidisciplinar, e por tratar-se de uma modelagem bastante representativa, o trabalho desenvolvido aqui poderá ser utilizado em várias sub-áreas da robótica.

Finalmente, são sugeridos alguns tópicos relacionados a futuros trabalhos, que podem ser apoiados pela formulação apresentada:

- desenvolvimento de sistemáticas para a calibração relacionadas com o problema da cinemática direta e inversa, considerando às flexibilidades da estrutura;
- determinação dos torques nas juntas e da capacidade de carga levando em consideração a flexibilidade dos componentes;

- inclusão dos efeitos das velocidades sobre os autovalores e autovetores, através da inclusão dos efeitos giroscópicos quando da solução do autoproblema;
- planejamento de trajetórias, levando em consideração as flexibilidades estruturais e os efeitos dinâmicos correspondentes;
- desenvolvimento de sistemáticas que permitam a redução do número de coordenadas generalizadas utilizadas, visando a solução mais rápida das equações obtidas;
- desenvolvimento e implementação de algoritmos para o controle.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] GROOVER, M. P.; NAGEL, R. N.; ODREY, N. G.. Industrial Robotics-Tecnology, Programing and Aplications. New York McGraw-Hill, 1986.
- [2] SADAMOTO, K.. "R & D On Intellgent Robots Being Suported". The Japan Robot Newss. Vol 1, N^o 4, pp. 1-6.
- [3] FUKUCHI, F. & AWANE, M.. "Recent Trends and the Future of Hitachi Robots". Hitachi Review. Vol 34, pp. 1-6.
- [4] ALBUS, J. S.. "Industrial Robot Tecnology and Productivity Improvement". U. S. Congress, Office of Tecnology cn Assesment. Washigton, DC:1985, pp. 62-89.
- [5] RIVIN, E. E.. Mechanical Design of Robots. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [6] SUNG, C. K. & THOMPSON, B. S.. "A Metodology for Syntesizing High-Performance Robots Fabricated With Optimally Tailored Composite Laminates". Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. Vol 109, 1987, pp. 74-86.
- [7] VUKOBRATOVIC, M. & POTKONJAK, V.. "Contribution of the Forming of Computer Methods for Automatic Modelling of Spatial Mechanisms Motions". Mechanisms and Machine Theory. Vol 14, 1979, pp. 179-178.

- [8] GUPTA, S. & TOWNSEND, M.A.. "On the Equations of Motion for Robot Arms and Open Kinematic Chains". Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. Vol 110, 1988, pp. 287-294.
- [9] PAUL, R.. Modelling, Trajectory Calculation and Servoing of a Computer Controlled Arm. Stanford Artificial Intelligence Lab. A. I. Memo. 177, Sept. 1972.
- [10] BEJCZY, A.K.. Robot Arm Dynamics and Control. Jet Propulsion Labs. Tech. Memo., Feb. 1974, pp. 33-669.
- [11] ARMSTRONG, W. W.. "Recursive Solution to the Equations of Motion of a n-link Manipulator". Proc. 5th World Congress, Theory of Machines, Mechanisms. Vol 2, July 1979, pp. 1343-1346.
- [12] KANE, T. R.. "On Derivation of Equation of Motion". J. Soc. for Ind. and Appl. Math. Vol 13, 1965, pp. 487-492.
- [13] EVERETT, L. J.. "An Alternative Algebra For Deriving Equations of Motion of Flexible Manipulators". Journal of Robotic Systems. Vol 55, N 6, 1988, pp. 553-566.
- [14] WITTENBURG, J.. Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart series LAMM, Vol 33, 1977.
- [15] POPOV, E. P.; VERESCHAGIN, A. F.; ZENKEVICH, S. A.. Manipulation Robots: Dynamics and Algorithms. Nauka, Moscow, 1978.

- [16] LILOV, L. & LOREN, M.. Dynamic Analysis of Multirigid-Body Systems Based on the Gauss Principle. ZAMMG 2, 1982.
- [17] BENATI, M. & MORRO, A.. "Dynamics of Chain of Flexible Links". Journal of Dynamic Systems, Measurement, and and Control. Dec 1988, Vol 110, pp. 410-415.
- [18] BOOK, W. J.; MAIZZA-NETO, O.; WHITNEY, D. E.. "Feedback Control of Two Beam, Two Joint Systems With Distributed Flexibility". Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Dec 1975, pp. 424-431.
- [19] CHALHOUB, N. G. & ULSOY, A. G.. "Dynamic Simulation of a Leadscrew Driven Flexible Robot Arm and Controller". Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Jun 1986, Vol 108. pp. 119-126.
- [20] YOUNG, D.. "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Methods". Journal of Applied Mechanics. Dec 1950, Vol 72, pp. 448-453.
- [21] NICOSIA, S.; TOMEI, P.; TORNAMBÈ, A.. "Hamiltonian Description and Dynamic Control of Flexible Robots". Journal of Robotic Systems. Vol 6, N 4, 1989, pp. 345-361.
- [22] GOLDSTEIN. H.. Classical Mechanics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1966.
- [23] KANO, H.; TZAFESTAS, S.; LEE, H. G.; KALAT, J.. "Modelling

and Control of Flexible Robot Arms". Proceedings of 25th Conference on Decision and Control. Athens, Greece, Dec 1986, pp. 1866-1870.

- [24] PAUL, R. P.. Robot Manipulators: Mathematics, Programing and Control. MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
- [25] JUDD, R. P. & FALKENBURG, D. R.. "Dynamics of Nonrigid Articulated Robot Linkages". IEEE Transactions on Automatic Control. Vol AC 30, N 5, May 1985, pp. 499-502.
- [26] BOOK, W. J.. "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms". The International Journal of Robotics Research. Vol 3, 1984, pp. 87-101.
- [27] DENAVIT, J. & HARTENBERG, R. S.. "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrizes". Journal of Applied Mechanics. Vol 22, June 1955, pp. 215-221.
- [28] HOLLERBACH, J. M.. "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity". IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics. Vol SMC 10, N 10, 1980, pp. 730-736.
- [29] WALKER, M. N. & ORIN, D. E.. "Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms". Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol 110, N 3, 1982. pp. 205-211.

- [30] YUAN, B. S.; BOOK, W. J.; HUGGINS, J. D.. "Control of a Multy-Link Flexible Manipulator with a Decentralized Approach". Proceedings XIV IFAC. USSR, 1990, pp. 225-261.
- [31] ANDEEN, G. B.. Robot Design Handbook. McGraw-Hill, 1988.
- [32] HASTINGS, G. G. & BOOK, W. J.. "A Linear Dynamic Model for Flexible Manipulators", IEEE Control Systems Magazine. Vol 7, Feb 1987, pp. 61-66.
- [33] VECCHIO, L.; NICOSIA, S.; NICOLO, F.; LENTINI, D.. "Automatic Generation of Dynamic Models of Manipulators". Proceedings of 10th International Symposium on Industrial Robots. Milan, Italy, Mar 1980, pp. 5-7.
- [34] RAND, R. H.. Computer Algebra in applied Mathematics: An Introduction to MACSYMA. Pitman Advanced Publications, 1983.
- [35] CHANG, L.-W. & GANNON, K. P.. "A Dynamic Model on a Single-Link Flexible Manipulator". Journal of Vibrations and Acoustics. Vol 112, Jan 1990, pp. 138-143.
- [36] USORO, P. B.; NADIRA, R.; MAHIL, S. S.. "A Finite Element/Lagrange Approach to Modelling Lightweight Flexible Manipulators". Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol 108, Sept 1986, pp. 198-205.
- [37] POTA, H. R.. "Finite-Element/Lagrange Modelling and Control

- of a Flexible Robot Arm". Proceedings XIV IFAC. USSR, 1990, pp. 239-243.
- [38] PRZEMIENIECKI, J. S.. Theory of Matrix Structural Analysis. Dover Publications, Inc., New York, 1985, 467 pp.
- [39] SHABANA, A. A. & WEHAGE, R. A.. "A Variable Degree-of-Freedom Component Mode Analysis of Inertia Variant Flexible Mechanical Systems". Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Vol 105, N 3, Sept 1983, pp. 371-378.
- [40] SHABANA, A. A.. "Automated Analysis of Constrained Systems of Rigid and Flexible Bodies". Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design. Vol 107, Oct 1985, pp. 431-439.
- [41] KHULIEF, Y. A. & SHABANA, A. A.. "Dynamic Analysis of Constrained Systems of Rigid and Flexible Bodies With Intermittent Motion". Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Vol 108, Mar 1986, pp. 38-45.
- [42] KHULIEF, Y. A. & SHABANA, A. A.. "Dynamics of Multibody Systems With Variable Kinematic Structure". Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Vol 108, June 1986, pp. 167-175.
- [43] SHABANA, A. A.. "Dynamics of Inertia-Variant Flexible Systems Using Experimentally Identified Parameters".

Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Vol 108, Sept 1986, pp. 358-366.

- [44] BAKS, E. M. & SHABANA, A. A.. "Timoshenko Beams and Flexible Multibody System Dynamics". Journal of Sound and d a Vibrations. Vol 116, N 1, 1987, pp. 89-107.
- [45] SUNADA, W. D. & DUBOWSKY, S.. "The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Flexible Spatial and Co - Planar Linkage Systems". Journal of Mechanical Design. Vol 103, July 1981, pp. 643-651.
- [46] SUNADA, W. D. & DUBOWSKY, S.. "On the Dynamic Analysis and Behavior of Industrial Robotic Manipulators With Elastic Members". Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Vol 105, March 1983, pp. 42-51.
- [47] DE SMET, M.; LIEFOGHE, C.; SAS, P.; SNOEYYS, R.. "Dynamic Analysis of Flexible Structures Using Component Mode Synthesis". Journal of Applied Mechanics. Vol 56, Dec 1989, pp. 874-880.
- [48] HURTY, W. C.. "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes". AIAA Journal. Vol 3, N 4, April 1965, pp. 678-685.
- [49] WINFREY, R. C.. "Dynamic Analysis of Elastic Link Mechanisms by Reduction of Coordinates". Journal of Engineering for Industry. May 1972, pp. 577-582.

- [50] HINTZ, R. M.. "Analytical Methods in Component Modal Synthesis". AIAA Journal. Vol 13, N 8, August 1985, pp. 1007-1016.
- [51] FRAMATOME, S. A.. SYSTUS - Finite Element System: TITUS - User's Manual, Vol I,II Versão 2299. Saint-Marcel, France, 1987.
- [52] CRAIG, R. R. Jr. & BAMPTON, M. C. C.. "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis". AIAA Journal. Vol 6, July 1968, pp. 1313-1319.
- [53] MEIROVITCH, L.. Methods of Analytical Dynamics. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [54] BAYO, E. & SERNA, M. A.. "Penalty Formulations for the Dynamic Analysis of Elastic Mechanisms". Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Vol 111, Sept 1989, pp. 321-327.
- [55] SERNA, M. A. & BAYO, E.. "A Simple and Efficient Computational Approach for the Forward Dynamics of Elastic Robots". Journal of Robotic Systems. Vol 6, N 4, 1989, pp. 363-382.
- [56] BAYO, E.. "A Finite-Element Approach to Control the End-Point Motion of a Single-Link Flexible Robot". Journal of Robotic Systems. Vol 4, N 1, 1987, pp. 63-75.

- [57] SIMO, J. C. & VU-QUOC, L.. "On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions - The Plane Case: Part I" Journal of Applied Mechanics. Vol 53, Dec 1986, pp.849-854.
- [58] SIMO, J. C. & VU-QUOC, L.. "On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions - The Plane Case: Part II. Journal of Applied Mechanics. Vol 53, Dec 1986, pp. 855-863.
- [59] BATHE, K.-J.. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice - Hall, Inc, Englewood Cliffs. New Jersey 1982.
- [60] POPOV, E. P.; VERESCAGIN, A. F.; IVKIN, A. M.; MEDVELOV, V. S.. Proceedings VI IFAC Symp. on Automatic Control in Space. USSR, 1974.
- [61] POTKONJAK, V. & VUKOBRATOVIC, M.. "Two New Methods for Computer Forming of Dynamic Equations of Active Mechanisms" Mechanisms and Machine Theory. Vol 14, 1979, pp. 189-200.
- [62] VUKOBRATOVIC, M. & POTKONJAK, V.. Applied Dynamics and CAD of Manipulation Robots-Scientific Fundamentals of Robotics Vol 6. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [63] NAGANATHAN, G. & SONI, A. H.. "Modelling of Kinematic and Flexibility Effects in Manipulator Design", Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Vol 110, Sept 1988, pp. 243-254.

- [64] BATHE, K. J. & WILSON, E. L.. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, Inc, New York, 1984, 528 pp.
- [65] NELSON, H. D.. "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory", Journal of Mechanical Design. Vol 102, Oct 1980, pp. 793-803.
- [66] HUANG, Y. & LEE, C. S.G.. "Generalization of Newton-Euler Formulation of Dynamic Equations to Nonrigid Manipulators" Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol 110, Sept 1988, pp. 308-315.
- [67] HUSTON, R. L.. "Multy-Body Dynamics Including the Effects of Flexibility and Compliance" Computers & Structures. Vol 14, N 5-6, 1981, pp. 443-451.
- [68] AMIROUCHE, F. M. L. & HUSTON, R. L.. "Dynamics of Large Constrained Flexible Structures", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol 110, March 1988, pp. 78-83.
- [69] KARMMAN, J. W. & HUSTON, R. L.. "Constrained Multibody System Dynamics - An Automated Approach", Computers & Structures. Vol 18, N 6, 1984, pp. 999-1003.
- [70] AMIROUCHE, F. M. L.. "Flexibility Effects - Estimation of the Stiffness Matrix in the Dynamics of a Large Structure" Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in

Design. Vol 109, July 1987, pp.283-288.

- [71] IDER, S. K. & AMIROUCHE, F. M. L.. "On the Constraint Violations in the Dynamic Simulations of Multibody Systems", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol 111, June 1989, pp. 238-243.
- [72] LOW, K. H. & VIDYASAGAR, M.. "A Lagrangian Formulation of the Dynamic Model for Flexible Manipulator Systems", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol. 110, June 1988, pp. 175-181.
- [73] LOW, K. H.. "A Systematic Formulation of Dynamic Equations for Robot Manipulators with Elastic Links", Journal of Robotic Systems. Vol 4, N 3, 1987, pp. 435-456.
- [74] LOW, K. H.. "Solution Schemes for the System Equations of Flexible Robots", Journal of Robotic Systems. Vol 6, N 4, 1989, pp. 383-405.
- [75] EVERETT, L. J. & McDERMOTT JR, M.. "The Use of Vector Techniques in Variational Problems", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol 108, June 1986, pp. 141-145.
- [76] KING, J. O.; GOURISHANKAR, V. G.; RINK, R. E.. "Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulators Using Angular Velocities Instead of Transformations Matrices", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Vol SMC-17, N 11, 1987, pp.

1059-1068.

- [77] MEIROVITCH, L.. Computational Methods in Structural Dynamics. Sijthoff & Noordhof, Rockville, Maryland, 1980.
- [78] KOPLIK, J. & LEU, M.C.. "Computer Generation of Robot Dynamics Equations and the Related Issues", Journal of Robotic Systems. Vol 3, N 3, 1986, pp. 301-319.
- [79] ASADA, H. & SLOTINE, J.-J.. Robot Analysis and Control. John Wiley & Sons, 1986.
- [80] CRAIG, J. J.. Introduction to Robotics Mechanics & Control. Addison-Wesley Publishing Company, 1986.
- [81] BELYTSCHKO, T. & HUGHES, T.J.R.. Computational Methods for Transient Analysis. Volume 1 Computational Methods in Mechanics, Elsevier Science Publishers B. V., 1983.
- [82] TILLERSON, J.R.. "Selecting Solution Procedures for Nonlinear Structural Dynamics", Shock and Vibrations Digest, Vol 7, N 4, 1975, pp. 2-13.
- [83] BERT, C.W. & STRICKLIN, J.D.. "Comparative Evaluation of Six Different Numerical Integration Methods for Non-Linear Dynamic Systems", Journal of Sound and Vibration, Vol 127, N 2, 1988, pp.221-229.
- [84] KLEIBER, M.. Incremental Finite Element Modelling in Non-

Linear Solid Mechanics, John Wiley & Sons, 1989.

- [85] ERTHAL, J.L.; FORCELLINI, F.A.; BACK, N.. "Geração Automática das Notações de Denavit-Hartenberg e Vetorial para a Análise Cinemática de Robôs Industriais". Anais Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Natal, Brasil, Mar 1991, pp. 17-24.
- [86] FORCELLINI, F.A. & BACK, N.. "Uma Modelagem Dinâmica de Robôs Manipuladores Flexíveis - Parte I", Anais Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Natal, Brasil, Mar 1991, pp. 25-32.
- [87] FORCELLINI, F.A. & BACK, N.. "Uma Modelagem Dinâmica de Robôs Manipuladores Flexíveis - Parte II", Anais Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Natal, Brasil, Mar 1991, pp. 33-41.
- [88] FARIA, M.T.C.; FORCELLINI, F.A.; BACK, N.. "Modelagem Dinâmica de Manipuladores Robóticos Flexíveis Usando uma Formulação com Elementos Finitos", Anais Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Natal, Brasil, Mar 1991. pp. 50-57.
- [89] ERTHAL, J.L.; BACK, N.; FORCELLINI, F.A.. "Representação Gráfica de Robôs Industriais de Cadeia Aberta", Anais do Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, São Paulo, Brasil, Dez 1991. pp. 525-528.

- [90] SPONG, M.W.. "Modeling and Control of Elastic Joint Robots",
Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control.
Vol. 109, 1987, pp. 310-319.
- [91] HEWIT, J. R.. "An Approach to the Control of Robot Arms
With Flexible Transmissions Elements". Mechanism and
Machine Theory. Vol. 24, N 3, 1989, pp. 157-164.
- [92] BUFFINTON, K. W.. "Dynamics of Elastic Manipulators With
Prismatic Joints". Journal of Dynamic Systems,
Measurement, and Control. Vol. 114, 1992, pp. 41-49.
- [93] LIN, L.-C.; YUAN, K.. "Control of Flexible Joint Robots via
External Linearization Approach". Journal of Robotic
Systems. Vol. 7, 1990, pp. 1-22.
- [94] IFAC 1990, Benchmark Problems for Control System Design,
Problem 90-12, pp. 45-49.
- [95] BEJCZY, A. K.; TARN, T.J.; YUN, X.; han, S.. "Nonlinear
Feedback Control of Puma 560 Robot Arm by Computer".
Proceedings of 24th Conference on Decision and Control.
Dec 1985, pp. 1680-1688.

APENDICE A

Equações de Appel

Como as equações de Lagrange, as equações de Appel podem ser obtidas através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (caso dinâmico), em termos das coordenadas generalizadas.

de acordo com o princípio de D'Alembert, o estado de "equilíbrio dinâmico" de um sistema de N partículas pode ser representado por

$$F_i + R_i - m_i \ddot{r}_i = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (A.1)$$

ou

$$\sum_{i=1}^N (F_i + R_i - m_i \ddot{r}_i) = 0 \quad (A.2)$$

onde F_i é a resultante das forças ativas que atuam na partícula m_i , R_i representa a resultante das forças de vínculo e $m_i \ddot{r}_i$ representa a força de inércia.

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais na equação (A.2) e considerando que as forças de vínculo não realizam trabalho, tem-se:

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \delta r_i = 0 \quad (A.3)$$

O vetor r_i pode ser expresso em termos das coordenadas generalizadas

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (A.4)$$

$$\delta r = \frac{\partial r_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial r_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (\text{A.5})$$

substituindo (A.5) em (A.3), tem-se

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^N F_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \quad (\text{A.6})$$

ou

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (\text{A.7})$$

O lado esquerdo da equação (A.7) representa o trabalho virtual das forças externas, então pode-se escrever

$$\sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = Q_j \quad (\text{A.8})$$

onde Q_j é conhecida como a força generalizada associada com a coordenada q_j . Então a expressão (A.7) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (\text{A.9})$$

Através da equação (A.4) pode-se obter

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

$$\ddot{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} \quad (\text{A.11})$$

e

$$\frac{\partial \ddot{r}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (\text{A.12})$$

Então pode-se escrever as equações (A.9) da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (\text{A.13})$$

Introduzindo-se a função

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (\text{A.14})$$

chamada de função energia de aceleração de Gibb, tem-se que

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_j} \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.15})$$

substituindo (A.15) em (A.13) obtem-se

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (\text{A.16})$$

ou

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (\text{A.17})$$

desde que os deslocamentos virtuais δq_j são arbitrários, tem-se

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_j} = Q_j} \quad (\text{A.18})$$

que são as equações de Appel.

APENDICE B

MATRIZ MASSA $[m_{ij}^e]$

$$[m_{ij}^e] = \begin{bmatrix} m_{11}^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{17}^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_{22}^{ij} & 0 & 0 & 0 & m_{26}^{ij} & 0 & m_{28}^{ij} & 0 & 0 & 0 & m_{212}^{ij} \\ & & m_{33}^{ij} & 0 & m_{35}^{ij} & 0 & 0 & 0 & m_{39}^{ij} & 0 & m_{311}^{ij} & 0 \\ & & & m_{44}^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{410}^{ij} & 0 & 0 \\ & & & & m_{55}^{ij} & 0 & 0 & 0 & m_{59}^{ij} & 0 & m_{511}^{ij} & 0 \\ & & & & & m_{66}^{ij} & 0 & m_{68}^{ij} & 0 & 0 & 0 & m_{612}^{ij} \\ & & & & & & m_{77}^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & m_{88}^{ij} & 0 & 0 & 0 & m_{812}^{ij} \\ & & & & & & & & m_{99}^{ij} & 0 & m_{911}^{ij} & 0 \\ & & & & & & & & & m_{1010}^{ij} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & m_{1111}^{ij} & 0 \\ & & & & & & & & & & & m_{1212}^{ij} \end{bmatrix}$$

onde

$$m_{11}^{ij} = \frac{m_i \ell_i}{3} \quad (\text{B.1})$$

$$m_{17}^{ij} = \frac{m_i \ell_i}{6} \quad (\text{B.2})$$

$$m_{22}^{ij} = \frac{m_i \ell_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) + \frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_i (1+\phi)^2} \quad (\text{B.3})$$

$$m_{26}^{ij} = \frac{m_i \ell_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \phi \right) \quad (\text{B.4})$$

$$m_{28}^{ij} = \frac{m_i \ell_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) - \frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_i (1+\phi)^2} \quad (\text{B.5})$$

$$m_{212}^{ij} = \frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \phi \right) \quad (\text{B.6})$$

$$m_{33}^{ij} = m_{22}^{ij} \quad (\text{B.7})$$

$$m_{35}^{ij} = - \frac{m_i \ell_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) + \frac{I_d}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \phi \right) \quad (\text{B.8})$$

$$m_{39}^{ij} = - \frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_i (1+\phi)^2} \quad (\text{B.9})$$

$$m_{311}^{ij} = + \frac{m_i \ell_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) + \frac{I_d}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \phi \right) \quad (\text{B.10})$$

$$m_{44}^{ij} = \frac{1}{3} I_p \quad (\text{B.11})$$

$$m_{410}^{ij} = \frac{1}{6} \rho I_d \quad (\text{B.12})$$

$$m_{55}^{ij} = \frac{m_i \ell_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) + \frac{I_d \ell_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{56 + 70\phi + 140\phi^2}{420} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$m_{59}^{ij} = \frac{m_i \ell_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \phi \right) \quad (\text{B.14})$$

$$m_{511}^{ij} = \frac{m_i \ell_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{-14 - 70\phi + 70\phi^2}{420} \right) + \frac{I_d \ell_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{-3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$m_{66}^{ij} = m_{55}^{ij} \quad (\text{B.16})$$

$$m_{68}^{ij} = - \frac{m_i \ell_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{-13 - 31,5\phi - 17,5\phi^2}{420} \right) - \frac{I_d}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \phi \right) \quad (\text{B.17})$$

$$m_{612}^{ij} = - \frac{m_i \ell_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) + \frac{I_d \ell_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{-14 - 70\phi - 70\phi^2}{420} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$m_{77}^{ij} = \frac{1}{3} m_i \ell_i \quad (\text{B.19})$$

$$m_{88}^{ij} = \frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_i (1+\phi)^2} \quad (\text{B.20})$$

$$m_{812}^{ij} = - \frac{m_i \ell_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \phi \right) \quad (\text{B.21})$$

$$m_{99}^{ij} = \frac{m_i \ell_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) + \frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_i (1+\phi)^2} \quad (\text{B.22})$$

$$m_{911}^{ij} = \frac{m_i \ell_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \phi \right) \quad (\text{B.23})$$

$$m_{1010}^{ij} = m_{44}^{ij} \quad (\text{B.24})$$

$$m_{1111}^{ij} = \frac{m_i \ell_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) + \frac{I_d \ell_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{56 + 70\phi + 140\phi^2}{420} \right) \quad (\text{B.25})$$

$$m_{1212}^{ij} = m_{1111}^{ij} \quad (\text{B.26})$$

onde I_p e I_d são respectivamente, o momento polar e diametral de inércia de massa por unidade de comprimento.

$$\begin{aligned}
& + q_{6j-2}^1 \left[\frac{\rho(I_y + I_z)}{3} \right] q_{6j-2}^1 + 2q_{6j-2}^1 \left[\rho \left(\frac{1}{3} I_y + \frac{1}{6} I_z \right) \right] q_{6j+4}^1 + \\
& + q_{6j-1}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1}^1 - 2q_{6j-1}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+3}^1 - 2q_{6j-1}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5}^1 + \\
& + q_{6j}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j}^1 + 2q_{6j}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+2}^1 - 2q_{6j}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6}^1 + \\
& + q_{6j+2}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+2}^1 - 2q_{6j+2}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6}^1 + q_{6j+3}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+3}^1 + \\
& + 2q_{6j+3}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5}^1 + q_{6j+4}^1 \left[\frac{\rho(I_y + I_z)}{3} \right] q_{6j+4}^1 + \\
& + q_{6j+5}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5}^1 + q_{6j+6}^1 \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6}^1 \tag{B.27}
\end{aligned}$$

$$M_{12}^{1j} = 0 \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
M_{13}^{1j} = & - \left[\frac{m_1 \ell_1}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-3}^1 + \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1}^1 - \left[\frac{m_1 \ell_1}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+3}^1 - \\
& - \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5}^1 \tag{B.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{14}^{1j} = & \left[\frac{m_1 \ell_1}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-4} + \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} \\
& - \left[\frac{m_1 \ell_1}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+3} - \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5}
\end{aligned} \quad (B.30)$$

$$M_{15}^{1j} = 0 \quad (B.31)$$

$$\begin{aligned}
M_{16}^{1j} = & - \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+4} - \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} \\
& - \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+2} + \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6}
\end{aligned} \quad (B.32)$$

$$\begin{aligned}
M_{17}^{1j} = & - \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-3} + \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} \\
& - \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+3} + \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6}
\end{aligned} \quad (B.33)$$

$$M_{18}^{1j} = 0 \quad (B.34)$$

$$\begin{aligned}
M_{19}^{1j} = & - \left[\frac{m_1 \ell_1}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-3} + \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} \\
& - \left[\frac{m_1 \ell_1}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+3} - \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6}
\end{aligned}$$

$$- \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5} \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned} M_{110}^{1j} = & \left[\frac{m_1 \ell_1}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-4} + \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi}{420} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} - \left[\frac{m_1 \ell_1}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+2} + \\ & - \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6} \quad (\text{B.36}) \end{aligned}$$

$$M_{111}^{1j} = 0 \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} M_{112}^{1j} = & + \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-4} + \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi}{420} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} + \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+2} - \\ & - \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6} \quad (\text{B.38}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{113}^{1j} = & + \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-3} - \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi}{420} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} + \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+3} + \\ & + \left[\frac{m_1 \ell_1^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5} \quad (\text{B.39}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{10\phi^2}{30} q_{6j-1} q_{6j-1} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j-1} + \\
& + 2 \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j-1} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} \right) + \\
& + \frac{10\phi^2}{30} q_{6j} q_{6j} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+2} + \\
& + 2 \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+6} + \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{3} \right) q_{6j+1} q_{6j+1} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_2 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_2 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+3} q_{6j+3} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j+5} + \\
& + \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi+10\phi^2)}{30} \right) q_{6j+5} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} \right) + \\
& + \frac{10\phi^2}{30} q_{6j+6} q_{6j+6} \cos^2 \theta'_2 + \left\{ \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(156+294\phi+140\phi^2)}{420} \right\} q_{6j-4} q_{6j-4} + \\
& + 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22+38,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j} + 2 \left[\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(54+126\phi}{420} + \right. \\
& + \left. \frac{70\phi^2}{420} \right] q_{6j-4} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13+31,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{\rho I_z}{3} \frac{I_z}{\ell_2} \right) q_{6j-2} q_{6j-2} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{6} \frac{I_z}{\ell_2} \right) q_{6j-2} q_{6j+4} + \left[\frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+7\phi)}{420} + \right. \\
& + \left. \frac{3,5\phi^2}{420} \right] q_{6j} q_{6j} + 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13+31,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j} q_{6j+2} - \\
& - 2 \left[\frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \frac{(3+7\phi+3,5\phi^2)}{420} \right] q_{6j} q_{6j+6} + \left[\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(156+294\phi)}{420} + \right. \\
& + \left. \frac{140\phi^2}{420} \right] q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22+38,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left(\frac{\rho}{3} I_z \ell_2 \right) q_{6j+4} q_{6j+4} + \left[\frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6} q_{6j+6} \right\} \text{sen}^2 \theta'_2 \\
& + \left\{ \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j-3} - 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi)}{420} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j-1} + 2 \left[\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-3} q_{6j+3} + \\
& + 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j+5} + \left(\frac{\rho}{3} I_z \ell_2 \right) q_{6j-2} q_{6j-2} + \\
& + 2 \left(\frac{\rho}{6} I_z \ell_2 \right) q_{6j-2} q_{6j+4} + \left[\frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} q_{6j-1} - \\
& - 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-1} q_{6j+3} - 2 \left[\frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi}{420} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} q_{6j+5} + \left[\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+3} q_{6j+3} + \\
& + 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+3} q_{6j+5} + \left(\frac{\rho}{3} I_z \ell_2 \right) q_{6j+4} q_{6j+4} + \\
& + \left. \left[\frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5} q_{6j+5} \right\} + 2(L_{y1} + q_{6n_2+2}) m_2 \ell_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3} \right. \\
& - \left. \frac{\ell_2}{12} q_{6j-1} + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \frac{\ell_2}{12} q_{6j+5} \right) + 2(j-1) q_{6n_1+3} m_2 \ell_2^2 \cos \theta'_2 + \\
& + q_{6n_1+3} m_2 \ell_2 (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \cos \theta'_2 - 2 q_{6n_1+3} m_2 \ell_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4} + \right. \\
& + \left. \frac{\ell_2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell_2}{12} q_{6j+6} \right) - 2(j-1) m_2 \ell_2^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4} + \right. \\
& + \left. \frac{\ell_2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell_2}{12} q_{6j+6} \right) \text{sen} \theta'_2 \cos \theta'_2 - \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j-4} + 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j} + 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \phi \left. \right\} q_{6j-5} q_{6j+2} - 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+6} - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-4} q_{6j-2} \\
& + 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-4} q_{6j+1} - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-4} q_{6j+4} + 2 \frac{\rho I_z \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2} q_{6j} + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-2} q_{6j+2} + 2 \frac{\rho I_z \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-2} q_{6j+6} \\
& + 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j} + 2 \frac{\rho I_z \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j} q_{6j+4} + \\
& + 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j+2} - 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j+6} + \\
& + \left. \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-4} q_{6j+2} + 2 \frac{\rho I_z \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j} q_{6j+4} \right\} \quad (\text{B.40})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{12}^{2j} = & (q_{6n_1+2} + L_{y1})(j-1)m_2 \ell_2^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{2} (q_{6n_1+2} + L_{y1})m_2 \ell_2 (q_{6j-5} + \\
& + q_{6j+1}) \text{sen}\theta'_2 - (q_{6n_1+2} + L_{y1})m_2 \ell_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{\ell_2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \right. \\
& - \left. \frac{\ell_2}{12} q_{6j+6} \right) \text{cos}\theta'_2 - (j-1)m_2 \ell_2^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3} - \frac{\ell_2}{12} q_{6j-1} + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \right. \\
& + \left. \frac{\ell_2}{12} q_{6j+5} \right) \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j-3} - 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j-1} + 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+3} + 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+5} - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-3} q_{6j-2} + 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-3} q_{6j+1} \right. \\
& - \left. \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-3} q_{6j+4} - 2 \frac{\rho I_z \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2} q_{6j-1} + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j+3} q_{6j-} \right. \\
& + \left. 2 \frac{\rho I_z \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-2} q_{6j+5} - 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+5} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\rho I_z \ell^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-1} q_{6j+4} + 2 \frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j+3} + \\
& + 2 \frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j+5} + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j+3} q_{6j+4} - 2 \frac{\rho I_z \ell^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{12} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+4} q_{6j+5} \left. \right\} \text{sen} \theta'_2 - \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j-3} - \right. \\
& - 2 \left(\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j-1} + 2 \left[\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi}{420} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-4} q_{6j+3} - 2 \left(\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j+5} + \\
& + 2 \left(\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j} + 2 \left[\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi}{420} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-3} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j+6} - \\
& - 2 \left[\frac{m_2 \ell^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} q_{6j-1} - 2 \left(\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi)}{420} + \right. \\
& + \left. \frac{17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1} q_{6j+2} + 2 \left[\frac{m_2 \ell^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} q_{6j+6} + \\
& + 2 \left(\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j} q_{6j+3} - 2 \left[\frac{m_2 \ell^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi}{420} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} q_{6j+5} + 2 \left[\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+2} q_{6j+3} + \\
& + 2 \left(\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+2} q_{6j+5} - 2 \left(\frac{m_2 \ell^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi)}{420} \right. \\
& + \left. \frac{17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+3} q_{6j+6} - 2 \left[\frac{m_2 \ell^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5} q_{6j+6} \left. \right\} \text{cos} \theta'_2
\end{aligned}$$

(B.41)

$$M_{13}^{2j} = 0$$

(B.42)

$$M_{14}^{2j} = q_{6n_1+3} m_2 \ell_2 - (j-1) m_2 \ell_2^2 \cos \theta'_2 - \frac{1}{2} m_2 \ell_2 (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \cos \theta'_2 + \\ + m_2 \ell_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{\ell_2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell_2}{12} q_{6j+6} \right) \text{sen} \theta'_2 \quad (\text{B.43})$$

$$M_{15}^{2j} = (q_{6n_1+2} + L_{y1}) m_2 \ell_2 + m_2 \ell_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3} - \frac{\ell_2}{12} q_{6j-1} + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \right. \\ \left. + \frac{\ell_2}{12} q_{6j+5} \right) \quad (\text{B.44})$$

$$M_{16}^{2j} = M_{12}^{2j} \quad (\text{B.45})$$

$$M_{17}^{2j} = \frac{1}{2} (q_{6n_1+2} + L_{y1}) m_2 \ell_2 \cos \theta'_2 + \cos \theta'_2 \left\{ \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-3} + \right. \\ - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-1} + \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(-\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+3} + \\ \left. + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+5} \right\} \quad (\text{B.46})$$

$$M_{18}^{2j} = \frac{1}{2} (q_{6n_1+2} + L_{y1}) m_2 \ell_2 \text{sen} \theta'_2 - \left\{ \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j-3} + \right. \\ - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1} + \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) q_{6j+3} \\ \left. + 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+5} \right\} \text{sen} \theta'_2 \quad (\text{B.47})$$

$$M_{19}^{2j} = -\frac{1}{2} q_{6n_1+3} m_2 \ell_2 - \frac{1}{2} (j-1) m_2 \ell_2^2 \cos \theta'_2 - \left(\frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5} - \right. \\ \left. - \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+1} \right) \cos \theta'_2 + \left\{ \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j-4} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j} + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi}{420} + \right. \\
& + \left. \frac{70\phi^2}{420} \right) q_{6j+2} - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+5} \left. \right\} \text{sen}\theta'_2 + \\
& + \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-2} - \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+4} \right\} \text{cos}\theta'_2 \quad (\text{B.48})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{110}^{2j} = & \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-3} + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \phi \right) \ell_2 q_{6j-1} + \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+3} \right. \\
& + \left. \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) \ell_2 q_{6j+5} \right\} \text{cos}\theta'_2 \quad (\text{B.49})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{111}^{2j} = & \frac{1}{12} q_{6n_1+3} m_2 \ell_2^2 - \frac{1}{12} (j-1) m_2 \ell_2^3 \text{cos}\theta'_2 - \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} \right. \\
& - \left. \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} \right) \text{cos}\theta'_2 + \left\{ \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{-22 - 38,5\phi - 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-}^+ \right. \\
& + \frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{-4 - 7\phi - 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j} + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{-13 - 31,5\phi - 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+2} \\
& + \left. \frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+6} \right\} \text{sen}\theta'_2 + \\
& + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \phi \right) \ell_2 q_{6j-2} + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) \ell_2 q_{6j+4} \left. \right\} \text{cos}\theta'_2 \quad (\text{B.50})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{112}^{2j} = & -\frac{1}{12} (q_{6n_1+2} + L_{y1}) m_2 \ell_2^2 \text{cos}\theta'_2 - \left\{ \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-3}^+ \right. \\
& + \frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{-4 - 7\phi - 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1} + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+3} \\
& + \left. \frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+5} \right\} \text{sen}\theta'_2 \quad (\text{B.51})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{113}^{2j} = & \frac{1}{2} (q_{6n_1+2} + L_{y1}) m_2 \ell_2 \cos \theta'_2 + \cos \theta'_2 \left\{ \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-3} + \right. \\
& - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-1} + \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+3} + \\
& \left. + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+5} \right\} \quad (B.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{114}^{2j} = & - \frac{1}{2} (q_{6n_1+2} + L_{y1}) m_2 \ell_2 \sin \theta'_2 - \left\{ \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j+3} + \right. \\
& + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+1} + \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) q_{6j-3} \\
& \left. - 2 \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1} \right\} \sin \theta'_2 \quad (B.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{115}^{2j} = & - \frac{1}{2} q_{6n_1+3} m_2 \ell_2 - \frac{1}{2} (j-1) m_2 \ell_2^2 \cos \theta'_2 - \left\{ \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5} - \right. \\
& - \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1} \left. \right\} \cos \theta'_2 + \left\{ \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j+2} - \right. \\
& - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+6} + \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) q_{6j-4} \\
& + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j} \left. \right\} \sin \theta'_2 + \\
& + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-2} + \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+4} \right\} \cos \theta'_2 \quad (B.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{116}^{2j} = & - \left\{ - \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-3} + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) \ell_2 q_{6j-1} + \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+3} \right. \\
& \left. + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(- \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \phi \right) \ell_2 q_{6j+5} \right\} \cos \theta'_2 \quad (B.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{117}^{2j} = & -\frac{1}{12} q_{6n_1+3} m_2 \ell_2^2 - \frac{1}{12} (j-1) m_2 \ell_2^3 \cos\theta'_2 - \left(\frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5}^+ \right. \\
& + \left. \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} \right) \cos\theta'_2 + \left\{ \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+2}^+ \right. \\
& + \frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{-4 - 7\phi - 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+6} + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-4} \\
& + \left. \frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j} \right\} \text{sen}\theta'_2 + \\
& + \left. \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \phi \right) \ell_2 q_{6j+4} + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) \ell_2 q_{6j-2} \right\} \cos\theta'_2
\end{aligned}$$

(B.56)

$$\begin{aligned}
M_{118}^{2j} = & \frac{1}{12} (q_{6n_1+2} + L_{y1}) m_2 \ell_2^2 \text{sen}\theta'_2 - \left\{ -\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+3}^+ \right. \\
& + \frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{-4 - 7\phi - 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+5} - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-3} \\
& + \left. \frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1} \right\} \text{sen}\theta'_2
\end{aligned}$$

(B.57)

$$\begin{aligned}
M_{22}^{2j} = & (j-1)^2 m_2 \ell_2^3 + (j-1) m_2 \ell_2^2 (q_{6j+1} + q_{6j-5}) + \left(\frac{m_2 \ell_2}{3} \right) q_{6j-5} q_{6j-5} + \\
& + 2 \left(\frac{m_2 \ell_2}{6} \right) q_{6j-5} q_{6j+1} + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_2 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-4} q_{6j-4} + \\
& + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-4} q_{6j} - 2 \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_2 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-4} q_{6j+2} + \\
& + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-4} q_{6j+6} + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_2 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-3} q_{6j-3} + \\
& - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-3} q_{6j-1} - 2 \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_2 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-3} q_{6j+3} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-3} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} + \right. \\
& + \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j-1} q_{6j-1} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j-1} + \\
& + 2 \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j-1} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} + \right. \\
& + \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j} q_{6j} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+2} + \\
& + 2 \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+6} + \left(\frac{m_2 \ell_2}{3} \right) q_{6j+1} q_{6j+1} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_2 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{\ell_2 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+3} q_{6j+3} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j+5} + \\
& + \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi+10\phi^2)}{30} \right) q_{6j+5} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} + \right. \\
& + \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j+6} q_{6j+6} + \left\{ \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(156+294\phi+140\phi^2)}{420} \right\} q_{6j-4} q_{6j-4} + \\
& + 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22+38,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j} + 2 \left[\frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(54+126\phi+70\phi^2)}{420} \right] q_{6j-4} q_{6j+2} - \\
& - 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13+31,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{\rho I_z}{3} \ell_2 \right) q_{6j-2} q_{6j-2} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{6} \ell_2 \right) q_{6j-2} q_{6j+4} + \left[\frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+7\phi+3,5\phi^2)}{420} \right] q_{6j} q_{6j} + \\
& + 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13+31,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j} q_{6j+2} - \\
& - 2 \left[\frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \frac{(3+7\phi+3,5\phi^2)}{420} \right] q_{6j} q_{6j+6} + \left[\frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)^2} \frac{(156+294\phi)}{420} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{140\phi^2}{420} \Big] q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{\rho I_z}{3} \ell_2 \right) q_{6j+4} q_{6j+4} + \left[\frac{m_2 \ell_2^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6} q_{6j+6}
\end{aligned} \tag{B.58}$$

$$\begin{aligned}
M_{23}^{2j} = & (j - 1) m_2 \ell_2^2 \cos\theta'_2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_2 \left(q_{6j+1} + q_{6j-5} \right) \cos\theta'_2 - m_2 \ell_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4} + \right. \\
& \left. + \frac{\ell_2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell_2}{12} q_{6j+6} \right) \text{sen}\theta'_2
\end{aligned} \tag{B.59}$$

$$M_{24}^{2j} = 0 \tag{B.60}$$

$$\begin{aligned}
M_{25}^{2j} = & -(j - 1) m_2 \ell_2^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{2} m_2 \ell_2 \left(q_{6j+1} + q_{6j-5} \right) \text{sen}\theta'_2 - m_2 \ell_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4} + \right. \\
& \left. + \frac{\ell_2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell_2}{12} q_{6j+6} \right) \cos\theta'_2
\end{aligned} \tag{B.61}$$

$$M_{26}^{2j} = M_{22}^{2j} \tag{B.62}$$

$$\begin{aligned}
M_{27}^{2j} = & - \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-4} - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j} - \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(-\frac{3}{20} + \right. \\
& \left. \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+2} - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+6}
\end{aligned} \tag{B.63}$$

$$\begin{aligned}
M_{28}^{2j} = & \frac{1}{2} (j - 1) m_2 \ell_2^2 + \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5} + \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+1} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-2} + \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+4}
\end{aligned} \tag{B.64}$$

$$M_{29}^{2j} = 0 \quad (\text{B.65})$$

$$\begin{aligned} M_{210}^{2j} = & -\frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-4} + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) \ell_2 q_{6j} + \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+2} \\ & + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) \ell_2 q_{6j+6} \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

$$M_{211}^{2j} = 0 \quad (\text{B.67})$$

$$\begin{aligned} M_{212}^{2j} = & \frac{1}{12} (j-1) m_2 \ell_2^3 + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} \\ & - \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) \ell_2 q_{6j-2} - \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) \ell_2 q_{6j+4} \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

$$\begin{aligned} M_{213}^{2j} = & -\frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+2} - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+6} - \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-4} - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j} \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

$$\begin{aligned} M_{214}^{2j} = & \frac{1}{2} (j-1) m_2 \ell_2^2 + \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1} + \frac{m_2 \ell_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-2} - \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+4} \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

$$M_{215}^{2j} = 0 \quad (\text{B.71})$$

$$\begin{aligned} M_{216}^{2j} = & -\frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-4} + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) \ell_2 q_{6j+6} + \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+2} \\ & + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) \ell_2 q_{6j} \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

$$M_{217}^{2j} = 0 \quad (\text{B.73})$$

$$\begin{aligned} M_{218}^{2j} = & -\frac{1}{12} (j-1) m_2 \ell_2^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} - \frac{m_2 \ell_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j} \\ & - \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) \ell_2 q_{6+4} - \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) \ell_2 q_{6j-2} \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

$$M_{33}^{2j} = m_2 \ell_2 \quad (\text{B.75})$$

$$M_{34}^{2j} = M_{35}^{2j} = 0 \quad (\text{B.76})$$

$$M_{36}^{2j} = M_{23}^{2j} \quad (\text{B.77})$$

$$M_{37}^{2j} = \frac{1}{2} m_2 \ell_2 \text{sen} \theta'_2 \quad (\text{B.78})$$

$$M_{38}^{2j} = \frac{1}{2} m_2 \ell_2 \text{cos} \theta'_2 \quad (\text{B.79})$$

$$M_{39}^{2j} = M_{310}^{2j} = M_{311}^{2j} = 0 \quad (\text{B.80})$$

$$M_{312}^{2j} = \frac{1}{12} m_2 \ell_2^2 \text{cos} \theta'_2 \quad (\text{B.81})$$

$$M_{313}^{2j} = M_{37}^{2j} \quad (\text{B.82})$$

$$M_{314}^{2j} = M_{38}^{2j} \quad (\text{B.83})$$

$$M_{315}^{2j} = M_{316}^{2j} = M_{317}^{2j} = 0 \quad (\text{B.84})$$

$$M_{318}^{2j} = -M_{312}^{2j} \quad (\text{B.85})$$

$$M_{44}^{2j} = m_2 \ell_2 \quad (\text{B.86})$$

$$M_{45}^{2j} = M_{46}^{2j} = M_{47}^{2j} = M_{48}^{2j} = 0 \quad (\text{B.87})$$

$$M_{49}^{2j} = \frac{1}{2} m_2 \ell_2 \quad (\text{B.88})$$

$$M_{410}^{2j} = 0 \quad (\text{B.89})$$

$$M_{411}^{2j} = -\frac{1}{12} m_2 \ell_2^2 \quad (\text{B.90})$$

$$M_{412}^{2j} = 0 \quad (\text{B.91})$$

$$M_{413}^{2j} = M_{414}^{2j} = 0 \quad (\text{B.92})$$

$$M_{415}^{2j} = \frac{1}{2} m_2 \ell_2 \quad (\text{B.93})$$

$$M_{416}^{2j} = M_{417}^{2j} = M_{418}^{2j} = 0 \quad (\text{B.94})$$

$$M_{55}^{2j} = m_2 \ell_2 \quad (\text{B.95})$$

$$\begin{aligned} M_{56}^{2j} = & -(j-1) m_2 \ell_2^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{2} m_2 \ell_2 \left(q_{6j+1} + q_{6j-5} \right) \text{sen}\theta'_2 - m_2 \ell_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4} \right. \\ & \left. + \frac{\ell_2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell_2}{12} q_{6j+6} \right) \text{cos}\theta'_2 \end{aligned} \quad (\text{B.96})$$

$$M_{57}^{2j} = M_{38}^{2j} \quad (\text{B.97})$$

$$M_{58}^{2j} = -M_{37}^{2j} \quad (\text{B.98})$$

$$M_{59}^{2j} = M_{510}^{2j} = M_{511}^{2j} = 0 \quad (\text{B.99})$$

$$M_{512}^{2j} = -\frac{1}{12} m_2 \ell_2^2 \text{sen}\theta_2' \quad (\text{B.100})$$

$$M_{513}^{2j} = M_{57}^{2j} \quad (\text{B.101})$$

$$M_{514}^{2j} = M_{58}^{2j} \quad (\text{B.102})$$

$$M_{515}^{2j} = M_{516}^{2j} = M_{517}^{2j} = 0 \quad (\text{B.103})$$

$$M_{518}^{2j} = -M_{58}^{2j} \quad (\text{B.104})$$

$$M_{66}^{2j} = M_{22}^{2j} \quad (\text{B.105})$$

$$M_{67}^{2j} = M_{27}^{2j} \quad (\text{B.106})$$

$$M_{68}^{2j} = M_{28}^{2j} \quad (\text{B.107})$$

$$M_{69}^{2j} = M_{29}^{2j} \quad (\text{B.108})$$

$$M_{610}^{2j} = M_{210}^{2j} \quad (\text{B.109})$$

$$M_{611}^{2j} = 0 \quad (\text{B.110})$$

$$M_{612}^{2j} = M_{212}^{2j} \quad (\text{B.111})$$

$$M_{613}^{2j} = M_{213}^{2j} \quad (\text{B.112})$$

$$M_{614}^{2j} = M_{214}^{2j} \quad (\text{B.113})$$

$$M_{615}^{2j} = 0 \quad (\text{B.114})$$

$$M_{616}^{2j} = M_{216}^{2j} \quad (\text{B.115})$$

$$M_{617}^{2j} = 0 \quad (\text{B.116})$$

$$M_{618}^{2j} = M_{218}^{2j} \quad (\text{B.117})$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-3} q_{6j-1} - 2 \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-3} q_{6j+3} + \\
& - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-3} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} + \right. \\
& + \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j-1} q_{6j-1} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j-1} + \\
& + 2 \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j-1} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} + \right. \\
& + \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j} q_{6j} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+2} + \\
& + 2 \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+6} + \left(\frac{m_3 I_3}{3} \right) q_{6j+1} q_{6j+1} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+3} q_{6j+3} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j+5} + \\
& + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi+10\phi^2)}{30} \right) q_{6j+5} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} + \right. \\
& + \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j+6} q_{6j+6} \Big] \cos^2 \theta'_{23} + \left\{ \frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156+294\phi+140\phi^2}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j-4} \right. \\
& + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22+38,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j} + 2 \left[\frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54+126\phi}{420} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-4} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13+31,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{\rho I_z}{3} \frac{I_3}{I_3} \right) q_{6j-2} q_{6j-2} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{6} \frac{I_3}{I_3} \right) q_{6j-2} q_{6j+4} + \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{(4+7\phi)}{420} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} q_{6j} + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13+31,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j} q_{6j+2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} q_{6j+6} + \left[\frac{m_3 l_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi}{420} \right) \right. \\
& + \left. \frac{140\phi^2}{420} \right] q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} + \\
& + \left\{ \left(\frac{\rho I_z}{3} l_3 \right) q_{6j+4} q_{6j+4} + \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6} q_{6j+6} \right\} \text{sen}^2 \theta'_2 \\
& + \left\{ \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j-3} - 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi)}{420} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j-1} + 2 \left[\frac{m_3 l_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-3} q_{6j+3} + \right. \\
& + \left. 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j+5} + \left(\frac{\rho I_z}{3} l_3 \right) q_{6j-2} q_{6j-2} \right. \\
& + \left. 2 \left(\frac{\rho I_z}{6} l_3 \right) q_{6j-2} q_{6j+4} + \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} q_{6j-1} - \right. \\
& - \left. 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-1} q_{6j+3} - 2 \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi}{420} \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} q_{6j+5} + \left. \left[\frac{m_3 l_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+3} q_{6j+3} + \right. \\
& + \left. 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+3} q_{6j+5} + \left(\frac{\rho I_z}{3} l_3 \right) q_{6j+4} q_{6j+4} + \right. \\
& + \left. \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5} q_{6j+5} \right\} + 2(L_{y1} + q_{6n_1+2}) q_{6n_1+3} \frac{m_3 l_3}{3} \\
& + 2(L_{y1} + q_{6n_1+2}) m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-3} - \frac{l_3}{12} q_{6j-1} + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \frac{l_3}{12} q_{6j+5} \right] + \\
& + 2q_{6n_1+3} (L_2 + q_1) m_3 l_3 \cos \theta'_2 - 2q_{6n_1+3} q_{6n_2+2} m_3 l_3 \text{sen} \theta'_2 + \\
& + 2q_{6n_1+3} m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos \theta'_{23} - \\
& - 2q_{6n_1+3} m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \text{sen} \theta'_{23} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2q_{6n_2+2}(L_2 + q_{6n_1+1})m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 \text{cos}\theta'_2 + 2(L_2 + q_{6n_1+2})m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2}(q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \text{cos}\theta'_2 \text{cos}\theta'_{23} - (L_2 + q_{6n_2+1})m_3 l_3 \left[\frac{1}{2}q_{6j-4} + \right. \\
& + \left. \frac{l_3}{12}q_{6j} + \frac{1}{2}q_{6j+2} - \frac{l_3}{12}q_{6j+6} \right] \text{cos}\theta'_2 \text{sen}\theta'_{23} + \\
& + 2q_{6n_2+2}m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \text{sen}\theta'_2 \text{cos}\theta'_2 + \\
& + 2q_{6n_2+2}m_3 l_3 \left[\frac{1}{2}q_{6j-4} + \frac{l_3}{12}q_{6j} + \frac{1}{2}q_{6j+2} - \frac{l_3}{12}q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_2 \text{sen}\theta'_{23} + \\
& + 2(q_{6n_2+3} + L_{z2})m_3 l_3 \left[\frac{1}{2}q_{6j-3} + \frac{l_3}{12}q_{6j-1} + \frac{1}{2}q_{6j+3} + \right. \\
& + \left. \frac{l_3}{12}q_{6j+5} \right] - 2(j-1)m_3 l_3^2 \left[\frac{1}{2}q_{6j-4} + \frac{l_3}{12}q_{6j} + \frac{1}{2}q_{6j+2} - \right. \\
& - \left. \frac{l_3}{12}q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_{23} \text{cos}\theta'_{23} - \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j-4} + 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j} + 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+2} - 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+6} - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-4} q_{6j-2} \\
& + 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-4} q_{6j+1} - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-4} q_{6j+4} + 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2} q_{6j} + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-2} q_{6j+2} + 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-2} q_{6j+6} \\
& + 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j} + 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j} q_{6j+4} + \\
& + 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j+2} - 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j+6} + \\
& + \left. \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-4} q_{6j+2} + 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j} q_{6j+4} \right\} \text{sen}\theta'_{23} \text{cos}\theta'_{23}
\end{aligned}$$

(B.118)

$$\begin{aligned}
M_{12}^{3j} = & - (L_2 + q_{6n_2+1})(L_{y1} + q_{6n_1+2})m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 - \\
& - (L_{y1} + q_{6n_1+2})q_{6n_2+2}m_3 l_3 \cos\theta'_2 - (L_{y1} + q_{6n_1+2})(j-1)m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_{23} \\
& - (L_{y1} + q_{6n_1+2})m_3 l_3 \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \text{sen}\theta'_{23} - \\
& - (L_{y1} + q_{6n_1+2})m_3 l_3 \left[-\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] - \\
& - (L_{z2} + q_{6n_2+3})(L_2 + q_{6n_2+1})m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 - \\
& - (L_{z2} + q_{6n_2+3})q_{6n_2+2}m_3 l_3 \cos\theta'_2 - (L_{z2} + q_{6n_2+3})(j-1)m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_{23} \\
& - (L_{z2} + q_{6n_2+3})m_3 l_3 \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \text{sen}\theta'_{23} - \\
& - (L_{z2} + q_{6n_2+3})m_3 l_3 \left[-\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \cos\theta'_{23} \\
& - (L_2 + q_{6n_2+1})m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-3} + \frac{l_3}{12} q_{6j-1} + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \right. \\
& \left. + \frac{l_3}{12} q_{6j+5} \right] \text{sen}\theta'_2 - q_{6n_2+2}m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-3} + \frac{l_3}{12} q_{6j-1} + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \right. \\
& \left. + \frac{l_3}{12} q_{6j+5} \right] \cos\theta'_2 - (j-1)m_3 l_3^2 \left[\frac{1}{2} q_{6j-3} - \frac{l_3}{12} q_{6j-1} + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \right. \\
& \left. + \frac{l_3}{12} q_{6j+5} \right] \text{sen}\theta'_{23} - \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j-3} - 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j-1} + 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+3} + 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{3\theta} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+5} - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-3} q_{6j-2} + 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-3} q_{6j+1} \right. \\
& \left. - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-3} q_{6j+4} - 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2} q_{6j-1} + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j+3} q_{6j}^+ \right. \\
& \left. + 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-2} q_{6j+5} - 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+5} + \right. \\
& \left. + 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-1} q_{6j+4} + 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j+3} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j+5} + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j+3} q_{6j+4} - 2 \frac{\rho I_z I_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+4} q_{6j+5} \left. \right\} \text{sen} \theta'_{23} - \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j-3} \right. \\
& - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j-1} + 2 \left[\frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi}{420} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-4} q_{6j+3} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j+5} + \\
& + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j} + 2 \left[\frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi}{420} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-3} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j+6} - \\
& - 2 \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} q_{6j-1} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi)}{420} + \right. \\
& \left. + \frac{17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1} q_{6j+2} + 2 \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} q_{6j+6} + \\
& + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j} q_{6j+3} - 2 \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi}{420} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} q_{6j+5} + 2 \left[\frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+2} q_{6j+3} + \\
& + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+2} q_{6j+5} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi)}{420} \right. \\
& \left. + \frac{17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+3} q_{6j+6} - 2 \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5} q_{6j+6} \left. \right\} \text{cos} \theta'_{23}
\end{aligned}$$

(B.119)

$$\begin{aligned}
M_{13}^{3j} = & - (L_{y1} + q_{6n_1+2})(j-1)m_3 I_3^2 \text{sen} \theta'_{23} - (L_{y1} + q_{6n_1+2})m_3 I_3 \frac{1}{2} (q_{6j}^+ - \\
& q_{6j+1}) \text{sen} \theta'_{23} - (L_{y1} + q_{6n_1+2})m_3 I_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{I_3}{12} q_{6j} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \Big] - (L_{z2} + q_{6n_2+3})(j-1)m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_{23} - \\
& - (L_{z2} + q_{6n_2+3})m_3 l_3 \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \text{sen}\theta'_{23} - (L_{z2} + \\
& + q_{6n_2+3})m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \cos\theta'_{23} \\
& - (j-1)m_3 l_3^2 \left[\frac{1}{2} q_{6j-3} - \frac{l_3}{12} q_{6j-1} + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \right. \\
& \left. + \frac{l_3}{12} q_{6j+5} \right] \text{sen}\theta'_{23} - \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j-3} - \right. \\
& - 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j-1} + 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+} \\
& + 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+5} - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-3} q_{6j-2} + \\
& + \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-3} q_{6j+1} - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j-3} q_{6j+4} - 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2} q_{6j-1} + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j+3} q_{6j-2} + 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-2} q_{6j+5} - 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} q_{6j+5} + \\
& + 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-1} q_{6j+4} + 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j+} \\
& + 2 \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} q_{6j+5} + \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} q_{6j+3} q_{6j+4} - 2 \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+4} q_{6j+5} \Big\} \text{sen}\theta'_{23} - \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j-3} \right. \\
& - 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j-1} + 2 \left[\frac{m_3 l_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-4} q_{6j+3} - 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j+5} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j} + 2 \left[\frac{m_3 l_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi}{420} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-3} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-3} q_{6j+6} - \\
& - 2 \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} q_{6j-1} - 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi)}{420} + \right. \\
& \left. + \frac{17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1} q_{6j+2} + 2 \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-1} q_{6j+6} + \\
& + 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j} q_{6j+3} - 2 \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi}{420} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} q_{6j+5} + 2 \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+2} q_{6j+3} + \\
& + 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+2} q_{6j+5} - 2 \left(\frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi)}{420} \right. \\
& \left. + \frac{17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+3} q_{6j+6} - 2 \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+5} q_{6j+6} \left. \right\} \cos\theta'_{23}
\end{aligned}$$

(B.120)

$$M_{14}^{3j} = 0 \quad (\text{B.121})$$

$$\begin{aligned}
M_{15}^{3j} = & - q_{6n_1+3} m_3 l_3 - (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \cos\theta'_2 + q_{6n_2+2} m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_2 - \\
& - (j-1) m_3 l_3^2 \cos\theta'_{23} - m_3 l_3 \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \cos\theta'_{23} + \\
& + m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_{23}
\end{aligned}$$

(B.122)

$$\begin{aligned}
M_{16}^{3j} = & \left\{ \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}) \right] + \left[\frac{1}{2} q_{6j-3} - \frac{l_3}{12} q_{6j-1} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{2} q_{6j+3} + \frac{l_3}{12} q_{6j+5} \right] \right\} m_3 l_3
\end{aligned}$$

(B>123)

$$M_{17}^{3j} = M_{12}^{3j} \quad (B.124)$$

$$M_{18}^{3j} = m_3 l_3 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}) + \left(\frac{1}{2} q_{6j-3} - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^+ + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \frac{l_3}{12} q_{6j+5} \right) \right] \cos \theta'_2 \quad (B.125)$$

$$M_{19}^{3j} = -m_3 l_3 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}) + \left(\frac{1}{2} q_{6j-3} - \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \frac{l_3}{12} q_{6j+5} \right) \right] \sin \theta'_2 \quad (B.126)$$

$$M_{110}^{3j} = M_{15}^{3j} \quad (B.127)$$

$$M_{111}^{3j} = M_{13}^{3j} \quad (B.128)$$

$$M_{112}^{3j} = m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} (L_{y1} + q_{6n_1+2}) + \frac{1}{2} (L_{z2} + q_{6n_2+3}) + \left(\frac{1}{2} q_{6j-3} - \frac{l_3}{12} q_{6j-1} + \frac{1}{2} q_{6j+3} + \frac{l_3}{12} q_{6j+5} \right) \right] \cos \theta'_{23} \quad (B.129)$$

$$M_{113}^{3j} = -m_3 l_3 \left\{ \frac{1}{2} (L_{y1} + q_{6n_1+2}) + \frac{1}{2} (L_{z2} + q_{6n_2+3}) + \frac{1}{(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{13}{35} + \frac{7}{10} \phi + \frac{1}{3} \phi^2 \right) q_{6j-3} - \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) l_3 q_{6j-1} + \left(\frac{9}{70} + \frac{3}{10} \phi + \frac{1}{6} \phi^2 \right) q_{6j+3} + \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) l_3 q_{6j+5} \right] \right\} \sin \theta'_{23}$$

$$(B.130)$$

$$\begin{aligned}
M_{114}^{3j} = & - q_{6n_1+3} m_3 l_3 \frac{1}{2} - (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \frac{1}{2} \cos\theta'_2 + \\
& + q_{6n_2+2} m_3 l_3^2 \frac{1}{2} \text{sen}\theta'_2 - (j-1) m_3 l_3^2 \cos\theta'_{23} - m_3 l_3 \left[\frac{1}{3} q_{6j+5} + \right. \\
& + \frac{1}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-1} \left. \right] \cos\theta'_{23} + \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{13}{35} + \right. \right. \\
& + \frac{7}{10} \phi + \frac{1}{3} \phi^2 \left. \right) q_{6j-4} + \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) l_3 q_{6j} + \\
& + \left(\frac{9}{7\theta} + \frac{3}{10} \phi + \frac{1}{6} \phi^2 \right) q_{6j+2} - \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{24} \phi^2 \right) l_3 q_{6j+6} \left. \right] \text{sen}\theta'_{23} - \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} (q_{6j-2} + q_{6j+4}) \cos\theta'_{23}
\end{aligned}$$

(B.131)

$$\begin{aligned}
M_{115}^{3j} = & - \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \right] q_{6j-3} - \left[\frac{\rho I_y l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-1} \right] + \right. \\
& \left. + \left[\frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \right] q_{6j+3} + \left[\frac{\rho I_y l_3}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+5} \right] \right\} \cos\theta'_{23}
\end{aligned}$$

(B.132)

$$\begin{aligned}
M_{116}^{3j} = & - \frac{1}{12} q_{6n_1+3} m_3 l_3^2 - \frac{1}{12} (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3^2 \cos\theta'_2 + \\
& + \frac{1}{12} q_{6n_2+2} m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{12} (j-1) m_3 l_3^2 \cos\theta'_{23} + \\
& + \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} \right] \cos\theta'_{23} \\
& + \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) q_{6j-4} - \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60} \phi \right. \right. \\
& \left. + \frac{1}{120} \phi^2 \right) l_3 q_{6j} - \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) q_{6j+2} + \left(\frac{1}{140} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{60} \phi + \frac{1}{120} \phi^2 \right) l_3^2 q_{6j+6} \left. \right] \text{sen}\theta'_{23} + \frac{\rho I_y l_3}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} - \right.
\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{3} \phi) q_{6j-2} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+4} \Big] \cos \theta'_{23} \quad (\text{B.133})$$

$$\begin{aligned} M_{117}^{3j} = & - \frac{1}{12} (L_{y1} + q_{6n_1+2}) m_3 l_3^2 \text{sen} \theta'_{23} - \frac{1}{12} (L_{z2} + \\ & + q_{6n_2+3}) m_3 l_3^2 \text{sen} \theta'_{23} + \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{24} \phi^2 \right) q_{6j-3} - \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60} \phi + \frac{1}{120} \phi^2 \right) l_3 q_{6j-1} + \left(\frac{13}{420} \right. \\ & + \left. \frac{3}{40} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) q_{6j+3} + \left(\frac{1}{140} + \frac{1}{60} \phi + \frac{1}{120} \phi^2 \right) l_3 q_{6j+5} \Big] \text{sen} \theta'_{23} \end{aligned} \quad (\text{B.134})$$

$$\begin{aligned} M_{118}^{3j} = & \frac{1}{2} m_3 l_3 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}) \right] \cos \theta'_{23} + \\ & + \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-3} - \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) l_3 q_{6j-1} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+3} + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) l_3 q_{6j+5} \right] \cos \theta'_{23} \end{aligned} \quad (\text{B.135})$$

$$\begin{aligned} M_{119}^{3j} = & - \frac{1}{2} m_3 l_3 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}) \right] \text{sen} \theta'_{23} - \\ & - \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{9}{70} + \frac{3}{10} \phi + \frac{1}{6} \phi^2 \right) q_{6j-3} - \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi + \right. \right. \\ & - \left. \frac{1}{24} \phi^2 \right) l_3 q_{6j-1} + \left(\frac{13}{35} + \frac{7}{10} \phi + \frac{1}{3} \phi^2 \right) q_{6j+3} + \left(\frac{11}{210} + \right. \\ & + \left. \frac{11}{120} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) l_3 q_{6j+5} \Big] \text{sen} \theta'_{23} \end{aligned} \quad (\text{B.136})$$

$$M_{120}^{3j} = - \frac{1}{2} q_{6n_1+3} m_3 l_3 - \frac{1}{2} (L_{z2} + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \cos \theta'_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} q_{6n_2+2} m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{2} (j-1) m_3 l_3 \text{cos}\theta'_{23} - \\
& - \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5} + \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1} \right] \text{cos}\theta'_{23} + \\
& + \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{9}{70} + \frac{3}{10} \phi + \frac{1}{6} \phi^2 \right) q_{6j-4} + \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{24} \phi^2 \right) l_3 q_{6j} + \left(\frac{13}{35} + \frac{7}{10} \phi + \frac{1}{3} \phi^2 \right) q_{6j+2} - \left(\frac{11}{210} + \right. \\
& + \left. \frac{11}{120} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) l_3 q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_{23} + \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} (q_{6j-2} + \\
& + q_{6j+4}) \text{cos}\theta'_{23} \tag{B.137}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{121}^{3j} & = - \left\{ \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left[-\frac{1}{2} q_{6j-3} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) l_3 q_{6j-1} \right] + \right. \\
& + \left. \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left[\frac{1}{2} q_{6j+3} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) l_3 q_{6j+5} \right] \right\} \text{cos}\theta'_{23} \tag{B.138}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{122}^{3j} & = - \frac{1}{12} q_{6n_1+3} m_3 l_3^2 - \frac{1}{12} (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3^2 \text{cos}\theta'_2 + \\
& + \frac{1}{12} q_{6n_2+2} m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{12} (j-1) m_3 l_3^2 \text{cos}\theta'_{23} - \\
& - \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} \right] \text{cos}\theta'_{23} + \\
& + \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) q_{6j-4} + \left(\frac{1}{140} + \frac{1}{60} \phi + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{120} \phi^2 \right) l_3 q_{6j} + \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) q_{6j+2} - \left(\frac{1}{105} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{60} \phi + \frac{1}{120} \phi^2 \right) l_3^2 q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_{23} + \frac{\rho I_y l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{12} - \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-2} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+4} \right] \text{cos}\theta'_{23} \tag{B.139}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{123}^{3j} &= \frac{1}{12} (L_{y1} + q_{6n_1+2}) m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_{23} + \frac{1}{12} (L_{z2} + \\
&+ q_{6n_2+3}) m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_{23} - \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)^2} \left[\left(-\frac{13}{420} - \frac{3}{40} \phi - \frac{1}{24} \phi^2 \right) q_{6j-}^+ \right. \\
&+ \left(\frac{1}{140} + \frac{1}{60} \phi + \frac{1}{120} \phi^2 \right) l_3 q_{6j-1} - \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{24} \phi^2 \right) q_{6j+3} - \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60} \phi + \frac{1}{120} \phi^2 \right) l_3 q_{6j+5} \left. \right] \text{sen}\theta'_{23}
\end{aligned}$$

(B.140)

$$\begin{aligned}
M_{22}^{3j} &= m_3 l_3 \left[L_2^2 + 2L_2 q_{6n_2+1} + (q_{6n_2+1})^2 \right] + (q_{6n_2+2})^2 m_3 l_3 + \\
&+ (j-1)^2 m_3 l_3^3 + (j-1) m_3 l_3 (q_{6j-5} + q_{6j+1}) + \\
&+ \left[\left(\frac{m_3 l_3}{3} \right) q_{6j-5} q_{6j-5} + 2 \left(\frac{m_3 l_3}{6} \right) q_{6j-5} q_{6j+1} + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{l_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-4} q_{6j-4} \right. \\
&+ 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-4} q_{6j} - 2 \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{l_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-4} q_{6j+2} + \\
&+ 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-4} q_{6j+6} + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{l_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-3} q_{6j-3} + \\
&- 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-3} q_{6j-1} - 2 \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{l_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-3} q_{6j+3} + \\
&- 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-3} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d l_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} \right. + \\
&+ \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j-1} q_{6j-1} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j-1} + \\
&+ 2 \left(\frac{I_d l_3}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j-1} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d l_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} \right. + \\
&+ \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j} q_{6j} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(-1 - 5\phi + 5\phi^2)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+6} + \left(\frac{m_3 I_3}{3} \right) q_{6j+1} q_{6j+1} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3 - 15\phi)}{30} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+3} q_{6j+3} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3 - 15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j+5} + \\
& + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4 + 5\phi + 10\phi^2)}{30} \right) q_{6j+5} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4 + 5\phi)}{30} + \right. \\
& \left. + \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j+6} q_{6j+6} \Big] + \left\{ \frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(156 + 294\phi + 140\phi^2)}{420} q_{6j-4} q_{6j-4} + \right. \\
& + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j} + 2 \left[\frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(54 + 126\phi + \right. \\
& \left. + \frac{70\phi^2}{420})}{420} \right] q_{6j-4} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{\rho I_z}{3} I_3 \right) q_{6j-2} q_{6j-2} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{6} I_3 \right) q_{6j-2} q_{6j+4} + \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \frac{(4 + 7\phi)}{420} + \right. \\
& \left. + \frac{3,5\phi^2}{420} \right] q_{6j} q_{6j} + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j} q_{6j+2} - \\
& - 2 \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \frac{(3 + 7\phi + 3,5\phi^2)}{420} \right] q_{6j} q_{6j+6} + \left[\frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(156 + 294\phi)}{420} + \right. \\
& \left. + \frac{140\phi^2}{420} \right] q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{\rho I_z}{3} I_3 \right) q_{6j+4} q_{6j+4} + \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \frac{(4 + 7\phi + 3,5\phi^2)}{420} \right] q_{6j+6} q_{6j+6} \Big\} + \\
& + 2(L_2 + q_{6n_2+1})(j-1)m_3 I_3^2 \cos\theta'_3 + (L_2 + q_{6n_2+1})m_3 I_3 (q_{6j-5} + \\
& + q_{6j+1}) \cos\theta'_3 + 2(L_2 + q_{6n_2+1})m_3 I_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{I_3}{12} q_{6j} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \Big] \text{sen}\theta'_3 - 2q_{6n_2+2} (j-1) m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_3 - \\
& - q_{6n_2+2} m_3 l_3 (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \text{sen}\theta'_3 + 2q_{6n_2+2} m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \text{cos}\theta'_3 \qquad \qquad \qquad (\text{B.141})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{23}^{3j} & = (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \text{cos}\theta'_3 + \\
& + (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \right. \\
& \left. + \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_3 - q_{6n_2+2} m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + \right. \\
& \left. + q_{6j+1}) \right] \text{sen}\theta'_3 + q_{6n_2+2} m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \right. \\
& \left. + \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \text{cos}\theta'_3 + m_3 l_3^2 \left[(j-1)^2 l_3 + (j-1) (q_{6j-5} + \right. \\
& \left. + q_{6j+1}) \right] + \left[\left(\frac{m_3 l_3}{3} \right) q_{6j-5} q_{6j-5} + 2 \left(\frac{m_3 l_3}{6} \right) q_{6j-5} q_{6j+1} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{l_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-4} q_{6j-4} + \right. \\
& + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-4} q_{6j} - 2 \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{l_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-4} q_{6j+2} + \\
& + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-4} q_{6j+6} + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{l_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-3} q_{6j-3} + \\
& - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-3} q_{6j-1} - 2 \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{l_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-3} q_{6j+3} + \\
& - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-3} q_{6j+5} + \left(\frac{l_d l_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{10\phi^2}{30} q_{6j-1} q_{6j-1} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j-1} + \\
& + 2 \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j-1} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} \right) + \\
& + \frac{10\phi^2}{30} q_{6j} q_{6j} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+2} + \\
& + 2 \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+6} + \left(\frac{m_3 I_3}{3} \right) q_{6j+1} q_{6j+1} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+3} q_{6j+3} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j+5} + \\
& + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi+10\phi^2)}{30} \right) q_{6j+5} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} \right) + \\
& + \frac{10\phi^2}{30} q_{6j+6} q_{6j+6} \Big] + \left\{ \frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(156+294\phi+140\phi^2)}{420} \right\} q_{6j-4} q_{6j-4} + \\
& + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22+38,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j} + 2 \left[\frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(54+126\phi}{420} \right. \\
& + \left. \frac{70\phi^2}{420} \right] q_{6j-4} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13+31,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{\rho I_z}{3} I_3 \right) q_{6j-2} q_{6j-2} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{6} I_3 \right) q_{6j-2} q_{6j+4} + \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \frac{((4+7\phi)}{420} \right. \\
& + \left. \frac{3,5\phi^2}{420} \right] q_{6j} q_{6j} + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13+31,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j} q_{6j+2} - \\
& - 2 \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \frac{(3+7\phi+3,5\phi^2)}{420} \right] q_{6j} q_{6j+6} + \left[\frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \frac{((156+294\phi)}{420} \right. \\
& + \left. \frac{140\phi^2}{420} \right] q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22+38,5\phi+17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} +
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\rho I_z}{3} l_3 \right) q_{6j+4} q_{6j+4} + \left[\frac{m_3 l_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6} q_{6j+6} \Big\}$$

(B.142)

$$M_{24}^{3j} = (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \cos\theta'_2 - q_{6n_2+2} m_3 l_3 \sin\theta'_2 + m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos\theta'_{23} - m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \sin\theta'_{23}$$

(B.143)

$$M_{25}^{3j} = 0$$

(B.144)

$$M_{26}^{3j} = -(L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \sin\theta'_2 - q_{6n_2+2} m_3 l_3 \cos\theta'_2 - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 - \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \sin\theta'_{23} - m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \cos\theta'_{23}$$

(B.145)

$$M_{27}^{3j} = M_{27}^{3j}$$

(B.146)

$$M_{28}^{3j} = -q_{6n_2+2} m_3 l_3 + m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \sin\theta'_3 - m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \cos\theta'_3$$

(B.147)

$$M_{29}^{3j} = (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 + m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos\theta'_3 - m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \sin\theta'_3$$

(B.148)

$$M_{210}^{3j} = 0 \quad (\text{B.149})$$

$$M_{211}^{3j} = M_{211}^{3j} \quad (\text{B.150})$$

$$M_{212}^{3j} = -\frac{1}{2} (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 - \frac{1}{2} q_{6n_2+2} m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 - \frac{m_3 l_3}{(1 + \phi)}$$

$$\left[\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-4} + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) l_3 q_{6j} + \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+2} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) l_3 q_{6j+6} \right] \quad (\text{B.151})$$

$$M_{213}^{3j} = \frac{1}{2} (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 - \frac{1}{2} q_{6n_2+2} m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 +$$

$$+ \frac{1}{2} (j - 1) m_3 l_3^2 + \frac{m_3 l_3}{(1 + \phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-6} + \left(\frac{3}{20} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+1} \right] - \frac{1}{2} \frac{\rho I_z}{(1 + \phi)} (q_{6j-2} + q_{6j+4}) \quad (\text{B.152})$$

$$M_{214}^{3j} = 0 \quad (\text{B.153})$$

$$M_{215}^{3j} = \frac{\rho I_z}{(1 + \phi)} \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) l_3 q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) l_3 q_{6j+6} \right] \quad (\text{B.154})$$

$$M_{216}^{3j} = 0 \quad (\text{B.155})$$

$$M_{217}^{3j} = (L_2 + q_{6n_2+1}) \frac{1}{12} m_3 l_3^2 \text{cos}\theta'_3 - \frac{1}{12} q_{6n_2+2} m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_3 +$$

$$+ \frac{1}{12} (j - 1) m_3 l_3^3 + \frac{m_3 l_3^2}{(1 + \phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5} + \left(\frac{1}{30} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} \right] - \frac{\rho I_z l_3}{(1 + \phi)} \left[\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2} + \left(-\frac{1}{12} + \right.$$

$$+ \frac{1}{6} \phi) q_{6j+4}] \quad (\text{B.156})$$

$$\begin{aligned} M_{218}^{3j} &= -\frac{1}{2} (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 - \frac{1}{2} q_{6n_2+2} m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 - \\ &- \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-4} + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) l_3 q_{6j} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{13} \phi \right) q_{6j+2} - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+6} \right] \quad (\text{B.157}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{219}^{3j} &= \frac{1}{2} (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 - \frac{1}{2} q_{6n_2+2} m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 + \\ &+ \frac{1}{2} (j-1) m_3 l_3^2 + \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5} + \left(\frac{7}{20} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1} \right] - \frac{1}{2} \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} (q_{6j-2} + q_{6j+4}) \quad (\text{B.158}) \end{aligned}$$

$$M_{220}^{3j} = 0 \quad (\text{B.159})$$

$$\begin{aligned} M_{221}^{3j} &= \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \left[-\frac{1}{2} q_{6j-4} + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) l_3 q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) l_3 q_{6j+6} \right] \quad (\text{B.160}) \end{aligned}$$

$$M_{222}^{3j} = 0 \quad (\text{B.161})$$

$$\begin{aligned} M_{223}^{3j} &= -\frac{1}{12} (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3^2 \text{cos}\theta'_3 - \frac{1}{12} q_{6n_2+2} m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_3 + \\ &+ \frac{1}{12} (j-1) m_3 l_3^3 + \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} + \left(\frac{1}{20} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{24} \phi) q_{6j+1}] + \frac{\rho I_z I_3}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-2} + \left(\frac{1}{12} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+4} \right] \tag{B.162}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{33}^{3j} &= m_3 I_3 \left[(j-1)^2 I_3^2 + (j-1)(q_{6j-6} + q_{6j+1}) \right] + \\
& + \left[\left(\frac{m_3 I_3}{3} \right) q_{6j-5} q_{6j-5} + 2 \left(\frac{m_3 I_3}{6} \right) q_{6j-5} q_{6j+1} + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-4} q_{6j-4} + \right. \\
& + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-4} q_{6j} - 2 \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-4} q_{6j+2} + \\
& + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-4} q_{6j+6} + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-3} q_{6j-3} + \\
& - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-3} q_{6j-1} - 2 \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j-3} q_{6j+3} + \\
& - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j-3} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} + \right. \\
& + \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j-1} q_{6j-1} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j-1} + \\
& + 2 \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j-1} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4+5\phi)}{30} + \right. \\
& + \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j} q_{6j} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+2} + \\
& + 2 \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(-1-5\phi+5\phi^2)}{30} \right) q_{6j} q_{6j+6} + \left(\frac{m_3 I_3}{3} \right) q_{6j+1} q_{6j+1} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{36}{30} \frac{\rho I_z}{I_3 (1+\phi)^2} \right) q_{6j+3} q_{6j+3} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{(1+\phi)^2} \frac{(3-15\phi)}{30} \right) q_{6j+3} q_{6j+5} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4 + 5\phi + 10\phi^2)}{30} \right) q_{6j+5} q_{6j+5} + \left(\frac{I_d I_3}{(1+\phi)^2} \frac{(4 + 5\phi)}{30} + \right. \\
& + \left. \frac{10\phi^2}{30} \right) q_{6j+6} q_{6j+6} \Big] + \left\{ \frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j-4} + \right. \\
& + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j} + 2 \left[\frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi}{420} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{70\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j-4} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j-4} q_{6j+6} + \\
& + \left(\frac{\rho I_z}{3} I_3 \right) q_{6j-2} q_{6j-2} + 2 \left(\frac{\rho I_z}{6} I_3 \right) q_{6j-2} q_{6j+4} + \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi}{420} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} q_{6j} + 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j} q_{6j+2} - \\
& - 2 \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j} q_{6j+6} + \left[\frac{m_3 I_3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi}{420} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{140\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+2} q_{6j+2} - 2 \left(\frac{m_3 I_3^2}{(1+\phi)^2} \frac{(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)}{420} \right) q_{6j+2} q_{6j+6} + \\
& + \left. \left(\frac{\rho I_z}{3} I_3 \right) q_{6j+4} q_{6j+4} + \left[\frac{m_3 I_3^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) \right] q_{6j+6} q_{6j+6} \right\}
\end{aligned}$$

(B.163)

$$\begin{aligned}
M_{34}^{3j} &= m_3 I_3 \left[(j-1) I_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos \theta'_{23} - \\
&- m_3 I_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{I_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{I_3}{12} q_{6j+6} \right] \sin \theta'_{23}
\end{aligned}$$

(B.164)

$$M_{35}^{3j} = 0 \quad (B.165)$$

$$M_{36}^{3j} = - m_3 I_3 \left[(j-1) I_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \sin \theta'_{23} -$$

$$- m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \cos \theta'_{23} \quad (\text{B.166})$$

$$M_{37}^{3j} = 0 \quad (\text{B.167})$$

$$\begin{aligned} M_{38}^{3j} &= m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \sin \theta'_3 - \\ &- m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \cos \theta'_3 \end{aligned} \quad (\text{B.168})$$

$$\begin{aligned} M_{39}^{3j} &= m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos \theta'_3 + \\ &+ m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \sin \theta'_3 \end{aligned} \quad (\text{B.169})$$

$$M_{310}^{3j} = 0 \quad (\text{B.170})$$

$$M_{311}^{3j} = M_{33}^{3j} \quad (\text{B.171})$$

$$\begin{aligned} M_{312}^{3j} &= \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-4} + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) l_3 q_{6j} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+2} - \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) l_3 q_{6j+6} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.172})$$

$$\begin{aligned} M_{313}^{3j} &= \frac{1}{12} (j-1) m_3 l_3^2 + \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5} + \left(\frac{3}{20} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+1} \right] + \frac{1}{2} \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} (q_{6j-2} + q_{6j+4}) \end{aligned} \quad (\text{B.173})$$

$$M_{314}^{3j} = 0 \quad (\text{B.174})$$

$$M_{315}^{3j} = \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \left[-\frac{1}{2} q_{6j-4} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) l_3 q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) l_3 q_{6j+6} \right] \quad (\text{B.175})$$

$$M_{316}^{3j} = 0 \quad (\text{B.176})$$

$$M_{317}^{3j} = \frac{1}{12} (j-1) m_3 l_3^3 + \frac{m_3 l_3^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5} + \left(\frac{1}{30} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1} \right] - \frac{\rho I_z l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2} + \left(-\frac{1}{12} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+4} \right] \quad (\text{B.177})$$

$$M_{318}^{3j} = -\frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-4} + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) l_3 q_{6j} + \right. \\ \left. + \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+2} - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) l_3 q_{6j+6} \right] \quad (\text{B.178})$$

$$M_{319}^{3j} = \frac{1}{2} (j-1) m_3 l_3^2 + \frac{m_3 l_3}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5} + \left(\frac{7}{20} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1} \right] - \frac{1}{2} \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} (q_{6j-2} + q_{6j+4}) \quad (\text{B.179})$$

$$M_{320}^{3j} = 0 \quad (\text{B.180})$$

$$M_{321}^{3j} = \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \left[-\frac{1}{2} q_{6j-4} - \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) l_3 q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) l_3 q_{6j+6} \right] \quad (\text{B.181})$$

$$M_{321}^{3j} = 0 \quad (\text{B.182})$$

$$\begin{aligned}
M_{323}^{3j} = & -\frac{1}{12} (j - 1) m_3 l_3^3 - \frac{m_3 l_3^2}{(1 + \phi)} \left[\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24}\phi \right) q_{6j-5} + \left(\frac{1}{20} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{24}\phi \right) q_{6j+1} \right] - \frac{\rho l_z l_3}{(1 + \phi)} \left[\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\phi \right) q_{6j-2} + \left(\frac{1}{12} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{3}\phi \right) q_{6j+4} \right] \quad (B.183)
\end{aligned}$$

$$M_{44}^{3j} = m_3 l_3 \quad (B.184)$$

$$M_{45}^{3j} = 0 \quad (B.185)$$

$$M_{46}^{3j} = 0 \quad (B.186)$$

$$\begin{aligned}
M_{47}^{3j} = & (L_2 + q_{6n_2+1}) m_3 l_3 \cos\theta'_2 - q_{6n_2+2} m_3 l_3 \sin\theta'_2 + m_3 l_3 \left[(j - 1) l_3 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos\theta'_{23} - m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \right. \\
& \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \sin\theta'_{23} \quad (B.187)
\end{aligned}$$

$$M_{48}^{3j} = m_3 l_3 \sin\theta'_2 \quad (B.188)$$

$$M_{49}^{3j} = m_3 l_3 \cos\theta'_2 \quad (B.189)$$

$$M_{410}^{3j} = 0 \quad (B.190)$$

$$\begin{aligned}
M_{411}^{3j} = & m_3 l_3 \left[(j - 1) l_3 - \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos\theta'_{23} - m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \right. \\
& \left. + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \sin\theta'_{23} \quad (B.191)
\end{aligned}$$

$$M_{412}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \sin\theta'_{23} \quad (B.192)$$

$$M_{413}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \cos\theta'_{23} \quad (B.193)$$

$$M_{414}^{3j} = M_{415}^{3j} = M_{416}^{3j} = 0 \quad (\text{B.194})$$

$$M_{417}^{3j} = \frac{1}{12} m_3 l_3 \cos\theta'_{23} \quad (\text{B.195})$$

$$M_{418}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{B.196})$$

$$M_{419}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \cos\theta'_{23} \quad (\text{B.197})$$

$$M_{420}^{3j} = M_{421}^{3j} = M_{422}^{3j} = 0 \quad (\text{B.198})$$

$$M_{423}^{3j} = -\frac{1}{12} m_3 l_3 \cos\theta'_{23} \quad (\text{B.199})$$

$$M_{55}^{3j} = m_3 l_3 \quad (\text{B.200})$$

$$M_{56}^{3j} = M_{57}^{3j} = M_{58}^{3j} = M_{59}^{3j} = 0 \quad (\text{B.201})$$

$$M_{510}^{3j} = m_3 l_3$$

$$M_{511}^{3j} = M_{512}^{3j} = M_{513}^{3j} = 0 \quad (\text{B.202})$$

$$M_{514}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \quad (\text{B.203})$$

$$M_{515}^{3j} = 0 \quad (\text{B.204})$$

$$M_{516}^{3j} = -\frac{1}{12} m_3 l_3^2 \quad (\text{B.205})$$

$$M_{517}^{3j} = M_{518}^{3j} = M_{519}^{3j} = 0 \quad (\text{B.206})$$

$$M_{520}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \quad (\text{B.207})$$

$$M_{521}^{3j} = 0 \quad (\text{B.208})$$

$$M_{522}^{3j} = \frac{1}{12} m_3 l_3^2 \quad (\text{B.209})$$

$$M_{523}^{3j} = 0 \quad (\text{B.210})$$

$$M_{66}^{3j} = m_3 l_3 \quad (\text{B.211})$$

$$\begin{aligned}
M_{67}^{3j} = & -(L_2 + q_{6n_2+1})m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 - q_{6n_2+2}m_3 l_3 \text{cos}\theta'_2 - m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2}(q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \text{sen}\theta'_{23} - m_3 l_3 \left[\frac{1}{2}q_{6j-4} + \frac{l_3}{12}q_{6j} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2}q_{6j+2} - \frac{l_3}{12}q_{6j+6} \right] \text{cos}\theta'_{23} \quad (\text{B.212})
\end{aligned}$$

$$M_{68}^{3j} = m_3 l_3 \text{cos}\theta'_2 \quad (\text{B.213})$$

$$M_{69}^{3j} = -m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 \quad (\text{B.214})$$

$$M_{610}^{3j} = 0 \quad (\text{B.215})$$

$$\begin{aligned}
M_{611}^{3j} = & -m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-6} + q_{6j+1}) \right] \text{sen}\theta'_{23} - \\
& - m_3 l_3 \left[\frac{1}{2}q_{6j-4} + \frac{l_3}{12}q_{6j} + \frac{1}{2}q_{6j+2} - \frac{l_3}{12}q_{6j+6} \right] \text{cos}\theta'_{23} \quad (\text{B.216})
\end{aligned}$$

$$M_{612}^{3j} = \frac{1}{2}m_3 l_3 \text{cos}\theta'_{23} \quad (\text{B.217})$$

$$M_{613}^{3j} = \frac{1}{2}m_3 l_3 \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{B.218})$$

$$M_{614}^{3j} = M_{615}^{3j} = M_{616}^{3j} = 0 \quad (\text{B.219})$$

$$M_{617}^{3j} = -\frac{1}{12}m_3 l_3 \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{B.220})$$

$$M_{618}^{3j} = \frac{1}{2}m_3 l_3 \text{cos}\theta'_{23} \quad (\text{B.221})$$

$$M_{619}^{3j} = \frac{1}{2}m_3 l_3 \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{B.222})$$

$$M_{620}^{3j} = M_{621}^{3j} = M_{622}^{3j} = 0 \quad (\text{B.223})$$

$$M_{623}^{3j} = \frac{1}{12}m_3 l_3 \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{B.224})$$

$$M_{77}^{3j} = M_{22}^{3j} \quad (\text{B.225})$$

$$M_{78}^{3j} = M_{28}^{3j} \quad (\text{B.226})$$

$$M_{79}^{3j} = M_{29}^{3j} \quad (\text{B.227})$$

$$M_{710}^{3j} = M_{210}^{3j} \quad (\text{B.228})$$

$$M_{711}^{3j} = M_{211}^{3j} \quad (\text{B.229})$$

$$M_{712}^{3j} = M_{212}^{3j} \quad (\text{B.230})$$

$$M_{713}^{3j} = M_{213}^{3j} \quad (\text{B.231})$$

$$M_{714}^{3j} = M_{214}^{3j} \quad (\text{B.232})$$

$$M_{715}^{3j} = M_{215}^{3j} \quad (\text{B.233})$$

$$M_{716}^{3j} = M_{216}^{3j} \quad (\text{B.234})$$

$$M_{717}^{3j} = M_{217}^{3j} \quad (\text{B.235})$$

$$M_{718}^{3j} = M_{218}^{3j} \quad (\text{B.236})$$

$$M_{719}^{3j} = M_{219}^{3j} \quad (\text{B.237})$$

$$M_{720}^{3j} = M_{220}^{3j} \quad (\text{B.238})$$

$$M_{721}^{3j} = M_{221}^{3j} \quad (\text{B.239})$$

$$M_{722}^{3j} = M_{222}^{3j} \quad (\text{B.240})$$

$$M_{723}^{3j} = M_{223}^{3j} \quad (\text{B.241})$$

$$M_{88}^{3j} = m_3 l_3 \quad (\text{B.242})$$

$$M_{89}^{3j} = M_{810}^{3j} = 0 \quad (\text{B.243})$$

$$\begin{aligned} M_{811}^{3j} = & m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \text{sen}\theta'_3 - \\ & - m_3 l_3 \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \text{cos}\theta'_3 \end{aligned} \quad (\text{B.244})$$

$$M_{812}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 \quad (\text{B.245})$$

$$M_{813}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 \quad (\text{B.246})$$

$$M_{814}^{3j} = M_{815}^{3j} = M_{816}^{3j} = 0 \quad (\text{B.247})$$

$$M_{817}^{3j} = \frac{1}{12} m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 \quad (\text{B.248})$$

$$M_{818}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 \quad (\text{B.249})$$

$$M_{819}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 \quad (\text{B.250})$$

$$M_{820}^{3j} = M_{821}^{3j} = M_{822}^{3j} = 0 \quad (\text{B.251})$$

$$M_{823}^{3j} = -\frac{1}{12} m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 \quad (\text{B.252})$$

$$M_{99}^{3j} = m_3 l_3 \quad (\text{B.253})$$

$$M_{910}^{3j} = 0 \quad (\text{B.254})$$

$$\begin{aligned} M_{911}^{3j} = & m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \text{cos}\theta'_3 + \\ & + m_3 l_3 \left[-\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{l_3}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{l_3}{12} q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_3 \end{aligned} \quad (\text{B.255})$$

$$M_{912}^{3j} = -\frac{1}{2} m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 \quad (\text{B.256})$$

$$M_{913}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 \quad (\text{B.257})$$

$$M_{914}^{3j} = M_{915}^{3j} = M_{916}^{3j} = 0 \quad (\text{B.258})$$

$$M_{917}^{3j} = \frac{1}{12} m_3 l_3^2 \text{cos}\theta'_3 \quad (\text{B.259})$$

$$M_{918}^{3j} = -\frac{1}{2} m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 \quad (\text{B.260})$$

$$M_{919}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 \quad (\text{B.261})$$

$$M_{920}^{3j} = M_{921}^{3j} = M_{922}^{3j} = 0 \quad (\text{B.262})$$

$$M_{923}^{3j} = -\frac{1}{12} m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 \quad (\text{B.263})$$

$$M_{1010}^{3j} = m_3 l_3 \quad (\text{B.264})$$

$$M_{1011}^{3j} = M_{1012}^{3j} = M_{1013}^{3j} = 0 \quad (\text{B.265})$$

$$M_{1014}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \quad (\text{B.266})$$

$$M_{1015}^{3j} = 0 \quad (\text{B.267})$$

$$M_{1016}^{3j} = -\frac{1}{12} m_3 l_3^2 \quad (\text{B.268})$$

$$M_{1017}^{3j} = M_{1018}^{3j} = M_{1019}^{3j} = 0 \quad (\text{B.269})$$

$$M_{1020}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 l_3 \quad (\text{B.270})$$

$$M_{1021}^{3j} = 0 \quad (\text{B.271})$$

$$M_{1022}^{3j} = \frac{1}{12} m_3 l_3^2 \quad (\text{B.272})$$

$$M_{1023}^{3j} = 0 \quad (\text{B.273})$$

$$M_{1111}^{3j} = M_{33}^{3j} \quad (\text{B.274})$$

$$M_{1112}^{3j} = M_{312}^{3j} \quad (\text{B.275})$$

$$M_{1113}^{3j} = M_{313}^{3j} \quad (\text{B.276})$$

$$M_{1114}^{3j} = M_{314}^{3j} \quad (\text{B.277})$$

$$M_{1115}^{3j} = M_{315}^{3j} \quad (\text{B.278})$$

$$M_{1116}^{3j} = M_{316}^{3j} \quad (\text{B.279})$$

$$M_{1117}^{3j} = M_{317}^{3j} \quad (\text{B.280})$$

$$M_{1118}^{3j} = M_{318}^{3j} \quad (\text{B.281})$$

$$M_{1119}^{3j} = M_{319}^{3j} \quad (\text{B.282})$$

$$M_{1120}^{3j} = M_{320}^{3j} \quad (\text{B.283})$$

$$M_{1121}^{3j} = M_{321}^{3j} \quad (\text{B.284})$$

$$M_{1122}^{3j} = M_{322}^{3j} \quad (\text{B.285})$$

$$M_{1123}^{3j} = M_{323}^{3j} \quad (\text{B.286})$$

APENDICE C

MATRIZ DE RIGIDEZ $[K_{ij}^e]$

$$[K_{ij}^e] = \begin{bmatrix} K_{11}^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{17}^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & K_{22}^{ij} & 0 & 0 & 0 & K_{26}^{ij} & 0 & K_{28}^{ij} & 0 & 0 & 0 & K_{212}^{ij} \\ & & K_{33}^{ij} & 0 & K_{35}^{ij} & 0 & 0 & 0 & K_{39}^{ij} & 0 & K_{311}^{ij} & 0 \\ & & & K_{44}^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{410}^{ij} & 0 & 0 \\ & & & & K_{55}^{ij} & 0 & 0 & 0 & K_{59}^{ij} & 0 & K_{511}^{ij} & 0 \\ & & & & & K_{66}^{ij} & 0 & K_{68}^{ij} & 0 & 0 & 0 & K_{612}^{ij} \\ & & & & & & K_{77}^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & K_{88}^{ij} & 0 & 0 & 0 & K_{812}^{ij} \\ & & & & & & & & K_{99}^{ij} & 0 & K_{911}^{ij} & 0 \\ & & & & & & & & & K_{1010}^{ij} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & K_{1111}^{ij} & 0 \\ & & & & & & & & & & & K_{1212}^{ij} \end{bmatrix}$$

onde

$$K_{11}^{ij} = \frac{E A}{\ell_i} \quad (C.1)$$

$$K_{17}^{ij} = -\frac{E A}{\ell_i} \quad (C.2)$$

$$K_{22}^{ij} = \frac{12 E I_z}{(1+\phi_y)\ell_i^3} \quad (C.3)$$

$$K_{26}^{ij} = \frac{6 E I_z}{(1+\phi_y)\ell_i^2} \quad (C.4)$$

$$K_{28}^{ij} = -\frac{12 E I_z}{(1+\phi_y)\ell_i^3} \quad (C.5)$$

$$K_{212}^{ij} = \frac{6 E I_z}{(1+\phi_y) \ell_i^2} \quad (\text{C.6})$$

$$K_{33}^{ij} = \frac{12 E I_y}{(1+\phi_z) \ell_i^3} \quad (\text{C.7})$$

$$K_{35}^{ij} = - \frac{6 E I_y}{(1+\phi_z) \ell_i^2} \quad (\text{C.8})$$

$$K_{39}^{ij} = - \frac{12 E I_y}{(1+\phi_z) \ell_i^3} \quad (\text{C.9})$$

$$K_{311}^{ij} = - \frac{6 E I_y}{(1+\phi_z) \ell_i^2} \quad (\text{C.10})$$

$$K_{44}^{ij} = \frac{G K_t}{\ell_i} \quad (\text{C.11})$$

$$K_{410}^{ij} = - \frac{G K_t}{\ell_i} \quad (\text{C.12})$$

$$K_{55}^{ij} = \frac{E I_y (4+\phi_z)}{(1+\phi_z) \ell_i} \quad (\text{C.13})$$

$$K_{59}^{ij} = \frac{6 E I_y}{(1+\phi_z) \ell_i^2} \quad (\text{C.14})$$

$$K_{511}^{ij} = \frac{E I_y (2-\phi_z)}{(1+\phi_z) \ell_i} \quad (\text{C.15})$$

$$K_{66}^{ij} = \frac{E I_z (4+\phi_y)}{(1+\phi_y) \ell_i} \quad (\text{C.16})$$

$$K_{68}^{ij} = - \frac{6 E I_z}{(1+\phi_y) \ell_i^2} \quad (\text{C.17})$$

$$K_{612}^{ij} = \frac{E I_z (2-\phi_y)}{(1+\phi_y) \ell_i} \quad (\text{C.18})$$

$$K_{77}^{ij} = \frac{E A}{\ell_i} \quad (\text{C.19})$$

$$K_{88}^{ij} = \frac{12 E I_z}{(1+\phi_y)\ell_i^3} \quad (\text{C.20})$$

$$K_{812}^{ij} = -\frac{6 E I_z}{(1+\phi_y)\ell_i^2} \quad (\text{C.21})$$

$$K_{99}^{ij} = \frac{12 E I_y}{(1+\phi_z)\ell_i^3} \quad (\text{C.22})$$

$$K_{911}^{ij} = \frac{6 E I_y}{(1+\phi_z)\ell_i^2} \quad (\text{C.23})$$

$$K_{1010}^{ij} = \frac{G K_t}{\ell_i} \quad (\text{C.24})$$

$$K_{1111}^{ij} = \frac{E I_y (4+\phi_z)}{(1+\phi_z)\ell_i} \quad (\text{C.25})$$

$$K_{1212}^{ij} = \frac{E I_z (4+\phi_y)}{(1+\phi_y)\ell_i} \quad (\text{C.26})$$

APENDICE D

$$\begin{aligned}
 \left[G_{1j}^e \right] &= \begin{bmatrix} 0 \\ G_2^{1j} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_8^{1j} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \left[G_{2j}^e \right] &= \begin{bmatrix} 0 \\ G_2^{2j} \\ G_3^{2j} \\ 0 \\ 0 \\ G_6^{2j} \\ G_7^{2j} \\ G_8^{2j} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_2^{2j} \\ G_{12}^{2j} \\ G_{13}^{2j} \\ G_{14}^{2j} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_{18}^{2j} \end{bmatrix} & \left[G_{3j}^e \right] &= \begin{bmatrix} 0 \\ G_2^{3j} \\ G_3^{3j} \\ G_4^{3j} \\ 0 \\ 0 \\ G_7^{3j} \\ G_8^{3j} \\ G_9^{3j} \\ 0 \\ 0 \\ G_{11}^{3j} \\ G_{12}^{3j} \\ G_{13}^{3j} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_3^{3j} \\ G_{17}^{3j} \\ G_{18}^{3j} \\ G_{19}^{3j} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_{23}^{3j} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

onde

$$G_2^{1j} = \frac{1}{2} m_1 \ell_1 g \quad (D.1)$$

$$G_2^{1j} = \frac{1}{2} m_1 \ell_1 g \quad (D.2)$$

$$\begin{aligned}
 G_2^{2j} = m_2 \ell_2 g \left\{ (j-1) \ell_2 \cos \theta_2' + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \cos \theta_2' - \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\ell^2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell^2}{12} q_{6j+6} \right] \text{sen} \theta_2' \right\} \quad (D.3)
 \end{aligned}$$

$$G_3^{2j} = m_2 \ell_2 g \quad (D.4)$$

$$G_6^{2j} = m_2 \ell_2 g \left\{ (j-1) \ell_2 \cos \theta_2' + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \cos \theta_2' - \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \right. \right.$$

$$+ \left. \left[\frac{\ell^2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell^2}{12} q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_2 \right\} \quad (\text{D.5})$$

$$G_7^{2j} = \frac{1}{2} m_2 \ell_2 g \text{sen}\theta'_2 \quad (\text{D.6})$$

$$G_8^{2j} = \frac{1}{2} m_2 \ell_2 g \cos\theta'_2 \quad (\text{D.7})$$

$$G_{12}^{2j} = \frac{1}{12} m_2 \ell_2 g \cos\theta'_2 \quad (\text{D.8})$$

$$G_{13}^{2j} = \frac{1}{2} m_2 \ell_2 g \text{sen}\theta'_2 \quad (\text{D.9})$$

$$G_{14}^{2j} = \frac{1}{2} m_2 \ell_2 g \cos\theta'_2 \quad (\text{D.10})$$

$$G_{18}^{2j} = -\frac{1}{12} m_2 \ell_2 g \cos\theta'_2 \quad (\text{D.11})$$

$$G_2^{3j} = m_3 \ell_3 g (L_2 + q_{6n_2+1}) \cos\theta'_2 - q_{6n_2+2} m_3 \ell_3 g \text{sen}\theta'_2 + m_3 \ell_3 g \left[(j - \frac{1}{2}) \ell_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos\theta'_{23} - m_3 \ell_3 g \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{\ell^2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell^2}{12} q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{D.12})$$

$$G_3^{3j} = m_3 \ell_3 g \left[(j - \frac{1}{2}) \ell_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos\theta'_{23} - m_3 \ell_2 g \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{\ell^2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell^2}{12} q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{D.13})$$

$$G_4^{3j} = m_3 \ell_3 g \quad (\text{D.14})$$

$$G_7^{3j} = m_3 \ell_3 g (L_2 + q_{6n_2+1}) \cos\theta'_2 - q_{6n_2+2} m_3 \ell_3 g \text{sen}\theta'_2 + m_3 \ell_3 g \left[(j - \frac{1}{2}) \ell_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos\theta'_{23} - m_3 \ell_3 g \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{\ell^2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell^2}{12} q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{D.15})$$

$$G_8^{3j} = m_3 \ell_3 g \text{sen}\theta'_2 \quad (\text{D.16})$$

$$G_9^{3j} = m_3 \ell_3 g \cos\theta'_2 \quad (\text{D.17})$$

$$G_{11}^{3j} = m_3 \ell_3 g \left[(j - \frac{1}{2}) \ell_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5} + q_{6j+1}) \right] \cos\theta'_{23} - m_3 \ell_3 g \left[\frac{1}{2} q_{6j-4} + \frac{\ell^2}{12} q_{6j} + \frac{1}{2} q_{6j+2} - \frac{\ell^2}{12} q_{6j+6} \right] \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{D.13})$$

$$G_{12}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 \ell_3 g \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{D.14})$$

$$G_{13}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 \ell_3 g \cos\theta'_{23} \quad (\text{D.15})$$

$$G_{17}^{3j} = \frac{1}{12} m_3 \ell_3^2 g \cos\theta'_{23} \quad (\text{D.16})$$

$$G_{18}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 \ell_3 g \operatorname{sen} \theta'_{23} \quad (\text{D.17})$$

$$G_{19}^{3j} = \frac{1}{2} m_3 \ell_3 g \cos \theta'_{23} \quad (\text{D.18})$$

$$G_{23}^{3j} = -\frac{1}{12} m_3 \ell_3^2 g \cos \theta'_{23} \quad (\text{D.20})$$

APÉNDICE E

MATRIZ GIROSCÓPICA $[G_{ij}^e]$

$$G_{11}^{1j} = G_{12}^{1j} = 0 \quad (E.1)$$

$$G_{13}^{1j} = \frac{m_i I_i}{(1+\phi)^2} \left\{ \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j-4}^1 + 2I_i \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j}^1 + \right. \\ \left. 2 \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) q_{6j+2}^1 - 2I_i \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+6}^1 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.2)$$

$$G_{14}^{1j} = \frac{m_i I_i}{(1+\phi)^2} \left\{ \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j-3}^1 - 2I_i \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1}^1 + \right. \\ \left. 2 \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) q_{6j+2}^1 + 2I_i \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+6}^1 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.3)$$

$$G_{15}^{1j} = \frac{1}{3} \rho \left(I_z + I_y \right) I_i q_{6j-2}^1 + \frac{1}{3} \rho \left(I_z + I_y \right) I_i q_{6j+4}^1 \quad (E.4)$$

$$G_{16}^{1j} = -2 \frac{m_i I_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-3}^1 + \frac{m_i I_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1}^1 - \\ -2 \frac{m_i I_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+3}^1 - 2 \frac{m_i I_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+5}^1 \quad (E.5)$$

$$G_{17}^{1j} = \frac{m_i I_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-4}^1 + \frac{m_i I_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j}^1 - \\ -2 \frac{m_i I_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+2}^1 - 2 \frac{m_i I_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+6}^1 \quad (E.6)$$

$$G_{18}^{1j} = 0 \quad (\text{E.7})$$

$$G_{19}^{1j} = \frac{m_i l_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) q_{6j-4}^1 + 2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j}^1 +$$

$$+ \frac{m_i l_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j+2}^1 - 2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+6}^1 \quad (\text{E.8})$$

$$G_{110}^{1j} = - \frac{m_i l_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{54 + 126\phi + 70\phi^2}{420} \right) q_{6j-3}^1 - \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1}^1 +$$

$$0.5 \frac{m_i l_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{156 + 294\phi + 140\phi^2}{420} \right) q_{6j+3}^1 + \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+5}^1 \quad (\text{E.9})$$

$$G_{111}^{1j} = \frac{1}{3} \rho \left(I_z + I_y \right) l_i q_{6j-2}^1 + \frac{1}{3} \rho \left(I_z + I_y \right) l_i q_{6j+4}^1 \quad (\text{E.10})$$

$$G_{112}^{1j} = 2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-3}^1 - 2 \frac{m_i l_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-1}^1 +$$

$$+ 2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+3}^1 + \frac{m_i l_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+5}^1 \quad (\text{E.11})$$

$$G_{113}^{1j} = -2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j-4}^1 - 2 \frac{m_i l_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{3 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j}^1 -$$

$$- 2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+2}^1 + \frac{m_i l_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{4 + 7\phi + 3,5\phi^2}{420} \right) q_{6j+6}^1 \quad (\text{E.12})$$

$$G_{2k}^{1j} = 0 \quad p/k = 1, \dots, 13 \quad (\text{E.13})$$

$$G_{31}^{1j} = -0.5 G_{13}^{1j} \quad (\text{E.14})$$

$$G_{31}^{1j} = G_{32}^{1j} = G_{33}^{1j} = 0 \quad (\text{E.15})$$

$$G_{34}^{1j} = -2 \frac{m_i l_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13}{35} + \frac{7}{10} \phi + \frac{1}{3} \phi^2 \right) \quad (\text{E.16})$$

$$G_{35}^{1j} = 0 \quad (\text{E.17})$$

$$G_{36}^{1j} = -2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.13})$$

$$G_{37}^{1j} = G_{38}^{1j} = G_{39}^{1j} = 0 \quad (\text{E.14})$$

$$G_{310}^{1j} = -2 \frac{m_i l_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{9}{70} + \frac{3}{10} \phi + \frac{1}{6} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.15})$$

$$G_{311}^{1j} = 0 \quad (\text{E.16})$$

$$G_{312}^{1j} = 2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.17})$$

$$G_{313}^{1j} = 0 \quad (\text{E.18})$$

$$G_{41}^{1j} = -0.5 G_{14}^{1j} \quad (\text{E.19})$$

$$G_{42}^{1j} = 0 \quad (\text{E.20})$$

$$G_{43}^{1j} = -G_{34}^{1j} \quad (\text{E.21})$$

$$G_{44}^{1j} = G_{45}^{1j} = G_{46}^{1j} = 0 \quad (\text{E.22})$$

$$G_{47}^{1j} = 2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.23})$$

$$G_{48}^{1j} = 0 \quad (\text{E.24})$$

$$G_{49}^{1j} = 2 \frac{m_i l_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{9}{70} + \frac{3}{10} \phi + \frac{1}{6} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.25})$$

$$G_{410}^{1j} = G_{411}^{1j} = G_{412}^{1j} = 0 \quad (\text{E.26})$$

$$G_{413}^{1j} = -2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.27})$$

$$G_{51}^{1j} = -0.5 G_{15}^{1j} \quad (\text{E.28})$$

$$G_{5k}^{1j} = 0 \quad p/k = 2, \dots, 13 \quad (\text{E.29})$$

$$G_{61}^{1j} = -0.5 G_{16}^{1j} \quad (\text{E.30})$$

$$G_{62}^{1j} = 0 \quad (\text{E.31})$$

$$G_{63}^{1j} = -G_{36}^{1j} \quad (\text{E.32})$$

$$G_{64}^{1j} = G_{65}^{1j} = G_{66}^{1j} = 0 \quad (\text{E.33})$$

$$G_{67}^{1j} = -2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60} \phi + \frac{1}{120} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.34})$$

$$G_{68}^{1j} = 0 \quad (\text{E.35})$$

$$G_{69}^{1j} = -2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.36})$$

$$G_{610}^{1j} = G_{611}^{1j} = G_{612}^{1j} = 0 \quad (\text{E.37})$$

$$G_{613}^{1j} = 2 \frac{m_i l_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{140} + \frac{1}{60} \phi + \frac{1}{120} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.38})$$

$$G_{71}^{1j} = -0.5 G_{17}^{1j} \quad (\text{E.39})$$

$$G_{72}^{1j} = G_{73}^{1j} = 0 \quad (\text{E.40})$$

$$G_{74}^{1j} = -G_{47}^{1j} \quad (\text{E.41})$$

$$G_{75}^{1j} = 0 \quad (\text{E.42})$$

$$G_{76}^{1j} = - G_{67}^{1j} \quad (\text{E.43})$$

$$G_{77}^{1j} = G_{78}^{1j} = G_{79}^{1j} = 0 \quad (\text{E.44})$$

$$G_{710}^{1j} = - 2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13}{40} + \frac{3}{40} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.45})$$

$$G_{711}^{1j} = 0 \quad (\text{E.46})$$

$$G_{712}^{1j} = - 2 \frac{m_i l_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{140} + \frac{1}{60} \phi + \frac{1}{120} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.47})$$

$$G_{713}^{1j} = 0 \quad (\text{E.48})$$

$$G_{91}^{1j} = - 0.5 G_{19}^{1j} \quad (\text{E.49})$$

$$G_{92}^{1j} = G_{93}^{1j} = 0 \quad (\text{E.50})$$

$$G_{94}^{1j} = - G_{49}^{1j} \quad (\text{E.51})$$

$$G_{95}^{1j} = 0 \quad (\text{E.52})$$

$$G_{96}^{1j} = - G_{69}^{1j} \quad (\text{E.53})$$

$$G_{97}^{1j} = G_{98}^{1j} = G_{99}^{1j} = 0 \quad (\text{E.54})$$

$$G_{910}^{1j} = - 2 \frac{m_i l_i}{(1+\phi)^2} \left(\frac{13}{35} + \frac{7}{10} \phi + \frac{1}{3} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.55})$$

$$G_{911}^{1j} = 0 \quad (\text{E.56})$$

$$G_{912}^{1j} = - 2 \frac{m_i l_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.57})$$

$$G_{913}^{1j} = 0 \quad (\text{E.58})$$

$$G_{101}^{1j} = - 0.5 G_{110}^{1j} \quad (\text{E.59})$$

$$G_{102}^{1j} = 0 \quad (\text{E.60})$$

$$G_{103}^{1j} = -G_{310}^{1j} \quad (\text{E.61})$$

$$G_{104}^{1j} = G_{105}^{1j} = G_{106}^{1j} = 0 \quad (\text{E.62})$$

$$G_{107}^{1j} = -G_{710}^{1j} \quad (\text{E.63})$$

$$G_{108}^{1j} = 0 \quad (\text{E.64})$$

$$G_{109}^{1j} = -G_{910}^{1j} \quad (\text{E.65})$$

$$G_{1010}^{1j} = G_{1011}^{1j} = G_{1012}^{1j} = 0 \quad (\text{E.66})$$

$$G_{1013}^{1j} = 2 \frac{m_i I_i^2}{(1+\phi)^2} \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120} \phi + \frac{1}{24} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.67})$$

$$G_{111}^{1j} = -0.5 G_{111}^{1j} \quad (\text{E.68})$$

$$G_{11k}^{1j} = 0 \quad p/k = 2, \dots, 13 \quad (\text{E.69})$$

$$G_{121}^{1j} = -0.5 G_{112}^{1j} \quad (\text{E.70})$$

$$G_{122}^{1j} = 0 \quad (\text{E.71})$$

$$G_{123}^{1j} = -G_{312}^{1j} \quad (\text{E.72})$$

$$G_{124}^{1j} = G_{125}^{1j} = G_{126}^{1j} = 0 \quad (\text{E.73})$$

$$G_{127}^{1j} = -G_{712}^{1j} \quad (\text{E.74})$$

$$G_{128}^{1j} = 0 \quad (\text{E.75})$$

$$G_{129}^{1j} = -G_{912}^{1j} \quad (\text{E.76})$$

$$G_{1210}^{1j} = G_{1211}^{1j} = G_{1212}^{1j} = 0 \quad (\text{E.77})$$

$$G_{1213}^{1j} = -2 \frac{m_i I_i^3}{(1+\phi)^2} \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60} \phi + \frac{1}{120} \phi^2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.78})$$

$$G_{131}^{1j} = -0.5 G_{113}^{1j} \quad (\text{E.79})$$

$$G_{132}^{1j} = G_{133}^{1j} = 0 \quad (\text{E.80})$$

$$G_{134}^{1j} = -G_{413}^{1j} \quad (\text{E.81})$$

$$G_{135}^{1j} = 0 \quad (\text{E.82})$$

$$G_{136}^{1j} = -G_{613}^{1j} \quad (\text{E.83})$$

$$G_{137}^{1j} = G_{138}^{1j} = G_{139}^{1j} = 0 \quad (\text{E.84})$$

$$G_{1310}^{1j} = -G_{1013}^{1j} \quad (\text{E.85})$$

$$G_{1311}^{1j} = 0 \quad (\text{E.86})$$

$$G_{1312}^{1j} = -G_{1213}^{1j} \quad (\text{E.87})$$

$$G_{1313}^{1j} = 0 \quad (\text{E.88})$$

MATRIZ GIROSCÓPICA [G_{2j}^e]

$$\begin{aligned}
G_{12}^{2j} = & \left\{ -2(j-1)^2 m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 \cos\theta'_2 - 2(j-1) m_2 l_2^2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \text{sen}\theta'_2 \cos\theta'_2 - \right. \\
& - 2A_1 \text{sen}\theta'_2 \cos\theta'_2 + 2A_2 \text{sen}\theta'_2 \cos\theta'_2 - 2(j-1) q_3^1 m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 - q_3^1 m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + \\
& + q_{6j+1}^2) \text{sen}\theta'_2 - 2(j-1) m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \cos 2\theta'_2 \left. \right\} \dot{\theta}_1 + \\
& + \left\{ - (q_2^1 + L_{y1}) (j-1) m_2 l_2^2 \cos\theta'_2 - \frac{1}{2} q_2^1 m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \cos\theta'_2 + q_2^1 m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} \right. \right. \\
& q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \left. \right) \text{sen}\theta'_2 - (j-1) m_2 l_2^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j-1}^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} q_{6j+3}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+5}^2 \left. \right) \cos\theta'_2 - \frac{1}{2} A_5 \cos\theta'_2 + \frac{1}{2} A_6 \text{sen}\theta'_2 \left. \right\} \dot{\theta}_2 + 2 \left\{ - (q_2^1 + L_{y1}) (j- \right. \\
& - 1) m_2 l_2^2 \cos\theta'_2 - \frac{1}{2} q_2^1 m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \cos\theta'_2 + q_2^1 m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \left. \right) \text{sen}\theta'_2 - (j-1) m_2 l_2^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j-1}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^2 - \right. \\
& - \frac{l_2}{12} q_{6j+5}^2 \left. \right) \cos\theta'_2 - \frac{1}{2} A_5 \cos\theta'_2 + \frac{1}{2} A_6 \text{sen}\theta'_2 \left. \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ - q_2^1 m_2 l_2 \text{sen}\theta'_2 - \left[\frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \right. \right. \right. \\
& + \frac{1}{3} \phi \left. \right) q_{6j-3}^2 + \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-1}^2 + \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+3}^2 + \\
& + \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+5}^2 \left. \right\} \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{2} q_2^1 m_2 l_2 \text{sen}\theta'_2 - \left[\frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-3}^2 + \right. \\
& + \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-1}^2 + \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+5}^2 + \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \right. \\
& + \frac{1}{24} \phi \left. \right) q_{6j+5}^2 \left. \right\} \text{sen}\theta'_2 \left. \right\} \dot{q}_{6j-5} + \left\{ - (q_2^1 + L_{y1}) m_2 l_2 \frac{1}{2} \cos\theta'_2 - 2 \left[\frac{m_2 l_2}{420(1+\phi)^2} (156 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 294 \phi + 140 \phi^2) q_{6j-3}^2 + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j-1}^2 + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (54 + \\
& + 126 \phi + 70 \phi^2) q_{6j+3}^2 + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j+5}^2 \left. \right] \cos \theta'_2 \dot{q}_{6j-4} - \\
& - \left\{ -\frac{1}{2}(j-1)m_2 I_2^2 \text{sen} \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-2}^2 + 2 \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+1}^2 + \right. \right. \\
& + 2 \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5}^2 - \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+4}^2 \left. \right] \text{sen} \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (I_2 (22 + \right. \\
& + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j}^2 + 2(54 + 126 \phi + 70 \phi^2) q_{6j+2}^2 + 2I_2^2 (-13 - 31,5 \phi - \\
& - 17,5 \phi^2) q_{6j+6}^2 + \frac{1}{2} (156 + 294 \phi + 140 \phi^2) q_{6j-4}^2 \left. \right] \cos \theta'_2 + \frac{1}{2} (j-1)m_2 I_2^2 \text{sen} \theta'_2 + \\
& + \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left((156 + 294 \phi + \right. \\
& + 140 \phi^2) q_{6j-4}^2 + (22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j}^2 I_2 + (54 + 126 \phi + 70 \phi^2) q_{6j+2}^2 + \\
& + (-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \left. \right) \cos \theta'_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} (q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \text{sen} \theta'_2 \left. \right] \dot{q}_{6j-3}^2 + \\
& + \left\{ \frac{1}{12} (j-1)m_2 I_2^3 \text{sen} \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{2m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5}^2 + 2 \frac{\rho I_y I_2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{12} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2}^2 + \frac{2m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1}^2 + 2 \frac{\rho I_y I_2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+4}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j-4}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^3}{420(1+\phi)^2} (-4 - 7 \phi - \right. \\
& - 3,5 \phi^2) q_{6j}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j+2}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^3}{420(1+\phi)^2} (3 + 7 \phi + \\
& + 3,5 \phi^2) q_{6j+6}^2 \left. \right] \cos \theta'_2 - \frac{1}{12} (j-1) m_2 l_2^3 \text{sen} \theta'_2 + \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 + \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j-4}^2 + \right. \\
& + I_2 (-4 - 7 \phi - 3,5 \phi^2) q_{6j}^2 + (-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j+2}^2 + I_2 (-22 - \\
& - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j+6}^2 \left. \right] \text{sen} \theta'_2 - \frac{\rho I_y l_2}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2}^2 + \left(\frac{1}{12} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+4}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 + \left\{ - (q_2^1 + L_{y1}) \frac{1}{12} m_2 l_2 q_{6j}^2 \cos \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (22 + \right. \right. \\
& + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j-3}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^3}{420(1+\phi)^2} (-4 - 7 \phi - 3,5 \phi^2) q_{6j-1}^2 + \\
& + 2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j+3}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^3}{420(1+\phi)^2} (3 + 7 \phi + \\
& + 3,5 \phi^2) q_{6j+5}^2 \left. \right] \cos \theta'_2 \left. \right\} q_{6j}^2 + \left\{ - (q_2^1 + L_{y1}) \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{sen} \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{30} - \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-3}^2 + 2 \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-1}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} - \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+3}^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+5}^2 \Big] \cos \theta'_2 - (q_2^1 + L_{y1}) \frac{1}{2} m_2 I_2 \text{sen} \theta'_2 - \\
& - \frac{m_2 I_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-3}^2 + \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) I_2 q_{6j-1}^2 + \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+3}^2 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) I_2 q_{6j-3}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 \Big] \dot{q}_{6j+1}^2 + \left\{ - (q_2^1 + L_{y1}) \frac{1}{2} m_2 I_2 \cos \theta'_2 - \right. \\
& - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (-13 - 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j-1}^2 + 2 \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} (156 + 294 \phi + \right. \\
& + 140 \phi^2) q_{6j+3}^2 + 2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (13 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j+5}^2 + 2 \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} (54 + \\
& + 126 \phi + 70 \phi^2) q_{6j-3}^2 \Big] \cos \theta'_2 - (q_2^1 + L_{y1}) \frac{1}{2} m_2 I_2 \cos \theta'_2 - \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(54 + \right. \\
& + 126 \phi + 70 \phi^2) q_{6j-3}^2 + (-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) I_2 q_{6j-1}^2 + (156 + \\
& + 294 \phi + 140 \phi^2) q_{6j-1}^2 + (22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) I_2 q_{6j+5}^2 \Big] \cos \theta'_2 \Big] \dot{q}_{6j+1}^2 + \\
& + \left\{ -\frac{1}{2} (j-1) m_2 I_2^2 \text{sen} \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 I_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-2}^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left. 2 \frac{m_2 I_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1}^2 + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+4}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (54 + \right. \right. \\
& + 126 \phi + 70 \phi^2) q_{6j-4}^2 + 2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j}^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} (156 + 294 \phi + 140 \phi^2) q_{6j+2}^2 + 2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (22 + 38,5 \phi + \\
& + 17,5 \phi^2) q_{6j+6}^2 \left] \cos \theta'_2 + \frac{1}{2} (j-1) m_2 I_2^2 \text{sen} \theta'_2 + \frac{m_2 I_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 + \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} (54 + 126 \phi + 70 \phi^2) q_{6j-4}^2 + (13 + \\
& + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 + (156 + 294 \phi + 140 \phi^2) q_{6j+2}^2 - (22 + 38,5 \phi + \\
& + 17,5 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \left] \cos \theta'_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} (q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \text{sen} \theta'_2 \right\} q_{6j+3}^2 + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{12} (j- \right. \\
& - 1) m_2 I_2^3 \text{sen} \theta'_2 - \left[\frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5}^2 + 2 \frac{\rho I_y I_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-2}^2 + \right. \right. \\
& + 2 \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1}^2 - 2 \frac{\rho I_y I_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+4}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 - \\
& - \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j-4}^2 + 2 \frac{m_2 I_2^3}{420(1+\phi)^2} (3 + 7 \phi + 3,5 \phi^2) q_{6j}^2 + \right. \\
& + 2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j+2}^2 + 2 \frac{m_2 I_2^3}{420(1+\phi)^2} (-4 - 7 \phi - \\
& - 3,5 \phi^2) q_{6j+6}^2 \left] \cos \theta'_2 + \frac{1}{12} (j-1) m_2 I_2^3 \text{sen} \theta'_2 - \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \left(\frac{1}{20} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j-4}^2 + (3 + 7 \phi + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3,5 \phi^2) l_2 q_{6j}^2 + \left(22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2 \right) q_{6j+2}^2 + \left(4 + 7 \phi + 3,5 \phi^2 \right) l_2 q_{6j}^2 \Big] \cos \theta'_2 - \\
& - \frac{\rho I_y l_2}{(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-2}^2 - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+4}^2 \right] \sin \theta'_2 \Big\} \dot{q}_{6j+5}^2 + \left\{ -\frac{1}{12} (q_{6n1+2}^1 + \right. \\
& + L_{y1}) m_2 l_2^2 \cos \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)} (-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j-3}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^3}{420(1+\phi)^2} (3 + \right. \\
& + 7 \phi + 3,5 \phi^2) q_{6j-1}^2 - 2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (22 + 38,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j+3}^2 - \\
& - 2 \frac{m_2 l_2^3}{420(1+\phi)^2} (4 + 7 \phi + 3,5 \phi^2) q_{6j+5}^2 \Big] \cos \theta'_2 + \frac{1}{12} (q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 l_2^2 \cos \theta'_2 - \\
& - \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(-13 + 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j-3}^2 + (4 + 7 \phi + 3,5 \phi^2) l_2 q_{6j-1}^2 + \right. \\
& + \left. (-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j+3}^2 + (-4 - 7 \phi - 3,5 \phi^2) l_2 q_{6j+5}^2 \right] \cos \theta'_2 \Big\} \dot{q}_{6j+6}^2
\end{aligned} \tag{E.89}$$

$$\begin{aligned}
G_{14}^{2j} = & \left\{ 2(q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 l_2 + 2m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j-1}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{l_2}{12} q_{6j+5}^2 \right) \right\} \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.90}$$

$$\begin{aligned}
G_{15}^{2j} = & \left\{ 2q_{6n1+3}^1 m_2 l_2 + 2(j-1) m_2 l_2^2 \cos \theta'_2 + m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \cos \theta'_2 - \right. \\
& \left. - 2m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j-1}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+5}^2 \right) \right\} \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.91}$$

$$\begin{aligned}
G_{16}^{2j} = & \left\{ -(q_{6n1+2}^1 + L_{y1})(j-1)m_2 l_2^2 \cos\theta_2' - \frac{1}{2}(q_{6n1+2}^1 + L_{y1})m_2 l_2 \left(q_{6j-5}^2 + \right. \right. \\
& + q_{6j+1}^2 \left. \right) \cos\theta_2' + (q_{6n1+2}^1 + L_{y1})m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \right. \\
& - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \left. \right) \sin\theta_2' - \frac{1}{2} A5 \cos\theta_2' + \frac{1}{2} A6 \sin\theta_2' - (j-1)m_2 l_2^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j-1}^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} q_{6j+3}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+5}^2 \left. \right) \cos\theta_2' \left. \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ -2(j-1)^2 m_2 l_2^3 \cos\theta_2' \sin\theta_2' + 2A2 \cos\theta_2' \sin\theta_2' - \right. \\
& - 2(j-1)m_2 l_2^2 q_{6n1+3}^1 \sin\theta_2' - m_2 l_2^2 q_{6n1+3}^1 \left(q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2 \right) \sin\theta_2' - \\
& - 2(j-1)m_2 l_2^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \left(\cos^2\theta_2' - \sin^2\theta_2' \right) \left. \right\} \dot{\theta}_1 + \\
& + \left\{ -(q_{6n1+2}^1 + L_{y1})(j-1)m_2 l_2^2 \cos\theta_2' - \frac{1}{2}(q_{6n1+2}^1 + L_{y1})m_2 l_2 \left(q_{6j-5}^2 + \right. \right. \\
& + q_{6j+1}^2 \left. \right) \cos\theta_2' + (q_{6n1+2}^1 + L_{y1})m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \right. \\
& - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \left. \right) \sin\theta_2' - \frac{1}{2} A5 \cos\theta_2' + \frac{1}{2} A6 \sin\theta_2' - (j-1)m_2 l_2^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j-1}^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} q_{6j+3}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+5}^2 \left. \right) \cos\theta_2' - \frac{1}{2}(q_{6n1+2}^1 + L_{y1})m_2 l_2 \cos\theta_2' + \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{10} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{6} \phi \left. \right) q_{6j-3}^2 - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) l_2 q_{6j-1}^2 + \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+3}^2 + \left(\frac{1}{30} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{24} \phi \left. \right] l_2 q_{6j+5}^2 \dot{q}_{6j-5} + \left[-\frac{1}{2} (q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 l_2 \cos \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (156 + \right. \right. \\
& + 294 \phi + 140 \phi^2) q_{6j-3}^2 - 2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j-1}^2 + \\
& + 2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (54 + 126 \phi + 70 \phi^2) q_{6j+3}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (13 - 31,5 \phi - \\
& - 17,5 \phi^2) q_{6j+5}^2 \left. \right] \cos \theta'_2 - \frac{1}{2} (q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 l_2 \cos \theta'_2 - \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(156 + 294 \phi + \right. \\
& + 140 \phi^2) q_{6j-3}^2 - (22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2) l_2 q_{6j-1}^2 + (54 + 126 \phi + 70 \phi^2) q_{6j+3}^2 + \\
& + (13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) l_2 q_{6j+5}^2 \left. \right] \cos \theta'_2 + \left[\frac{1}{2} (j-1) m_2 l_2^2 \operatorname{sen} \theta'_2 - \right. \\
& - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5}^2 - \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j-2}^2 + \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+1}^2 - \right. \\
& - \left. \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} q_{6j+4}^2 \right] \operatorname{sen} \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (156 + 294 \phi + 140 \phi^2) q_{6j-4}^2 + \right. \\
& + 2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (54 + 126 \phi + \\
& + 70 \phi^2) q_{6j+2}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j+6}^2 \left. \right] \cos \theta'_2 + \frac{1}{2} (j - \\
& - 1) m_2 l_2^2 \operatorname{sen} \theta'_2 - \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \operatorname{sen} \theta'_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_2 l_2}{420(1+\phi)^2} \left[(156 + 294\phi + 140\phi^2) q_{6j-4}^2 + (22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2) q_{6j}^2 + (54 + \right. \\
& + 126\phi + 70\phi^2) q_{6j+2}^2 - \left. (13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2) l_2 q_{6j+6}^2 \right] \cos\theta'_2 - \frac{1}{2} \\
& \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} (q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \text{sen}\theta'_2 \dot{q}_{6j-3} + \left[\frac{1}{12} (j-1) m_2 l_2^3 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{20} - \right. \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \left. \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5}^2 - 2 \frac{\rho I_y l_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2}^2 - 2 \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5}^2 - \right. \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \left. 2 \frac{\rho I_y l_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+4}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 l_2}{420(1+\phi)^2} (-22 - 38,5\phi - 17,5\phi^2) q_{6j-4}^2 + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. 2 \frac{m_2 l_2^3}{420(1+\phi)^2} (-4 - 7\phi - 3,5\phi^2) q_{6j}^2 + 2 \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} (-13 - 31,5\phi - 17,5\phi^2) q_{6j+2}^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. 2 \frac{m_2 l_2^3}{420(1+\phi)^2} (3 + 7\phi + 3,5\phi^2) q_{6j+6}^2 \right] \cos\theta'_2 - \frac{1}{12} (j-1) m_2 l_2^3 \text{sen}\theta'_2 + \right. \\
& + \left. \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 + \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[\left(-22 - \right. \right. \\
& - \left. \left. 38,5\phi - 17,5\phi^2 \right) q_{6j-4}^2 + \left(4 - 7\phi - 3,5\phi^2 \right) l_2 q_{6j}^2 + \left(-13 - 31,5\phi - \right. \right. \\
& - \left. \left. 17,5\phi^2 \right) q_{6j+2}^2 + \left(-22 - 38,5\phi - 17,5\phi^2 \right) q_{6j+6}^2 \right] \cos\theta'_2 - \frac{\rho I_y l_2}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{12} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2}^2 + \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+4}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 \dot{q}_{6j-1} + \left[-\frac{1}{12} (q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 l_2 \cos\theta'_2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 l_2}{420(1+\phi)} \left(22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2 \right) q_{6j-3}^2 + \frac{m_2 l_2^3}{420(1+\phi)^2} \left(-4 - 7 \phi - \right. \right. \\
& - 3,5 \phi^2 \left. \right) q_{6j-1}^2 + \frac{m_2 l_2^2}{420(1+\phi)^2} \left(13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2 \right) q_{6j+3}^2 + \frac{m_2 l_2^3}{420(1+\phi)^2} \left(3 + 7 \phi + \right. \\
& \left. + 3,5 \phi^2 \right) q_{6j+5}^2 \left. \right] \cos \theta'_2 - \frac{1}{12} (q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 l_2^2 \cos \theta'_2 - \frac{m_2 l_2}{420(1+\phi)} \left[\left(22 + 38,5 \phi + \right. \right. \\
& \left. + 17,5 \phi^2 \right) q_{6j-3}^2 + \left(-4 - 7 \phi - 3,5 \phi^2 \right) q_{6j-1}^2 + \left(13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2 \right) q_{6j+3}^2 + \\
& \left. + \left(3 + 7 \phi + 3,5 \phi^2 \right) l_2 q_{6j+5}^2 \right] \cos \theta'_2 \dot{q}_{6j}^2 + \left[- \frac{1}{2} (q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 l_2 \cos \theta'_2 - \right. \\
& - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-3}^2 + \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) l_2 q_{6j+1}^2 + \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+3}^2 + \left(\frac{1}{20} + \right. \right. \\
& \left. + \frac{1}{24} \phi \right) l_2 q_{6j+5}^2 \left. \right] \sin \theta'_2 - \frac{1}{2} (q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 l_2 \sin \theta'_2 - \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-3}^2 + \right. \\
& \left. + \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) l_2 q_{6j+1}^2 + \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+3}^2 + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) l_2 q_{6j+5}^2 \right] \sin \theta'_2 \dot{q}_{6j+1}^2 + \\
& + \left[- \frac{1}{2} (q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 l_2^2 \cos \theta'_2 - \frac{1}{2} \left[2 \frac{m_2 l_2}{420(1+\phi)^2} \left(54 + 126 \phi + 70 \phi^2 \right) q_{6j-3}^2 + \right. \right. \\
& \left. + \left(-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) l_2 q_{6j-1}^2 + \left(156 + 294 \phi + 140 \phi^2 \right) q_{6j+3}^2 + \left(22 + 38,5 \phi + \right. \right. \\
& \left. + 17,5 \phi^2 \right) l_2 q_{6j+5}^2 \left. \right] \cos \theta'_2 - \frac{1}{2} (q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 l_2 \cos \theta'_2 - \frac{m_2 l_2}{420(1+\phi)^2} \left[\left(54 + 126 \phi \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 70 \phi^2) q_{6j-3}^2 + (-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) I_2 q_{6j-1}^2 + (156 + 294 \phi + \\
& + 140 \phi^2) q_{6j+3}^2 + (22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) I_2 q_{6j+5}^2 \cos \theta_2' \Big] \dot{q}_{6j+2} + \left[-(j - \right. \\
& 1) m_2 I_2^2 \text{sen} \theta_2' + \left[2 \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \left(\frac{7}{20} - \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1}^2 + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} (q_{6j-2}^2 + \right. \\
& \left. + q_{6j+4}^2) \right] \text{sen} \theta_2' \Big] \dot{q}_{6j+3} + \left\{ \left[-\frac{1}{2} (q_{6n1+2}^1 + L_{y1}) m_2 I_2 \text{sen} \theta_2' \right] \dot{q}_{6j+5} + \frac{7}{12} (q_{6n1+2}^1 + \right. \\
& \left. + L_{y1}) m_2 I_2^2 \cos \theta_2' - 2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j-3}^2 + (3 + 7 \phi + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3,5 \phi^2) I_2 q_{6j-1}^2 + (-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j+3}^2 + (-4 - 7 \phi - \right. \right. \\
& \left. \left. - 3,5 \phi^2) I_2 q_{6j+5}^2 \right] \cos \theta_2' \right\} \dot{q}_5^1 \tag{E.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{17}^{2j} = & \left\{ (j - 1) m_2 I_2^2 \cos \theta_2' + \frac{1}{3} m_2 I_2 (q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \cos^2 \theta_2' - \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-4}^2 + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) I_2 q_{6j}^2 + \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+2}^2 + \left(-\frac{1}{30} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{24} \phi \right) I_2 q_{6j+6}^2 \right] \Big\} \dot{\theta}_1 \tag{E.93}
\end{aligned}$$

$$G_{18}^{2j} = \left\{ \left[\frac{\rho I_z}{I_2 (1+\phi)^2} \left[\left(\frac{36}{30} \phi \right) I_2 q_{6j+4}^2 + \left(\frac{3}{30} - \frac{15}{30} \phi \right) q_{6j}^2 + \left(\frac{I_d}{\rho I_z} + \frac{36}{30} \phi \right) q_{6j+2}^2 + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{3}{30} - \frac{15}{30} \phi \right) q_{6j+6}^2 \left] \cos^2 \theta_2' + \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} \left[\left(156 + 294 \phi + 140 \phi^2 \right) q_{6j-4}^2 + \right. \\
& + \left(22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j}^2 + \left(54 + 126 \phi + 70 \phi^2 \right) q_{6j+2}^2 - \left(13 + 31,5 \phi + \right. \\
& + \left. 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j+6}^2 \left] \sin^2 \theta_2' - q_{6n1+3}^1 m_2 I_2 - (j-1) m_2 I_2^2 \cos \theta_2' \sin \theta_2' - \left[\frac{m_2 I_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+1}^2 \right] - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \left(q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2 \right) \right] \left. \right] \dot{\theta}_1 \quad (E.94)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{19}^{2j} = & \left\{ \left[\frac{I_d}{I_2(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{36}{30} \phi \right) q_{6j-3}^3 - 2 \left(\frac{3}{30} - \frac{15}{30} \phi \right) I_2 q_{6j-1}^2 - 2 \left(\frac{36}{30} \phi \right) q_{6j+3}^2 + \right. \right. \right. \\
& + 2 \left(\frac{3}{30} - \frac{15}{30} \phi \right) q_{6j+5}^2 \left] \cos^2 \theta_2' + \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} \left[\left(156 + 294 \phi + 140 \phi^2 \right) q_{6j-3}^2 + \right. \\
& + \left(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j-1}^2 + \left(54 + 126 \phi + 70 \phi^2 \right) q_{6j+3}^2 + \left(13 + \right. \\
& + \left. 31,5 \phi + 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j+5}^2 \left. \right] \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{110}^{2j} = & \left\{ \left[\frac{\rho I_z I_2}{3} \left[\left(q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2 \right) \sin^2 \theta_2' + \left(q_{6j-2}^2 + q_{6j-4}^2 \right) \right] - \right. \\
& - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{2} \phi \right) q_{6j-4}^2 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \phi \right) I_2 q_{6j}^2 + \left(\frac{1}{2} \phi \right) q_{6j+2}^2 + \left(-\frac{1}{12} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{6} \phi \right) I_2 q_{6j+6}^2 \right] \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.96)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{111}^{2j} = & \left\{ \frac{I_d}{30(1+\phi)^2} \left[(4 + 5\phi + 10\phi^2) I_2 q_{6j-1}^2 + (6 - 30\phi) q_{6j+3}^2 - (6 - \right. \right. \\
& - 30\phi) q_{6j-3}^2 + (-2 - 10\phi + 10\phi^2) I_2 q_{6j+5}^2 \left. \right] \cos^2 \theta'_2 + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[2 \left(-22 - \right. \right. \\
& - 38,5\phi + 17,5\phi^2 \left. \right) q_{6j-3}^2 + \left(4 + 7\phi + 3,5\phi^2 \right) I_2 q_{6j}^2 + 2 \left(13 + 31,5\phi + \right. \\
& + 17,5\phi^2 \left. \right) q_{6j+2}^2 + 2 \left(-3 - 7\phi - 3,5\phi^2 \right) I_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] \sin^2 \theta'_2 - \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{20} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{24}\phi \left. \right) q_{6j-5}^2 + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24}\phi \right) I_2 q_{6j+1}^2 \left. \right] - \frac{\rho I_z I_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\phi \right) q_{6j-2}^2 + \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\phi \right) q_{6j+4}^2 \right] - \frac{1}{6} q_{6n1+3}^1 m_2 I_2 - \frac{1}{6} (j-1) m_2 I_2^2 \cos \theta'_2 \sin \theta'_2 \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{113}^{2j} = & \left\{ (j-1) m_2 I_2^2 \cos^2 \theta'_2 + \frac{1}{3} m_2 I_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \cos^2 \theta'_2 - \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \right. \right. \right. \\
& + \frac{1}{6}\phi \left. \right) q_{6j-4}^2 + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24}\phi \right) I_2 q_{6j}^2 + \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3}\phi \right) q_{6j+2}^2 + \left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{24}\phi \right) I_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] + \\
& + q_{6n1+3}^1 m_2 I_2 \cos \theta'_2 \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{114}^{2j} = & \left\{ \left[\frac{I_d}{30(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{72}{I_2} \right) I_2 q_{6j-4}^2 - (6 - 30\phi) q_{6j}^2 \right] + \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{32}{I_2} \right) q_{6j+2}^2 - \right. \right. \right. \\
& - (6 - 30\phi) q_{6j+6}^2 \left. \right] \left. \right] \cos^2 \theta'_2 + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[2 \left(54 + 126\phi + 70\phi^2 \right) q_{6j-4}^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j}^2 + \left(156 + 294 \phi + 140 \phi^2 \right) q_{6j+2}^2 + \\
& + 2 \left(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j+6}^2 \left[\text{sen}^2 \theta_2' - \frac{m_2 I_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \left[\left(q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2 \right) \right] \right] \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.99}$$

$$\begin{aligned}
G_{115}^{2j} & = \left\{ \frac{I_d}{30(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{72}{I_2} \right) q_{6j-3}^2 + (6 - 30 \phi) q_{6j-1}^2 \right] + \left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6j+3}^2 + \right. \\
& + (6 - 30 \phi) q_{6j+5}^2 \left. \right] \cos^2 \theta_2' + \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} \left[2 \left(54 + 126 \phi + 70 \phi^2 \right) q_{6j-3}^2 + \right. \\
& + 2 \left(-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j-1}^2 + \left(156 + 294 \phi + 140 \phi^2 \right) q_{6j+3}^2 + \\
& \left. + 2 \left(22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j+5}^2 \right] \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.100}$$

$$\begin{aligned}
G_{116}^{2j} & = \left\{ \frac{\rho I_z I_2}{3} \left[\left(q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2 \right) \text{sen}^2 \theta_2' + \frac{\rho I_y I_2}{3} \left[\left(q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2 \right) - \right. \right. \right. \\
& - \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{2} \right) q_{6j-4}^2 + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) I_2 q_{6j}^2 + \left(\frac{1}{2} \right) q_{6j+2}^2 + \left(\frac{1}{12} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{3} \phi \right) I_2 q_{6j+6}^2 \right] \right] \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.101}$$

$$G_{117}^{2j} = \left\{ \frac{I_d}{30(1+\phi)^2} \left[(-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j-1}^2 + (-6 + 30 \phi) q_{6j-3}^2 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (6 - 30 \phi) q_{6j+3}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j+5}^2 \Big] \cos^2 \theta'_2 + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[2(13 + \right. \\
& + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j-3}^2 + (-6 - 14 \phi - 7 \phi^2) I_2 q_{6j-1}^2 + (22 + 38,5 \phi + \\
& \left. + 17,5 \phi^2) q_{6j+3}^2 + (4 + 7 \phi + 3,5 \phi^2) I_2 q_{6j+5}^2 \right] \Big\} \dot{\theta}_1 \quad (E.102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{118}^{2j} = & \left\{ \frac{1}{6} q_{6n1+3}^2 m_2 I_2^2 + \frac{1}{6} (j-1) m_2 I_2^3 \cos \theta'_2 \text{sen} \theta'_2 - \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30 \phi) q_{6j-4}^2 + \right. \right. \\
& + (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 - (6 - 30 \phi) q_{6j+2}^2 + (-1 - 5 \phi + \\
& \left. + 5 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \right] \cos^2 \theta'_2 + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[2(-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j-4}^2 + \right. \\
& + 2(-3 - 7 \phi - 3,5 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 + 2(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j+2}^2 + (4 + 7 \phi + \\
& \left. + 3,5 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \right] \text{sen}^2 \theta'_2 - \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1}^2 \right] - \\
& \left. - \frac{\rho I_y I_z}{(1+\phi)} (q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.103)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{21}^{2j} = & - \frac{1}{2} \left\{ -2(j-1)^2 m_2 I_2^3 \cos \theta'_2 \text{sen} \theta'_2 - 2(j-1) m_2 I_2^2 (q_{6j-5}^2 + \right. \\
& \left. + q_{6j+1}^2) \cos \theta'_2 \text{sen} \theta'_2 - 2 A_1 \cos \theta'_2 \text{sen} \theta'_2 - 2(j-1) m_2 I_2^2 q_{6n1+3}^1 \text{sen} \theta'_2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - q_{6n1+3}^1 m_2 l_2 \left(q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2 \right) \text{sen}\theta_2' - 2(j-1) m_2 l_2^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) (\cos^2\theta_2' \text{sen}^2\theta_2') \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.104})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{24}^{2j} & = \left\{ -2(j-1) m_2 l_2^2 \text{sen}\theta_2' - \frac{1}{2} m_2 l_2 \left(q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2 \right) \text{sen}\theta_2' - 2m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \cos\theta_2' \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.105})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{27}^{2j} & = \left\{ (j-1) m_2 l_2^2 - \frac{1}{3} m_2 l_2 \left(q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2 \right) \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ (j-1) m_2 l_2^2 - \right. \\
& \left. - \frac{1}{3} m_2 l_2 \left(q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2 \right) \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.106})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{28}^{2j} & = \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left\{ \left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6j-4}^2 + (6-30\phi) q_{6j}^2 - \left(\frac{72}{I_2} \right) q_{6j+2}^2 + \right. \\
& \left. + (6-30\phi) q_{6j+6}^2 \right\} \dot{\theta}_2 + \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left\{ \left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6j-4}^2 + (6-30\phi) q_{6j}^2 - \right. \\
& \left. - \left(\frac{72}{I_2} \right) q_{6j+2}^2 + (6-30\phi) q_{6j+6}^2 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.107})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{29}^{2J} = & \frac{\rho I_y}{30(1+\phi)^2} \left\{ \left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6J-3}^2 - (6 - 30\phi) q_{6J-1}^2 - \left(\frac{72}{I_2} \right) q_{6J+3}^2 - \right. \\
& - (6 - 30\phi) q_{6J+5}^2 \left. \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ (j-1) m_2 I_2^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3}\phi \right) q_{6J-5}^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6}\phi \right) q_{6J+1}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 + \frac{2 m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(156 + 294\phi + 140\phi^2) q_{6J-4}^2 + \right. \\
& + (22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2) I_2 q_{6J}^2 + (54 + 126\phi + 70\phi^2) q_{6J+2}^2 + (-13 - \\
& - 31,5\phi - 17,5\phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \left. \right] \cos\theta'_2 - \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} (q_{6J-2}^2 + q_{6J+4}^2) \left. \right\} \dot{\theta}_1 + \\
& + \frac{\rho I_y}{30(1+\phi)^2} \left\{ \left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6J-3}^2 - (6 - 30\phi) q_{6J-1}^2 - \left(\frac{72}{I_2} \right) q_{6J+3}^2 - \right. \\
& - (6 - 30\phi) q_{6J+5}^2 \left. \right\} \dot{q}_{6J-5}^2
\end{aligned} \tag{E.108}$$

$$G_{210}^{2J} = \frac{\rho I_z I_2}{3} (q_{6J-2}^2 + q_{6J+4}^2) \dot{\theta}_2 + \frac{\rho I_z I_2}{3} (q_{6J-2}^2 + q_{6J+4}^2) \dot{q}_5^1 \tag{E.109}$$

$$\begin{aligned}
G_{211}^{2J} = & \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left\{ (6 - 30\phi) q_{6J-3}^2 + (4 + 5\phi + 10\phi^2) I_2 q_{6J-1}^2 + (6 - 30\phi) q_{6J+3}^2 + \right. \\
& + (-2 - 10\phi + 10\phi^2) I_2 q_{6J+5}^2 \left. \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{1}{6} (j-1) m_2 I_2^3 \text{sen}\theta'_2 - \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{24}\phi \right) q_{6J-5}^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24}\phi \right) q_{6J+1}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 - \frac{2 m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(-22 - 38,5\phi - 17,5\phi^2) q_{6J-4}^2 + (-4 - \right. \\
& - 7\phi - 3,5\phi^2) I_2 q_{6J}^2 + (-13 - 31,5\phi - 17,5\phi^2) q_{6J+2}^2 + (-22 - 38,5\phi - \\
& - 17,5\phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \left. \right] \cos\theta'_2 + \frac{\rho I_y I_2}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\phi \right) q_{6J-2}^2 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\phi \right) q_{6J+4}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 \left. \right\} \dot{\theta}_1 + \\
& + \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left\{ (6 - 30\phi) q_{6J-3}^2 + (4 + 5\phi + 10\phi^2) I_2 q_{6J-1}^2 + (6 - 30\phi) q_{6J+3}^2 + (-2 - \right. \\
& - 10\phi + 10\phi^2) I_2 q_{6J+5}^2 \left. \right\} \dot{q}_5^1
\end{aligned} \tag{E.110}$$

$$G_{212}^{2J} = \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30\phi) q_{6J-4}^2 + (4 + 5\phi + 10\phi^2) I_2 q_{6J}^2 - (6 - 30\phi) q_{6J+2}^2 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (-2 - 10\phi + 10\phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \Big] + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \Big[2(22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2) q_{6J-4}^2 + (4 + \\
& + 7\phi + 3,5\phi^2) I_2 q_{6J}^2 + 2(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2) q_{6J+2}^2 + 2(-3 - 7\phi - \\
& - 3,5\phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \Big] \Big\} \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \Big[(6 - 30\phi) q_{6J-4}^2 + (4 + 5\phi + 10\phi^2) I_2 q_{6J}^2 - \right. \\
& - (6 - 30\phi) q_{6J+2}^2 + (-2 - 10\phi + 10\phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \Big] + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \Big[2(22 + 38,5\phi + \\
& + 17,5\phi^2) q_{6J-4}^2 + (4 + 7\phi + 3,5\phi^2) I_2 q_{6J}^2 + 2(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2) q_{6J+2}^2 + \\
& + 2(-3 - 7\phi - 3,5\phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \Big] \Big\} \dot{q}_5^1 \tag{E.111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{214}^{2J} = & \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \Big[\left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6J+2}^2 - (6 - 30\phi) q_{6J+6}^2 + \left(-\frac{72}{I_2} \right) q_{6J-4}^2 - \right. \\
& - (6 - 30\phi) q_{6J+6}^2 \Big] + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \Big[2(54 + 126\phi + 70\phi^2) q_{6J-4}^2 + 2(13 + 31,5\phi + \\
& + 17,5\phi^2) I_2 q_{6J}^2 + (156 + 294\phi + 140\phi^2) q_{6J+2}^2 + 2(-22 - 38,5\phi - \\
& - 17,5\phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \Big] \Big\} \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \Big[\left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6J+2}^2 - (6 - 30\phi) q_{6J+6}^2 + \right. \\
& + \left(-\frac{72}{I_2} \right) q_{6J-4}^2 + (6 - 30\phi) q_{6J+6}^2 \Big] + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \Big[2(54 + 126\phi + 70\phi^2) q_{6J-4}^2 + \\
& + 2(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2) I_2 q_{6J}^2 + (156 + 294\phi + 140\phi^2) q_{6J+2}^2 + 2(-22 - \\
& - 38,5\phi - 17,5\phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \Big] \Big\} \dot{q}_5^1 \tag{E.112}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{215}^{2J} = & \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \Big[\left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6J+3}^2 + (6 - 30\phi) q_{6J+5}^2 + \left(-\frac{72}{I_2} \right) q_{6J-3}^2 + \right. \\
& + (6 - 30\phi) q_{6J-1}^2 \Big] \dot{\theta}_2 - (j-1) m_2 I_2^2 \text{sen}\theta_2' - \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \Big[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6}\phi \right) q_{6J-5}^2 + \left(\frac{7}{20} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{3}\phi \right) q_{6J+1}^2 \Big] \text{sen}\theta_2' + \frac{2 m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \Big[(54 + 126\phi + 70\phi^2) q_{6J-4}^2 + (13 + 31,5\phi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 17,5 \phi^2) I_2 q_{6J}^2 + (156 + 294 \phi + 140 \phi^2) q_{6J+2}^2 + (-22 - 38,5 \phi - \\
& - 17,5 \phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \left[\cos \theta'_2 + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} (q_{6J-2}^2 + q_{6J+4}^2) \operatorname{sen} \theta'_2 \right] \dot{\theta}_1 + \\
& + \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6J+3}^2 + (6 - 30 \phi) q_{6J+5}^2 + \left(-\frac{72}{I_2} \right) q_{6J-3}^2 + (6 - 30 \phi) q_{6J-1}^2 \right] \dot{q}_5^1
\end{aligned} \tag{E.113}$$

$$\begin{aligned}
G_{216}^{2J} & = \left\{ \frac{\rho I_z I_2}{3} (q_{6J-2}^2 + q_{6J+4}^2) \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} (-q_{6J-3}^2 + q_{6J+3}^2) \cos \theta'_2 + \right. \\
& + \left. \frac{\rho I_y I_2}{(1+\phi)^2} \left[2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6J-1}^2 + 2 \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \phi \right) q_{6J+5}^2 \right] \operatorname{sen} \theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 + \\
& + \left\{ \frac{\rho I_z I_2}{3} (q_{6J-2}^2 + q_{6J+4}^2) \right\} \dot{q}_5^1
\end{aligned} \tag{E.114}$$

$$\begin{aligned}
G_{217}^{2J} & = \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left\{ (-6 + 30 \phi) q_{6J-3}^2 + (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6J-1}^2 + \right. \\
& + (6 - 30 \phi) q_{6J+3}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6J+5}^2 \left. \right\} \dot{\theta}_2 + \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left\{ (-6 + 30 \phi) q_{6J-3}^2 + \right. \\
& + \left. (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6J-1}^2 + (6 - 30 \phi) q_{6J+3}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6J+5}^2 \right\} \dot{q}_5^1
\end{aligned} \tag{E.115}$$

$$\begin{aligned}
G_{218}^{2J} & = \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30 \phi) q_{6J-4}^2 + (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6J}^2 + (-6 - \right. \right. \\
& - 30 \phi) q_{6J+2}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \left. \right] + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[2 \left(-13 + 31,5 \phi - \right. \right. \\
& - 17,5 \phi^2) q_{6J-4}^2 + 2 \left(-3 - 7 \phi - 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6J}^2 + 2 \left(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6J+2}^2 + \\
& + \left. \left. \left(4 + 7 \phi + 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6J+6}^2 \right] \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30 \phi) q_{6J-4}^2 + (-2 - 10 \phi + \right. \right. \\
& + 10 \phi^2) I_2 q_{6J}^2 + (-6 - 30 \phi) q_{6J+2}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \left. \right] + \\
& + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[2 \left(-13 + 31,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6J-4}^2 + 2 \left(-3 - 7 \phi - 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6J}^2 + \right. \\
& + \left. \left. 2 \left(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6J+2}^2 + \left(4 + 7 \phi + 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6J+6}^2 \right] \right\} \dot{q}_5^1
\end{aligned} \tag{E.116}$$

$$\begin{aligned}
G_{32}^{2j} = & \left\{ -2(j-1)m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 - m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \text{sen}\theta'_2 - 2 m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \right. \right. \\
& + \left. \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \cos\theta'_2 \Big\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -2(j-1)m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 - m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + \right. \\
& + q_{6j+1}^2) \text{sen}\theta'_2 - 2 m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \cos\theta'_2 \Big\} \dot{q}_5^1
\end{aligned} \tag{E.117}$$

$$\begin{aligned}
G_{36}^{2j} = & \left\{ -(j-1)m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{2} m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \text{sen}\theta'_2 - \right. \\
& - m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \cos\theta'_2 \Big\} \dot{q}_5^1
\end{aligned} \tag{E.118}$$

$$G_{37}^{2j} = \left\{ m_2 l_2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ m_2 l_2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \tag{E.119}$$

$$G_{38}^{2j} = \left\{ -m_2 l_2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -m_2 l_2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \tag{E.120}$$

$$G_{312}^{2j} = \left\{ -\frac{1}{6} m_2 l_2^2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -\frac{1}{6} m_2 l_2^2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \tag{E.121}$$

$$G_{313}^{2j} = \left\{ m_2 l_2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ m_2 l_2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \tag{E.122}$$

$$G_{314}^{2j} = \left\{ -m_2 l_2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -m_2 l_2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \tag{E.123}$$

$$G_{318}^{2j} = \left\{ \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \tag{E.124}$$

$$G_{41}^{2j} = -\frac{1}{2} G_{14}^{2j} \tag{E.125}$$

$$G_{42}^{2j} = -G_{24}^{2j} \tag{E.126}$$

$$G_{45}^{2j} = \left\{ -2 m_2 l_2 \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.127}$$

$$\begin{aligned}
G_{46}^{2j} = & \left\{ 2(j-1)m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 - m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \text{sen}\theta'_2 + \right. \\
& + 2 m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \cos\theta'_2 \Big\} \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.128}$$

$$G_{47}^{2j} = \left\{ -m_2 l_2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.129})$$

$$G_{48}^{2j} = \left\{ m_2 l_2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.130})$$

$$G_{412}^{2j} = \left\{ \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.131})$$

$$G_{413}^{2j} = \left\{ -m_2 l_2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.132})$$

$$G_{414}^{2j} = \left\{ m_2 l_2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.133})$$

$$G_{418}^{2j} = \left\{ \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.134})$$

$$G_{51}^{2j} = -\frac{1}{2} G_{15}^{2j} \quad (\text{E.135})$$

$$\begin{aligned} G_{52}^{2j} = & \left\{ -(j-1)m_2 l_2^2 \cos\theta'_2 - \frac{1}{2} m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \cos\theta'_2 + \right. \\ & \left. + m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \\ & + \left\{ -(j-1)m_2 l_2^2 \cos\theta'_2 - \frac{1}{2} m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \cos\theta'_2 + \right. \\ & \left. + m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \end{aligned} \quad (\text{E.136})$$

$$G_{54}^{2j} = \left\{ 2m_2 l_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.137})$$

$$\begin{aligned} G_{52}^{2j} = & \left\{ -2(j-1)m_2 l_2^2 \cos\theta'_2 - m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \cos\theta'_2 + \right. \\ & \left. + 2m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \\ & + \left\{ -(j-1)m_2 l_2^2 \cos\theta'_2 - \frac{1}{2} m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \cos\theta'_2 + \right. \\ & \left. + m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \end{aligned} \quad (\text{E.138})$$

$$G_{57}^{2j} = \left\{ -m_2 l_2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -m_2 l_2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.139})$$

$$G_{58}^{2j} = \left\{ -m_2 l_2 \text{cos}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -m_2 l_2 \text{cos}\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.140})$$

$$G_{59}^{2j} = \left\{ m_2 l_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.141})$$

$$G_{511}^{2j} = \left\{ -\frac{1}{6} m_2 l_2^2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.142})$$

$$G_{512}^{2j} = \left\{ -\frac{1}{6} m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -\frac{1}{6} m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.143})$$

$$G_{513}^{2j} = \left\{ -m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.144})$$

$$G_{514}^{2j} = \left\{ -m_2 l_2^2 \text{cos}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -m_2 l_2^2 \text{cos}\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.145})$$

$$G_{515}^{2j} = \left\{ m_2 l_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.146})$$

$$G_{517}^{2j} = \left\{ \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.147})$$

$$G_{518}^{2j} = \left\{ -\frac{1}{6} m_2 l_2^2 \text{cos}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -\frac{1}{6} m_2 l_2^2 \text{cos}\theta'_2 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.148})$$

$$G_{61}^{2j} = -G_{16}^{2j} \quad (\text{E.149})$$

$$\begin{aligned} G_{62}^{2j} = & \left\{ (j-1)m_2 l_2^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \right\} \dot{q}_{6j-5}^2 + \\ & + \left\{ \frac{\rho I_z}{I_3 30(1+\phi)^2} \left[(36)q_{6j-4}^2 + (6-30\phi)l_2 q_{6j}^2 + (72)q_{6j+2}^2 + (6- \right. \right. \\ & - 30\phi)l_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] + \frac{m_2 l_2}{420(1+\phi)^2} \left[2(156 + 294\phi + 140\phi^2)q_{6j-4}^2 + 2(22 + \right. \\ & + 38,5\phi + 17,5\phi^2)l_2 q_{6j}^2 + 2(54 + 126\phi + 70\phi^2)q_{6j+2}^2 + 2(-13 - 31,5\phi - \\ & - 17,5\phi^2)l_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] \right\} \dot{q}_{6j-4}^2 + \left\{ \frac{\rho I_z}{I_3 30(1+\phi)^2} \left[(36)q_{6j-3}^2 + (-6 + 30\phi)l_2 q_{6j-1}^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (72 \phi) q_{6j+3}^2 + (-6 - 30 \phi) I_2 q_{6j+5}^2 \Big] + \frac{\rho I_z I_2}{3} (q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \dot{q}_{6j-2} + \\
& + \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30 \phi) I_2 q_{6j-3}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2^2 q_{6j-2}^2 + \right. \\
& + (6 - 30 \phi) I_2 q_{6j+3}^2 + (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2^2 q_{6j+5}^2 \Big] \dot{q}_{6j-1} + \\
& + \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30 \phi) q_{6j-4}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 + (-6 + 30 \phi) q_{6j+2}^2 + \right. \right. \\
& + (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \Big] + \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} \left[2(22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j-4}^2 + \right. \\
& + 2(4 + 7 \phi + 3,5 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 + 2(13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j+2}^2 + \\
& + 2(-3 - 7 \phi - 3,5 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \Big] \dot{q}_{6j} + \left. \left\{ (j-1) m_2 I_2^2 + \frac{1}{3} m_2 I_2 (q_{6j-5}^2 + \right. \right. \\
& + q_{6j+1}^2) \Big\} \dot{q}_{6j-5} + \left. \left\{ \frac{\rho I_z}{I_2 30(1+\phi)^2} \left[(-72) q_{6j-4}^2 + (-6 + 30 \phi) I_2 q_{6j}^2 + (36) q_{6j+2}^2 + \right. \right. \right. \\
& + (-6 + 30 \phi) I_2 q_{6j+6}^2 \Big] + \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} \left[2(54 + 126 \phi + 70 \phi^2) q_{6j-4}^2 + 2(13 + \right. \\
& + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 + (156 + 294 \phi + 140 \phi^2) q_{6j+2}^2 + 2(-22 - 38,5 \phi - \\
& - 17,5 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \Big] \dot{q}_{6j+2} + \frac{\rho I_z}{I_2 30(1+\phi)^2} \left[(-72) q_{6j-3}^2 + (6 - 30 \phi) I_2 q_{6j-1}^2 + \right. \\
& + (36) q_{6j+3}^2 + (6 - 30 \phi) I_2 q_{6j+5}^2 \Big] \dot{q}_{6j+3} + \frac{\rho I_z I_2}{3} (q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \dot{q}_{6j+4} + \\
& + \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(-6 + 30 \phi) q_{6j-3}^2 + (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j-1}^2 + \right. \\
& + (6 - 30 \phi) I_2 q_{6j+3}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j+5}^2 \Big] \dot{q}_{6j+5} + \\
& + \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30 \phi) q_{6j-4}^2 + (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 + (-6 + 30 \phi) q_{6j+2}^2 + \right. \right. \\
& + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \Big] + \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} \left[2(-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2) q_{6j-4}^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(-3 - 7\phi - 3,5\phi^2 \right) l_2 q_{6j}^2 + 2 \left(-22 - 38,5\phi - 17,5\phi^2 \right) q_{6j+2}^2 + \\
& + \left(4 + 7\phi + 3,5\phi^2 \right) l_2 q_{6j+6}^2 \left. \right\} \dot{q}_{6j+6}^2 \quad (E.150)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{63}^{2j} & = \left\{ (j-1)m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 \left(q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2 \right) \text{sen}\theta'_2 + \right. \\
& + m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \cos\theta'_2 \left. \right\} \dot{q}_5^1 - \\
& - \left\{ \frac{1}{2} m_2 l_2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{q}_{6j-5}^2 + \left\{ \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{q}_{6j-4}^2 + \left\{ \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{q}_{6j}^2 - \\
& - \left\{ \frac{1}{2} m_2 l_2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{q}_{6j+1}^2 + \left\{ \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{q}_{6j+2}^2 - \left\{ \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{q}_{6j+6}^2 \quad (E.151)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{64}^{2j} & = \left\{ -2(j-1)m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 - m_2 l_2 \left(q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2 \right) \text{sen}\theta'_2 - m_2 l_2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^2 + \frac{l_2}{12} q_{6j}^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{2} q_{6j+2}^2 - \frac{l_2}{12} q_{6j+6}^2 \right) \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.152)
\end{aligned}$$

$$G_{67}^{2j} = \left\{ (j-1)m_2 l_2^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2 \left(q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2 \right) \right\} \dot{q}_5^1 \quad (E.153)$$

$$\begin{aligned}
G_{68}^{2j} & = \left\{ \frac{\rho I_z}{l_2 (1+\phi)^2} \left[(36)q_{6j-4}^2 + (6-30\phi) l_2 q_{6j}^2 - (72)q_{6j+2}^2 + (6- \right. \right. \\
& - 30\phi) l_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] + \frac{m_2 l_2}{420(1+\phi)^2} \left[\left(156 + 294\phi + 140\phi^2 \right) q_{6j-4}^2 + 2 \left(22 + 38,5\phi + \right. \right. \\
& + 17,5\phi^2 \left. \right) l_2 q_{6j}^2 + 2 \left(54 + 126\phi + 70\phi^2 \right) q_{6j+2}^2 + 2 \left(-13 - 31,5\phi - \right. \\
& - 17,5\phi^2 \left. \right) l_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] \left. \right\} \dot{q}_5^1 \quad (E.154)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{69}^{2j} & = \frac{\rho I_z}{l_2 30(1+\phi)^2} \left[(36)q_{6j-3}^2 - (6-30\phi) l_2 q_{6j+1}^2 - (72)q_{6j+3}^2 - \right. \\
& - \left. (6-30\phi) l_2 q_{6j+5}^2 \right] \dot{q}_5^1 + \left\{ -(j-1)m_2 l_2^2 \text{sen}\theta'_2 - 2 \left\{ \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3}\phi \right) q_{6j-5}^2 + \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6}\phi \right) q_{6j+1}^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} \left(q_{6j+4}^2 + q_{6j-2}^2 \right) \right\} \text{sen}\theta'_2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} \left[\left(156 + 294 \phi + 140 \phi^2 \right) q_{6j-4}^2 + \left(22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j}^2 + \right. \\
& \left. + \left(54 + 126 \phi + 70 \phi^2 \right) q_{6j+2}^2 + \left(-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j+6}^2 \right] \cos \theta'_2 \Big\} \dot{\theta}_1 \\
& \hspace{15em} \text{(E.155)}
\end{aligned}$$

$$G_{69}^{2j} = \left\{ \frac{\rho I_z I_2}{3} \left(q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2 \right) \right\} \dot{q}_5^1 \quad \text{(E.156)}$$

$$\begin{aligned}
G_{69}^{2j} &= \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(-6 + 30 \phi) q_{6j-3}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j-1}^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + (6 - 30 \phi) q_{6j+3}^2 + 2(-1 - 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j+5}^2 \right] \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ \frac{1}{6} (j-1) m_2 I_2^3 \text{sen} \theta'_2 - \right. \\
& - 2 \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{20} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j-5}^2 + \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 - \\
& - \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[\left(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6j-4}^2 + \left(-4 - 7 \phi - 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j}^2 + \right. \\
& \left. + \left(-13 - 31,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6j+2}^2 + \left(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j+6}^2 \right] \cos \theta'_2 + \\
& \left. + 2 \frac{\rho I_y I_2}{(1+\phi)} \left[\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j-2}^2 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j+4}^2 \right] \text{sen} \theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad \text{(E.157)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{612}^{2j} &= \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30 \phi) q_{6j-4}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + (-6 + 30 \phi) q_{6j+2}^2 + 2(-1 - 5 \phi + 5 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \right] \right\} \dot{q}_5^1 \quad \text{(E.158)}
\end{aligned}$$

$$G_{613}^{2j} = \left\{ (j-1) m_2 I_2^2 + \frac{1}{3} m_2 I_2 \left(q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2 \right) \right\} \dot{q}_5^1 \quad \text{(E.159)}$$

$$\begin{aligned}
G_{614}^{2j} &= \left\{ \frac{\rho I_z}{I_2 30(1+\phi)^2} \left[(-72) q_{6j-3}^2 - (6 - 30 \phi) I_2 q_{6j}^2 - (36) q_{6j+2}^2 - \right. \right. \\
& - (6 - 30 \phi) I_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] + \frac{m_2 I_2}{420(1+\phi)^2} \left[2 \left(54 + 126 \phi + 70 \phi^2 \right) q_{6j-4}^2 + \right. \\
& + 2 \left(13 + 31,5 \phi + 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j}^2 + \left(156 + 294 \phi + 140 \phi^2 \right) q_{6j+2}^2 + 2 \left(-22 - \right. \\
& \left. \left. - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j+6}^2 \right] \right\} \dot{q}_5^1 \quad \text{(E.160)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{615}^{2j} = & \left\{ \frac{\rho I_z}{I_2 30(1+\phi)^2} \left[(-72)q_{6j-3}^2 + (6 - 30\phi)I_2 q_{6j-1}^2 + (36)q_{6j+3}^2 + \right. \right. \\
& + (6 - 30\phi)I_2 q_{6j+5}^2 \left. \right] \dot{q}_5^1 + \left\{ -(j-1)m_2 I_2^2 \text{sen}\theta'_2 - 2\frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6}\phi \right) q_{6j-5}^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3}\phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 + 2\frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(54 + 126\phi + 70\phi^2)q_{6j-4}^2 + \right. \\
& + (13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)I_2 q_{6j}^2 + (156 + 294\phi + 140\phi^2)q_{6j+2}^2 + (-22 - \\
& - 38,5\phi - 17,5\phi^2)I_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] \cos\theta'_2 + \frac{\rho I_y I_2}{(1+\phi)^2} (q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \text{sen}\theta'_2 \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.161)
\end{aligned}$$

$$G_{616}^{2j} = \frac{\rho I_z I_2}{3} (q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \text{sen}\theta'_2 \dot{q}_5^1 \quad (E.162)$$

$$\begin{aligned}
G_{617}^{2j} = & \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)} \left[-(6 - 30\phi)q_{6j-3}^2 + 2(-1 - 5\phi + 5\phi^2)q_{6j-1}^2 + \right. \right. \\
& + 2(3 - 15\phi)q_{6j+3}^2 + (4 + 5\phi + 10\phi^2)q_{6j+5}^2 \left. \right] \dot{q}_5^1 + \left\{ -\frac{1}{6}(j-1)m_2 I_2^3 \text{sen}\theta'_2 - \right. \\
& - 2\frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24}\phi \right) q_{6j-5}^2 + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24}\phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 + 2\frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(13 + \right. \\
& + 31,5\phi + 17,5\phi^2)q_{6j-4}^2 + (3 + 7\phi + 3,5\phi^2)I_2 q_{6j}^2 + (22 + 38,5\phi + \\
& + 17,5\phi^2)q_{6j+2}^2 + (-4 - 7\phi - 3,5\phi^2)I_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] \cos\theta'_2 + \frac{\rho I_y I_2}{(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{1}{12} - \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{6}\phi \right) q_{6j-2}^2 + \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\phi \right) q_{6j+4}^2 \left. \right] \text{sen}\theta'_2 \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.163)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{618}^{2j} = & \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30\phi)q_{6j-4}^2 + 2(-1 - 5\phi + 5\phi^2)I_2 q_{6j}^2 + \right. \right. \\
& + 2(-3 + 15\phi)q_{6j+2}^2 + (4 + 5\phi + 10\phi^2)I_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[2(-13 - \right. \\
& - 31,5\phi - 17,5\phi^2)q_{6j-4}^2 + 2(-3 - 7\phi - 3,5\phi^2)I_2 q_{6j}^2 + 2(-22 - 38,5\phi - \\
& - 17,5\phi^2)q_{6j+2}^2 + (4 + 7\phi + 3,5\phi^2)I_2 q_{6j+6}^2 \left. \right] \dot{q}_5^1 \quad (E.164)
\end{aligned}$$

$$G_{71}^{2j} = -\frac{1}{2} G_{17}^{2j} \quad (E.165)$$

$$G_{72}^{2j} = -\frac{1}{2} G_{27}^{2j} \quad (\text{E.166})$$

$$G_{74}^{2j} = -G_{47}^{2j} \quad (\text{E.167})$$

$$G_{75}^{2j} = \left\{ m_2 l_2 \text{sen} \theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.168})$$

$$G_{76}^{2j} = -\frac{1}{2} \left\{ (j-1) m_2 l_2^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2 (q_{6j-5}^2 + q_{6j+1}^2) \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.169})$$

$$G_{79}^{2j} = \left\{ -2 \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi \right) \cos \theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.170})$$

$$G_{711}^{2j} = \left\{ -2 \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) \cos \theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.171})$$

$$G_{712}^{2j} = -2 \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) \dot{\theta}_2 - 2 \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi \right) \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.172})$$

$$G_{714}^{2j} = -2 \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) \dot{\theta}_2 - 2 \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.173})$$

$$G_{715}^{2j} = 2 \frac{m_2 l_2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.174})$$

$$G_{717}^{2j} = \left\{ 2 \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi \right) \cos \theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.175})$$

$$G_{718}^{2j} = -2 \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) \dot{\theta}_2 - 2 \frac{m_2 l_2^2}{(1+\phi)} \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{24} \phi \right) \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.176})$$

$$G_{81}^{2j} = -\frac{1}{2} G_{18}^{2j} \quad (\text{E.177})$$

$$G_{82}^{2j} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho I_z}{I_2 30 (1+\phi)^2} \left[(36) q_{6j-4}^2 + 2(3-15\phi) l_2 q_{6j}^2 - (72) q_{6j+2}^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(3-15\phi) l_2 q_{6j+6}^2 \right] \right\} \dot{\theta}_2 - \left\{ \frac{\rho I_z}{I_2 30 (1+\phi)^2} \left[(36) q_{6j-4}^2 + 2(3-15\phi) l_2 q_{6j}^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - (72) q_{6j+2}^2 + 2(3-15\phi) l_2 q_{6j+6}^2 \right] \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.178})$$

$$G_{83}^{2j} = -G_{38}^{2j} \quad (\text{E.179})$$

$$G_{84}^{2j} = -G_{48}^{2j} \quad (\text{E.180})$$

$$G_{86}^{2J} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho I_z}{I_2 30(1+\phi)^2} \left[(36)q_{6J-4}^2 + 2(3 - 15\phi)I_2 q_{6J}^2 - (72)q_{6J+2}^2 + 2(3 - 15\phi)I_2 q_{6J+6}^2 \right] \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.181})$$

$$G_{89}^{2J} = \left\{ -2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (156 + 294\phi + 140\phi^2) \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.182})$$

$$G_{810}^{2J} = \left\{ \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.183})$$

$$G_{811}^{2J} = \left\{ -2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (-22 - 38,5\phi - 17,5\phi^2) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.184})$$

$$G_{713}^{2J} = 2 \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6}\phi \right) \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.185})$$

$$G_{815}^{2J} = \left\{ -2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (54 + 126\phi + 70\phi^2) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.186})$$

$$G_{816}^{2J} = \left\{ \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.187})$$

$$G_{817}^{2J} = \left\{ 2 \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.188})$$

$$G_{91}^{2J} = -\frac{1}{2} G_{19}^{2J} \quad (\text{E.189})$$

$$G_{92}^{2J} = -\frac{1}{2} \frac{\rho I_y}{(1+\phi)^2} \left\{ \left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6J-3}^2 - (6 - 30\phi) q_{6J-1}^2 - \left(\frac{72}{I_2} \right) q_{6J+3}^2 - (6 - 30\phi) q_{6J+5}^2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ (j-1)m_2 I_2^2 \text{sen}\theta'_2 - 2 \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3}\phi \right) q_{6J-5}^2 + \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6}\phi \right) q_{6J+1}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 - \frac{2 m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(156 + 294\phi + 140\phi^2) q_{6J-4}^2 + (22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2) I_2 q_{6J}^2 + (54 + 126\phi + 70\phi^2) q_{6J+2}^2 + (-13 - 31,5\phi - 17,5\phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \right] \cos\theta'_2 + \frac{\rho I_y}{(1+\phi)} (q_{6J-2}^2 + q_{6J+4}^2) \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 - \frac{\rho I_y}{30(1+\phi)^2} \left\{ \left(\frac{36}{I_2} \right) q_{6J-3}^2 - (6 - 30\phi) q_{6J-1}^2 - \left(\frac{72}{I_2} \right) q_{6J+3}^2 - (6 - 30\phi) q_{6J+5}^2 \right\} \dot{q}_{6J-5}^1 \quad (\text{E.190})$$

$$G_{95}^{2J} = -G_{59}^{2J} \quad (\text{E.191})$$

$$\begin{aligned}
G_{96}^{2j} = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho I_z}{I_2 30(1+\phi)^2} \left[(36)q_{6j-3}^2 + 2(3-15\phi)I_2 q_{6j+1}^2 - (72)q_{6j+3}^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(3-15\phi)I_2 q_{6j+5}^2 \right] \right\} \dot{q}_5^1 - \left\{ -(j-1)m_2 I_2^2 \text{sen}\theta_2' - 2 \left\{ \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3}\phi \right) q_{6j-5}^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6}\phi \right) q_{6j+1}^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} (q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \right\} \text{sen}\theta_2' - \\
& - \frac{2 m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(156 + 294\phi + 140\phi^2)q_{6j-4}^2 + (22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2)I_2 q_{6j}^2 + \right. \\
& \left. + (54 + 126\phi + 70\phi^2)q_{6j+2}^2 + (-13 - 31,5\phi - 17,5\phi^2)I_2 q_{6j+6}^2 \right] \cos\theta_2' \Big\} \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.192}$$

$$G_{97}^{2j} = -G_{79}^{2j} \tag{E.193}$$

$$G_{98}^{2j} = -G_{89}^{2j} \tag{E.194}$$

$$G_{910}^{2j} = \left\{ \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \cos\theta_2' \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.195}$$

$$G_{912}^{2j} = \left\{ \frac{2 m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (22 + 38,5\phi + 17,5\phi^2) \text{sen}\theta_2' \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.196}$$

$$G_{913}^{2j} = \left\{ -2 \frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6}\phi \right) \cos\theta_2' \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.197}$$

$$G_{914}^{2j} = \left\{ \frac{2 m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} (54 + 126\phi + 70\phi^2) \text{sen}\theta_2' \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.198}$$

$$G_{916}^{2j} = - \left\{ \frac{\rho I_z}{(1+\phi)} \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.199}$$

$$G_{918}^{2j} = \left\{ \frac{2 m_2 I_2^2}{(1+\phi)^2} (-13 - 31,5\phi - 17,5\phi^2) \text{sen}\theta_2' \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.200}$$

$$G_{101}^{2j} = -\frac{1}{2} G_{110}^{2j} \tag{E.201}$$

$$G_{102}^{2j} = -mv[4,10] \left(q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2 \right) (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \tag{E.202}$$

$$G_{106}^{2j} = -mv[4,10] \left(q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2 \right) \dot{q}_5^1 \tag{E.203}$$

$$G_{108}^{2j} = -2 \text{muv}[2,4] \dot{\theta}_2 + 2 \text{muv}[2,4] \dot{q}_5^1 \tag{E.204}$$

$$G_{109}^{2j} = - 2 \text{ muw}[3,4] \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.205})$$

$$G_{1011}^{2j} = - 2 \text{ muw}[4,5] \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.206})$$

$$G_{1012}^{2j} = 2 \text{ muv}[4,6] \dot{\theta}_2 + 2 \text{ muv}[4,6] \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.207})$$

$$G_{1014}^{2j} = 2 \text{ muv}[4,8] \dot{\theta}_2 + 2 \text{ muv}[4,8] \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.208})$$

$$G_{1015}^{2j} = 2 \text{ muv}[4,8] \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.209})$$

$$G_{1017}^{2j} = - 2 \text{ muv}[4,12] \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.210})$$

$$G_{1018}^{2j} = 2 \text{ muv}[6,10] \dot{\theta}_2 + 2 \text{ muv}[6,10] \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.211})$$

$$G_{111}^{2j} = - \frac{1}{2} G_{111}^{2j} \quad (\text{E.212})$$

$$\begin{aligned} G_{112}^{2j} = & - \frac{1}{2} \left\{ 2 \text{ mu}[2,6] q_{6j-3}^2 + \text{ mu}[5,5] q_{6j-1}^2 + 2 \text{ mu}[2,6] q_{6j+3}^2 + \right. \\ & \left. + 2 \text{ mu}[5,11] q_{6j+5}^2 \right\} \dot{\theta}_2 - \left\{ \frac{1}{6} (j-1) m_2 l_2^3 \text{ sen} \theta'_2 - \left[2 \text{ muw}[1,5] q_{6j-5}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \text{ muw}[5,7] q_{6j+1}^2 \right] \text{ sen} \theta'_2 - \left[2 \text{ mvw}[2,5] q_{6j-4}^2 + \text{ mvw}[5,6] q_{6j}^2 + 2 \text{ mvw}[5,8] q_{6j+2}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \text{ mvw}[2,5] q_{6j+6}^2 \right] \cos \theta'_2 + \left[\text{ muw}[4,5] q_{6j-2}^2 + \text{ muw}[4,11] q_{6j+4}^2 \right] \text{ sen} \theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 - \\ & - \left\{ 2 \text{ mu}[2,6] q_{6j-3}^2 + \text{ mu}[5,5] q_{6j-1}^2 + 2 \text{ mu}[2,6] q_{6j+3}^2 + 2 \text{ mu}[5,11] q_{6j+5}^2 \right\} \dot{q}_5^1 \end{aligned} \quad (\text{E.213})$$

$$G_{115}^{2j} = - G_{511}^{2j} \quad (\text{E.214})$$

$$\begin{aligned} G_{116}^{2j} = & - \frac{1}{2} \left\{ 2 \text{ mu}[2,6] q_{6j-3}^2 + \text{ mu}[5,5] q_{6j-1}^2 + 2 \text{ mu}[2,6] q_{6j+3}^2 + \right. \\ & \left. + 2 \text{ mu}[5,11] q_{6j+5}^2 \right\} \dot{q}_5^1 - \left\{ \frac{1}{6} (j-1) m_2 l_2^3 \text{ sen} \theta'_2 - \left[2 \text{ muv}[7,12] q_{6j-5}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \text{ muv}[1,12] q_{6j+1}^2 \right] \text{ sen} \theta'_2 + 2 \left[\text{ mvw}[2,5] q_{6j-4}^2 + \text{ mvw}[5,6] q_{6j}^2 + 2 \text{ mvw}[5,8] q_{6j+2}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \text{ mvw}[4,11] q_{6j+6}^2 \right] \cos \theta'_2 - \left[\text{ muw}[4,5] q_{6j-2}^2 + \text{ muw}[4,11] q_{6j+4}^2 \right] \text{ sen} \theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (\text{E.215})$$

$$G_{117}^{2J} = - G_{711}^{2J} \quad (\text{E. 216})$$

$$G_{118}^{2J} = - G_{811}^{2J} \quad (\text{E. 217})$$

$$G_{1110}^{2J} = - G_{1011}^{2J} \quad (\text{E. 218})$$

$$G_{1112}^{2J} = 2\mu w[5,6]\dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 219})$$

$$G_{1113}^{2J} = - 2\mu w[5,7]\cos\theta_2'\dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 220})$$

$$G_{1114}^{2J} = 2m v w[5,8]\text{sen}\theta_2'\dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 221})$$

$$G_{1116}^{2J} = 2\mu w[10,12]\cos\theta_2'\dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 222})$$

$$G_{1118}^{2J} = 2m v w[5,12]\text{sen}\theta_2'\dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 223})$$

$$G_{121}^{2J} = - \frac{1}{2} G_{112}^{2J} \quad (\text{E. 224})$$

$$G_{122}^{2J} = - \frac{1}{2} \left\{ 2 \mu [2,8]q_{6j-4}^2 + \mu [5,5]q_{6j}^2 - 2\mu [2,8]q_{6j+2}^2 + \right. \\ \left. + 2\mu [5,11]q_{6j+6}^2 + 2 m w[9,11]q_{6j-4}^2 + m w[5,5]q_{6j}^2 + 2m w[3,11]q_{6j+2}^2 + \right. \\ \left. + 2m w[5,11]q_{6j+6}^2 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ 2 \mu [2,8]q_{6j-4}^2 + \mu [5,5]q_{6j}^2 + 2\mu [2,8]q_{6j+2}^2 + \right. \\ \left. + 2\mu [5,11]q_{6j+6}^2 + 2 m w[9,11]q_{6j-4}^2 + m w[5,5]q_{6j}^2 + 2m w[3,11]q_{6j+2}^2 + \right. \\ \left. + 2m w[5,11]q_{6j+6}^2 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E. 225})$$

$$G_{123}^{2J} = \frac{1}{6} m_2 I_2^2 \cos\theta_2' (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E. 226})$$

$$G_{124}^{2J} = - \frac{1}{2} G_{412}^{2J} \quad (\text{E. 227})$$

$$G_{126}^{2J} = - \frac{1}{2} \left\{ 2 \mu [2,8]q_{6j-4}^2 + \mu [5,5]q_{6j}^2 - 2\mu [2,8]q_{6j+2}^2 + \right. \\ \left. + 2\mu [5,11]q_{6j+6}^2 + 2 m w[9,11]q_{6j-4}^2 + m w[5,5]q_{6j}^2 + 2m w[3,11]q_{6j+2}^2 + \right. \\ \left. + 2m w[5,11]q_{6j+6}^2 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E. 228})$$

$$G_{127}^{2J} = - G_{412}^{2J} \quad (\text{E. 229})$$

$$G_{129}^{2J} = - G_{912}^{2J} \quad (\text{E. 230})$$

$$G_{1211}^{2J} = - G_{1112}^{2J} \quad (\text{E. 231})$$

$$G_{1213}^{2J} = 2\mu\nu[6,7](\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E. 232})$$

$$G_{1215}^{2J} = 2\mu w[2,11]\text{sen}\theta_2 \dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 233})$$

$$G_{1216}^{2J} = 2\mu w[4,11](\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E. 234})$$

$$G_{1217}^{2J} = - 2\mu v w[5,12]\dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 235})$$

$$G_{131}^{2J} = - \frac{1}{2} G_{113}^{2J} \quad (\text{E. 236})$$

$$G_{132}^{2J} = - \frac{1}{2} G_{213}^{2J} \quad (\text{E. 237})$$

$$G_{133}^{2J} = - G_{313}^{2J} \quad (\text{E. 238})$$

$$G_{134}^{2J} = - G_{413}^{2J} \quad (\text{E. 239})$$

$$G_{136}^{2J} = - \frac{1}{2} G_{613}^{2J} \quad (\text{E. 240})$$

$$G_{138}^{2J} = - G_{813}^{2J} \quad (\text{E. 241})$$

$$G_{139}^{2J} = - G_{913}^{2J} \quad (\text{E. 242})$$

$$G_{1311}^{2J} = - G_{1113}^{2J} \quad (\text{E. 243})$$

$$G_{1312}^{2J} = - G_{1213}^{2J} \quad (\text{E. 244})$$

$$G_{1314}^{2J} = 2\mu\nu[1,2](\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E. 245})$$

$$G_{1315}^{2J} = 2\mu\nu[1,2]\dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 246})$$

$$G_{1317}^{2J} = 2\mu\nu[1,6]\dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 247})$$

$$G_{1318}^{2j} = 2\mu\nu[7,12](\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E.248})$$

$$G_{141}^{2j} = -\frac{1}{2} G_{114}^{2j} \quad (\text{E.249})$$

$$G_{142}^{2j} = -\frac{1}{2} \left\{ 2 \mu[2,8]q_{6j-4}^2 + \mu[3,5]q_{6j}^2 + 2\mu[2,8]q_{6j+2}^2 - \right. \\ \left. - 2\mu[2,6]q_{6j+6}^2 + 2 \text{mv}[2,8]q_{6j-4}^2 + \text{mv}[6,8]q_{6j}^2 + 2\text{mv}[2,2]q_{6j+6}^2 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E.250})$$

$$G_{144}^{2j} = -G_{414}^{2j} \quad (\text{E.251})$$

$$G_{146}^{2j} = -\frac{1}{2} \left\{ 2 \mu[2,8]q_{6j-4}^2 + \mu[3,5]q_{6j}^2 + 2\mu[2,8]q_{6j+2}^2 - \right. \\ \left. - 2\mu[2,6]q_{6j+6}^2 + 2 \text{mv}[2,8]q_{6j-4}^2 + \text{mv}[6,8]q_{6j}^2 + 2\text{mv}[2,2]q_{6j+6}^2 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.252})$$

$$G_{147}^{2j} = -G_{714}^{2j} \quad (\text{E.253})$$

$$G_{149}^{2j} = -G_{914}^{2j} \quad (\text{E.254})$$

$$G_{1410}^{2j} = -G_{1014}^{2j} \quad (\text{E.255})$$

$$G_{1411}^{2j} = -G_{1114}^{2j} \quad (\text{E.256})$$

$$G_{1413}^{2j} = -G_{1314}^{2j} \quad (\text{E.257})$$

$$G_{1416}^{2j} = 2\mu\nu[2,10](\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E.258})$$

$$G_{1417}^{2j} = 2\text{mv}[2,6]\dot{\theta}_1 \quad (\text{E.259})$$

$$G_{151}^{2j} = -\frac{1}{2} G_{115}^{2j} \quad (\text{E.260})$$

$$G_{152}^{2j} = -\frac{1}{2} \left\{ 2 \mu[2,8]q_{6j-3}^2 + 2 \mu[2,6]q_{6j-1}^2 + \mu[2,2]q_{6j+3}^2 + \right. \\ \left. + 2 \mu[2,6]q_{6j+5}^2 \right\} \dot{\theta}_2 - \left\{ 2 \mu[2,8]q_{6j-3}^2 + 2 \mu[2,6]q_{6j-1}^2 + \mu[2,2]q_{6j+3}^2 + \right. \\ \left. + 2 \mu[2,6]q_{6j+5}^2 \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ (j-1)m_2 I_2^2 \text{sen}\theta_2' - \left[\text{mv}[1,8]q_{6j-5}^2 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \text{muv}[1,2]q_{6j+1}^2 \left. \right] \text{sen}\theta'_2 + 2 \left[\text{mvw}[2,9]q_{6j-4}^2 + \text{mvw}[2,11]q_{6j}^2 + \text{mvw}[2,3]q_{6j+2}^2 + \right. \\
& \left. + \text{mvw}[2,5]q_{6j+6}^2 \right] \text{cos}\theta'_2 + 2\text{muw}[4,9](q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \text{sen}\theta'_2 \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.261})
\end{aligned}$$

$$G_{155}^{2j} = - G_{515}^{2j} \quad (\text{E.262})$$

$$G_{156}^{2j} = - G_{615}^{2j} \quad (\text{E.263})$$

$$G_{157}^{2j} = - G_{715}^{2j} \quad (\text{E.264})$$

$$G_{158}^{2j} = - G_{815}^{2j} \quad (\text{E.265})$$

$$G_{159}^{2j} = - G_{915}^{2j} \quad (\text{E.266})$$

$$G_{1510}^{2j} = - G_{1015}^{2j} \quad (\text{E.267})$$

$$G_{1512}^{2j} = - G_{1215}^{2j} \quad (\text{E.268})$$

$$G_{1513}^{2j} = - G_{1315}^{2j} \quad (\text{E.269})$$

$$G_{1514}^{2j} = - G_{1415}^{2j} \quad (\text{E.270})$$

$$G_{1516}^{2j} = 2\text{muw}[4,9] \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.271})$$

$$G_{1518}^{2j} = 2\text{muw}[4,9] \text{sen}\theta'_2 \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.272})$$

$$G_{161}^{2j} = - \frac{1}{2} G_{116}^{2j} \quad (\text{E.273})$$

$$\begin{aligned}
G_{162}^{2j} = & - \frac{1}{2} \left\{ \text{muw}[4,4](q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) - \left\{ 2 \text{muw}[4,8](-q_{6j-3}^2 + \right. \\
& \left. + q_{6j+3}^2) \text{cos}\theta'_2 + \left[2 \text{muw}[10,12]q_{6j-1}^2 + \text{muw}[4,5]q_{6j+5}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.274})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{166}^{2j} = & - \frac{1}{2} \left\{ \text{mw}[4,4](q_{6j-2}^2 + q_{6j+4}^2) \right\} \dot{q}_5^1 - \left\{ 2 \text{muw}[4,8](-q_{6j-3}^2 + \right. \\
& \left. + q_{6j+3}^2) \text{cos}\theta'_2 + \left[2 \text{muw}[10,12]q_{6j-1}^2 + \text{muw}[4,5]q_{6j+5}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.275})
\end{aligned}$$

$$G_{168}^{2J} = - G_{816}^{2J} \quad (\text{E.276})$$

$$G_{169}^{2J} = - G_{916}^{2J} \quad (\text{E.277})$$

$$G_{1611}^{2J} = - G_{1116}^{2J} \quad (\text{E.278})$$

$$G_{1612}^{2J} = - G_{1216}^{2J} \quad (\text{E.279})$$

$$G_{1614}^{2J} = - G_{1616}^{2J} \quad (\text{E.280})$$

$$G_{1510}^{2J} = - G_{1015}^{2J} \quad (\text{E.281})$$

$$G_{1615}^{2J} = - G_{1516}^{2J} \quad (\text{E.282})$$

$$G_{1617}^{2J} = 2\mu\nu[4,6]\cos\theta'_2\dot{\theta}_1 \quad (\text{E.283})$$

$$G_{1618}^{2J} = 2\mu\nu[4,6]\cos\theta'_2(\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E.284})$$

$$G_{171}^{2J} = -\frac{1}{2} G_{117}^{2J} \quad (\text{E.285})$$

$$G_{172}^{2J} = -\frac{1}{2} \left\{ \mu[3,5](q_{6j-2}^2 + 2\mu[5,11]q_{6j-1}^2 + 2\mu[2,6]q_{6j+3}^2 + \mu[5,5]q_{6j+5}^2) \dot{\theta}_2 - \left\{ \mu[3,5](q_{6j-2}^2 + 2\mu[5,11]q_{6j-1}^2 + 2\mu[2,6]q_{6j+3}^2 + \mu[5,5]q_{6j+5}^2) \dot{q}_5^1 \right\} \right\} \quad (\text{E.286})$$

$$G_{175}^{2J} = - G_{517}^{2J} \quad (\text{E.287})$$

$$G_{176}^{2J} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)} \left[-(6 - 30\phi)q_{6j-3}^2 + 2(-1 - 5\phi + 5\phi^2)q_{6j-1}^2 + 2(3 - 15\phi)q_{6j+3}^2 + (4 + 5\phi + 10\phi^2)q_{6j+5}^2 \right] \dot{q}_5^1 - \left\{ -\frac{1}{6}(j-1)m_2 I_2^3 \text{sen}\theta'_2 - 2\frac{m_2 I_2^2}{(1+\phi)} \left[\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24}\phi \right) q_{6j-5}^2 + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24}\phi \right) q_{6j+1}^2 \right] \text{sen}\theta'_2 + 2\frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[(13 + 31,5\phi + 17,5\phi^2)q_{6j-4}^2 + (3 + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 7 \phi + 3,5 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 + (22 + 38,5 \phi + 17,5 \phi^2) q_{6j+2}^2 + (-4 - 7 \phi - \\
& - 3,5 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \Big] \cos \theta_2' + \frac{\rho I_y I_z}{(1+\phi)^2} \left[\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \phi \right) q_{6j-2}^2 + \left(-\frac{1}{12} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{3} \phi \right) q_{6j+4}^2 \right] \sin \theta_2' \Big\} \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.288}$$

$$G_{177}^{2j} = - G_{717}^{2j} \tag{E.289}$$

$$G_{178}^{2j} = - G_{817}^{2j} \tag{E.290}$$

$$G_{1710}^{2j} = - G_{1017}^{2j} \tag{E.291}$$

$$G_{1712}^{2j} = - G_{1217}^{2j} \tag{E.292}$$

$$G_{1713}^{2j} = - G_{1317}^{2j} \tag{E.293}$$

$$G_{1714}^{2j} = - G_{1417}^{2j} \tag{E.294}$$

$$G_{1716}^{2j} = - G_{1617}^{2j} \tag{E.295}$$

$$G_{1718}^{2j} = 2m_{vw}[5,6] \sin \theta_2' \dot{\theta}_1 \tag{E.296}$$

$$G_{181}^{2j} = - \frac{1}{2} G_{118}^{2j} \tag{E.297}$$

$$\begin{aligned}
G_{172}^{2j} = & - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30 \phi) q_{6j-4}^2 + (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 + \right. \right. \\
& + (-6 - 30 \phi) q_{6j+2}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \Big] + \\
& + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[2 \left(-13 + 31,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6j-4}^2 + 2 \left(-3 - 7 \phi - 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j}^2 + \right. \\
& + 2 \left(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6j+2}^2 + \left. \left. \left(4 + 7 \phi + 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6j+6}^2 \right] \right\} \dot{\theta}_2 - \\
& - \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30 \phi) q_{6j-4}^2 + (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j}^2 + \right. \right. \\
& + (-6 - 30 \phi) q_{6j+2}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6j+6}^2 \Big] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[2 \left(-13 + 31,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6J-4}^2 + 2 \left(-3 - 7 \phi - 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6J}^2 + \right. \\
& \left. + 2 \left(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6J+2}^2 + \left(4 + 7 \phi + 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6J+6}^2 \right] \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.298})
\end{aligned}$$

$$G_{183}^{2J} = - G_{318}^{2J} \quad (\text{E.299})$$

$$\begin{aligned}
G_{184}^{2J} = & - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho I_z}{30(1+\phi)^2} \left[(6 - 30 \phi) q_{6J-4}^2 + (-2 - 10 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6J}^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + (-6 - 30 \phi) q_{6J+2}^2 + (4 + 5 \phi + 10 \phi^2) I_2 q_{6J+6}^2 \right] + \right. \\
& \left. + \frac{m_2 I_2^2}{420(1+\phi)^2} \left[2 \left(-13 + 31,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6J-4}^2 + 2 \left(-3 - 7 \phi - 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6J}^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \left(-22 - 38,5 \phi - 17,5 \phi^2 \right) q_{6J+2}^2 + \left(4 + 7 \phi + 3,5 \phi^2 \right) I_2 q_{6J+6}^2 \right] \right\} \dot{q}_5^1 \quad (\text{E.300})
\end{aligned}$$

$$G_{187}^{2J} = - G_{718}^{2J} \quad (\text{E.301})$$

$$G_{189}^{2J} = - G_{918}^{2J} \quad (\text{E.302})$$

$$G_{1810}^{2J} = - G_{1018}^{2J} \quad (\text{E.303})$$

$$G_{1811}^{2J} = - G_{1118}^{2J} \quad (\text{E.304})$$

$$G_{1813}^{2J} = - G_{1318}^{2J} \quad (\text{E.305})$$

$$G_{1815}^{2J} = - G_{1518}^{2J} \quad (\text{E.306})$$

$$G_{1816}^{2J} = - G_{1618}^{2J} \quad (\text{E.307})$$

$$G_{1817}^{2J} = - G_{1718}^{2J} \quad (\text{E.308})$$

MATRIZ GIROSCÓPICA $[G_{3j}^e]$

$$\begin{aligned}
G_{12}^{1j} = & \left\{ -2 \left[(L_2)^2 + 2I_2 q_{6n_2+1}^2 + (q_{6n_2+1}^2)^2 \right] m_3 I_3 \cos \theta'_2 \text{sen} \theta'_2 + \right. \\
& + 2(q_{6n_2+2}^2)^2 m_3 I_3 \cos \theta'_2 \text{sen} \theta'_2 - 2 \left[(j-1)^2 m_3 I_3^3 + (j-1) m_3 I_3^2 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) + \right. \\
& + A1 \left. \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + 2 A2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - 2q_{6n_1+3}^1 \left(I_2 + q_1^2 \right) m_3 I_3 \text{sen} \theta'_2 - 2q_{6n_1+3}^1 q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \cos \theta'_2 - \\
& - 2q_{6n_1+3}^1 m_3 I_3 \left[(j-1) I_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - 2q_{6n_1+3}^1 m_3 I_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{I_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{I_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - 2q_{6n_2+2}^2 \left(L_2 + q_{6n_2+1}^2 \right) m_3 I_3 \left(\cos^2 \theta'_2 - \text{sen}^2 \theta'_2 \right) - \\
& - 2 \left(L_2 + q_{6n_2+1}^2 \right) m_3 I_3 \left[(j-1) I_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \left[\cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen} \theta'_2 + \right. \\
& + \left. \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \cos \theta'_2 \right] + 2 \left(L_2 + q_{6n_2+1}^2 \right) m_3 I_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{I_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \left. \frac{I_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \left[\text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen} \theta'_2 - \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \cos \theta'_2 \right] + 2q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \left[(j-1) I_3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \left(\cos^2 \theta'_2 - \text{sen}^2 \theta'_2 \right) + 2q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{I_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \left. \frac{I_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \left[\text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \cos \theta'_2 + \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen} \theta'_2 \right] - 2(j-1) m_3 I_3^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \right. \\
& + \left. \frac{I_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{I_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \left(\cos^2 \theta'_2 - \text{sen}^2 \theta'_2 \right) - \frac{1}{2} A4 \left(\cos^2 \theta'_2 - \text{sen}^2 \theta'_2 \right) \left. \right\} \dot{\theta}_1 + \\
& + \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2) (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 I_3 \cos \theta'_2 + (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \text{sen} \theta'_2 - \right. \\
& - (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 I_3 \left[(j-1) I_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - (L_2 + q_{6n_2+1}^2) (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 I_3 \cos \theta'_2 + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \text{sen} \theta'_2 - \\
& - (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \left[(j-1) I_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \\
& + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{I_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{I_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \cos\theta'_2 + \\
& + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \text{sen}\theta'_2 - \\
& - (j-1)m_3 l_3^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - \left. \frac{1}{2} A5 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{2} A6 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_2 \tag{E.309}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{13}^{1j} = & \left\{ -2 \left[(j-1)^2 m_3 l_3^3 + (j-1) m_3 l_3^2 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) + A1 \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\
& + 2A2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - 2(q_{6n_2+2}^2 + L_2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - 2q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \left. \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \cos\theta'_2 - 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \left(\cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) \right) - \frac{1}{2} A4 \left(\cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \right. \\
& - \left. \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \left. \right\} \dot{\theta}_1 + 2 \left\{ -(L_{y1} + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\
& \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + 2(L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \left. \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - (j-1) m_2 l_2^2 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - \left. \frac{1}{2} A5 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{2} A6 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \left. \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \left. \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - (j-1) m_3 l_3^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \right.
\end{aligned}$$

$$- \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \left. \begin{aligned} &\cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} A5 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{2} A6 \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \end{aligned} \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.310})$$

$$G_{15}^{ij} = \left\{ \begin{aligned} &2(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 + 2 \left[q_{6n_1+3}^1 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \right] m_3 l_3 - 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \sin \theta'_2 \cos \theta'_2 + 2m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (q_{6j-6}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos \theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\ &\left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos \theta'_2 \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \end{aligned} \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.311})$$

$$G_{16}^{ij} = \left\{ \begin{aligned} &2q_{6n_1+2}^1 m_3 l_3 + 2(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 + 2(L_2 + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \cos \theta'_2 - \\ &- 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \sin \theta'_2 + 2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \\ &- 2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \end{aligned} \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.312})$$

$$G_{17}^{ij} = \left\{ \begin{aligned} &-2 \left[(L_2)^2 + 2l_2 q_{6n_2+1}^2 + (q_{6n_2+1}^2)^2 \right] m_3 l_3 \cos \theta'_2 \sin \theta'_2 + \\ &+ 2(q_{6n_2+2}^2)^2 m_3 l_3 \cos \theta'_2 \sin \theta'_2 - 2 \left[(j-1)^2 m_3 l_3^3 + (j-1) m_3 l_3^2 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) + \right. \\ &+ A1 \left. \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \sin(\theta'_2 + \theta'_3) + 2 A2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \sin(\theta'_2 + \theta'_3) - 2q_{6n_1+3}^1 \left(l_2 + \right. \\ &+ q_1^2 \left. \right) m_3 l_3 \sin \theta'_2 - 2q_{6n_1+3}^1 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \cos \theta'_2 - 2q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\ &+ \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \left. \right] \sin(\theta'_2 + \theta'_3) - 2q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\ &- \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - 2q_{6n_2+2}^2 (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\cos^2 \theta'_2 - \sin^2 \theta'_2 \right) - \\ &- 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \left[\cos(\theta'_2 + \theta'_3) \sin \theta'_2 + \right. \\ &+ \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \cos \theta'_2 \left. \right] + 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\ &- \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \left. \right) \left[\sin(\theta'_2 + \theta'_3) \sin \theta'_2 - \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \cos \theta'_2 \right] + 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\ &+ \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \left. \right] \left(\cos^2 \theta'_2 - \sin^2 \theta'_2 \right) + 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\ &- \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \left. \right) \left[\sin(\theta'_2 + \theta'_3) \cos \theta'_2 + \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \sin \theta'_2 \right] - 2(j-1) m_3 l_3^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \right. \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \left(\cos^2 \theta'_2 - \text{sen}^2 \theta'_2 \right) - \frac{1}{2} A4 \left(\cos^2 \theta'_2 - \text{sen}^2 \theta'_2 \right) \Big\} \dot{\theta}_1 + \\
& + 2 \left\{ - (L_2 + q_{6n_2+1}^2) (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 \cos \theta'_2 + (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen} \theta'_2 - \right. \\
& - (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - (L_2 + \\
& + q_{6n_2+1}^2) (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \cos \theta'_2 + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen} \theta'_2 - \\
& - (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + (L_{z2} + \\
& + q_{6n_2+3}^2) \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \cos \theta'_2 + \\
& + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \text{sen} \theta'_2 - \\
& - (j-1) m_3 l_3^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - \frac{1}{2} A5 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{2} A6 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_2 + 2 \left\{ - (L_{y1} + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \Big] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\
& + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \Big] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + 2 (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \Big) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - (j-1) m_2 l_2^2 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& \left. - \frac{1}{2} A5 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{2} A6 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_3 \tag{E.312}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{18}^{ij} & = \left\{ 2 (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos^2 \theta'_2 - 2 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen} \theta'_2 \cos \theta'_2 + 2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \Big] \cos \theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + 2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \Big) \cos \theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 - 2 \left\{ m_3 l_3 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \right] \text{sen} \theta'_2 \right\} (\dot{\theta}_1 + \dot{q}_5^1) \tag{E.313}
\end{aligned}$$

$$G_{19}^{ij} = \left\{ 2 (q_{6n_2+2}^2) m_3 l_3 \text{sen}^2 \theta'_2 - 2 q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \text{sen} \theta'_2 - 2 (L_2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + q_{6n_2+1}^2 m_3 l_3 \cos\theta'_2 \text{sen}\theta'_2 - 2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}\theta'_2 \cos\theta'_2 + \\
& + 2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 + \\
& \left\{ - 2 m_3 l_3 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}^2) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) + \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \right] \cos\theta'_2 \right\} (\dot{\theta}_1 + \dot{q}_5^1) \tag{E.314}
\end{aligned}$$

$$G_{110}^{1j} = \left\{ 2 m_3 l_3 q_{6n_2+3}^2 + 2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.315}$$

$$\begin{aligned}
G_{111}^{ij} = & \left\{ - 2 \left[(j-1)^2 m_3 l_3^3 + (j-1) m_3 l_3^2 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) + A1 \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \right. \\
& + \theta'_3) + 2 A2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - 2 q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - 2 q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) - \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - 2 (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - 2 (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos\theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + 2 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - 2 (j-1) m_3 l_3^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) (\cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3)) - \frac{1}{2} A4 (\cos^2\theta'_2 - \text{sen}^2\theta'_2) \Big\} \dot{\theta}_1 + \\
& + 2 \left\{ - (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \right. \\
& - (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \\
& + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - (j-1) m_3 l_3^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& \left. - \frac{1}{2} A5 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{2} A6 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + 2 \left\{ - (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \Big] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \sin(\theta'_2 + \theta'_3) - (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \Big] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \sin(\theta'_2 + \theta'_3) - (j-1) m_3 l_3^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \right. \\
& \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} A5 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{2} A6 \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (E.316)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{112}^{ij} = & \left\{ (j-1) m_3 l_3^2 \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + q_{6n_1+3}^1 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + (L_2 + \right. \\
& \left. + q_{6n_1+1}^1) m_3 l_3 \cos \theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \sin \theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{m_3 l_3}{3} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right) \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2 \text{muv}[1,2] q_{6j-4}^3 + 2 \text{muv}[1,6] q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \text{muv}[1,8] q_{6j+2}^3 + 2 \text{muv}[1,12] q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.317)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{113}^{ij} = & \left\{ - q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \sin(\theta'_2 + \theta'_3) - (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos \theta'_2 \sin(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\
& \left. + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \sin \theta'_2 \sin(\theta'_2 + \theta'_3) - (j-1) m_3 l_3^2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \sin(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\
& \left. + \left(\text{mu}[2,2] q_{6j-4}^3 + 2 \text{mu}[2,6] q_{6j}^3 + 2 \text{mu}[2,8] q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \text{mu}[2,12] q_{6j+6}^3 \right) \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(\text{mv}[2,2] q_{6j-4}^3 + 2 \text{mv}[2,6] q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \text{mv}[2,8] q_{6j+2}^3 + 2 \text{mv}[2,12] q_{6j+6}^3 \right) \sin^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2 \text{muv}[1,2] q_{6j-5}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \text{muv}[2,4] q_{6j-2}^3 + 2 \text{muv}[2,7] q_{6j+1}^3 + 2 \text{muv}[2,10] q_{6j+4}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 - \\
& - 2 \left\{ m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + \frac{1}{2} (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) + \text{mv}[2,2] q_{6j-3}^3 + \text{mv}[8,12] q_{6j-1}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \text{mv}[2,8] q_{6j+3}^3 + \text{mv}[6,8] q_{6j+5}^3 \right) \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) + \text{mv}[2,2] q_{6j-3}^3 + \text{mv}[8,12] q_{6j-1}^3 + \text{mv}[2,8] q_{6j+3}^3 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ mv[6,8]q_{6j+5}^3 \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) \left\{ \dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2 \right\} + \left\{ \text{muv}[1,2] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-5}^3 \quad (\text{E.318})$$

$$G_{114}^{ij} = \left\{ m_3 I_3 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \right] + \left[\text{mu}[3,3]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \text{mu}[3,5]q_{6j-1}^3 + 2 \text{mu}[3,9]q_{6j+3}^3 + 2 \text{mu}[3,11]q_{6j+5}^3 \right] \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\ \left. + \left[\text{mw}[3,3]q_{6j-3}^3 + 2 \text{mw}[3,5]q_{6j-1}^3 + 2 \text{mw}[3,9]q_{6j+3}^3 + 2 \text{mw}[3,11]q_{6j+5}^3 \right] \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.319})$$

$$G_{115}^{ij} = \left\{ \left[\text{mv}[4,4]q_{6j-2}^3 + 2 \text{mv}[4,10]q_{6j+4}^3 \right] \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \left[\text{mw}[4,4]q_{6j-2}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \text{mw}[4,10]q_{6j+4}^3 \right] - \frac{1}{2} \left[2 \text{muv}[2,4]q_{6j-4}^3 + 2 \text{muv}[4,6]q_{6j}^3 + 2 \text{muv}[4,8]q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \text{mu}[4,12]q_{6j+6}^3 \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 - \left\{ \frac{1}{2} \left[2 \text{muw}[3,4]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \text{muw}[4,5]q_{6j-1}^3 + 2 \text{muw}[4,9]q_{6j+3}^3 + 2 \text{mu}[4,11]q_{6j+5}^3 \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) - \\ - \left\{ \frac{1}{2} \left[2 \text{muw}[3,4]q_{6j-3}^3 + 2 \text{muw}[4,5]q_{6j-1}^3 + 2 \text{muw}[4,9]q_{6j+3}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \text{mu}[4,11]q_{6j+5}^3 \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.320})$$

$$G_{116}^{ij} = \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_3 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \right] + \left[2 \text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2 \text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2 \text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right] \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\ \left. + \left[2 \text{mw}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2 \text{mw}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2 \text{mw}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2 \text{mw}[5,11]q_{6j+5}^3 \right] \right\} \dot{\theta}_1 + \\ + 2 \left\{ -\frac{1}{12} (L_{z2} + q_{6n_2+2}^2) m_3 I_3^2 \text{sen} \theta'_2 + \frac{1}{12} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \cos \theta'_2 + \frac{1}{12} (j - \right. \\ \left. - 1) m_3 I_3^3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left[\text{muv}[1,6]q_{6j-5}^3 + \text{muv}[6,7]q_{6j+1}^3 \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\ \left. + \left[\text{muw}[3,6]q_{6j-4}^3 + \text{muw}[5,6]q_{6j}^3 + \text{muw}[6,9]q_{6j+2}^3 + \text{muw}[6,11]q_{6j+6}^3 \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \right. \\ \left. - \left[\text{muw}[10,11]q_{6j-2}^3 + \text{muw}[10,12]q_{6j+4}^3 \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\ + 2 \left\{ \frac{1}{12} (j - 1) m_3 I_3^3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left[\text{muv}[1,6]q_{6j-5}^3 + \text{muv}[6,7]q_{6j+1}^3 \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\text{muw}[3,6]q_{6j-4}^3 + \text{muw}[5,6]q_{6j}^3 + \text{muw}[6,9]q_{6j+2}^3 + \text{muw}[6,11]q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - \left(\text{muw}[10,11]q_{6j-2}^3 + \text{muw}[10,12]q_{6j+4}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \left\{ (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) - \right. \\
& - 2 \left\{ \frac{1}{12} m_3 I_3^3 \cos^2 \theta'_2 \right\} \dot{q}_{6n_2+1}^2 + \left\{ \text{muv}[1,6] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-5}^3 + \\
& + 2 \left\{ \frac{1}{12} m_3 I_3^2 \right\} \dot{q}_{6n_1+3}^1 - \left\{ 2\text{muv}[4,6] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-2}^3 + \left\{ 2\text{muw}[3,6] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-4}^3 \\
& \hspace{20em} \text{(E.321)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{117}^{1j} = & \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_3^2 \dot{q}_{6n_1+3}^1 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \cos \theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\
& + \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \text{sen} \theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{6} (j-1) m_3 I_3^3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \\
& + \left(2\text{mu}[2,6]q_{6j-4}^3 + \text{mu}[6,6]q_{6j}^3 + 2\text{mu}[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mu}[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \\
& + \left(2\text{mv}[2,6]q_{6j-4}^3 + \text{mv}[6,6]q_{6j}^3 + 2\text{mv}[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mv}[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \\
& + \frac{1}{2} \left(2\text{muv}[1,6]q_{6j-5}^3 + 2\text{muv}[4,6]q_{6j-2}^3 + 2\text{muv}[6,7]q_{6j+1}^3 + \right. \\
& \left. 2\text{muv}[6,10]q_{6j+4}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \left\{ \dot{\theta}_1 + 2 \left\{ -\frac{1}{12} \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + \right. \right. \right. \\
& + q_{6n_2+3}^2) \right] m_3 I_3^2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2\text{mvw}[3,6]q_{6j-3}^3 + 2\text{mvw}[5,6]q_{6j-1}^3 + 2\text{mvw}[6,9]q_{6j+3}^3 + \right. \\
& + 2\text{mvw}[5,12]q_{6j+5}^3 \left. \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \left\{ (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + 2 \left(2\text{mvw}[3,6]q_{6j-3}^3 + 2\text{mvw}[5,6]q_{6j-1}^3 + \right. \right. \\
& + 2\text{mvw}[6,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mvw}[5,12]q_{6j+5}^3 \left. \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \left\{ (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) + \right. \\
& + 2 \left\{ \text{mvw}[3,6] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-3}^3 + 2 \left\{ \text{mvw}[5,6] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-1}^3 \\
& \hspace{20em} \text{(E.322)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{118}^{1j} = & \left\{ (j-1) m_3 I_3^2 \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + m_3 I_3^2 \dot{q}_{6n_1+3}^1 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + (L_2 + \right. \\
& + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3 \cos \theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \text{sen} \theta'_2 \cos \theta'_2 + \left(2\text{mu}[1,7]q_{6j-5}^3 + \right. \\
& + \text{mu}[7,7]q_{6j+1}^3 \left. \right) \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2\text{muv}[2,7]q_{6j-4}^3 + 2\text{muv}[6,7]q_{6j}^3 + 2\text{muv}[7,8]q_{6j+2}^3 + \right. \\
& + 2\text{muv}[7,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \left\{ \dot{\theta}_1 + 2 \left\{ -\frac{1}{2} \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2\text{muw}[3,7]q_{6j-3}^3 + 2\text{muw}[5,7]q_{6j-1}^3 + 2\text{muw}[7,9]q_{6j+3}^3 + \right. \\
& \left. + 2\text{muw}[7,11]q_{6j+5}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \left\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + 2 \left\{ -\frac{1}{2} \left((L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2\text{muw}[3,7]q_{6j-3}^3 + 2\text{muw}[5,7]q_{6j-1}^3 + 2\text{muw}[7,9]q_{6j+3}^3 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\text{muw}[7,11]q_{6j+5}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.323})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{119}^{ij} = & \left\{ -q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos\theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\
& + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - (j-1) m_3 l_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \\
& + \left(2\text{mu}[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\text{mu}[6,8]q_{6j}^3 + \text{mu}[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mu}[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \\
& + \left(2\text{mv}[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\text{mv}[6,8]q_{6j}^3 + \text{mv}[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mv}[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - \frac{1}{2} \left(2\text{muv}[1,8]q_{6j-5}^3 + 2\text{muv}[4,8]q_{6j-2}^3 + 2\text{muv}[7,8]q_{6j+1}^3 + \right. \\
& \left. + 2\text{muv}[8,10]q_{6j+4}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_2) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \left\} \dot{\theta}_1 + 2 \left\{ -\frac{1}{2} m_3 l_3 \left((L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + q_{6n_2+3}^2) \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2\text{mvw}[3,8]q_{6j-3}^3 + 2\text{mvw}[5,8]q_{6j-1}^3 + 2\text{mvw}[8,9]q_{6j+3}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\text{mvw}[8,12]q_{6j+5}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + 2 \left\{ -\frac{1}{2} m_3 l_3 \left((L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + q_{6n_2+3}^2) \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2\text{mvw}[3,8]q_{6j-3}^3 + 2\text{mvw}[5,8]q_{6j-1}^3 + 2\text{mvw}[8,9]q_{6j+3}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\text{mvw}[8,12]q_{6j+5}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.324})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{120}^{ij} = & \left\{ m_3 l_3 \left((L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \right) + \left(2\text{mu}[3,9]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,9]q_{6j-1}^3 + \right. \right. \\
& + \text{mu}[9,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[9,11]q_{6j+5}^3 \left. \right) \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(2\text{mw}[3,9]q_{6j-3}^3 + 2\text{mw}[5,9]q_{6j-1}^3 + \right. \\
& \left. + \text{mw}[9,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mw}[9,11]q_{6j+5}^3 \right) \left\} \dot{\theta}_1 + \left\{ \text{muw}[1,8] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-6}^3 +
\end{aligned}$$

$$+ 2 \left\{ \text{mvw}[2,9] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-4}^3 + 2 \left\{ \text{mvw}[2,3] \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j+2}^3 \quad (\text{E.325})$$

$$\begin{aligned} G_{121}^{ij} = & \left\{ \left(2\text{mv}[4,10]q_{6j-2}^3 + \text{mv}[10,10]q_{6j+4}^3 \right) \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(2\text{mw}[4,10]q_{6j-2}^3 + \right. \right. \\ & + \left. \text{mw}[10,10]q_{6j+4}^3 \right) - \frac{1}{2} \left(2\text{muv}[2,10]q_{6j-4}^3 + 2\text{muv}[6,10]q_{6j}^3 + 2\text{muv}[8,10]q_{6j+2}^3 + \right. \\ & + \left. 2\text{muv}[10,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_1 - \left\{ 2\text{muw}[3,10]q_{6j-3}^3 + \right. \\ & + \left. 2\text{muw}[10,12]q_{6j-1}^3 + 2\text{muw}[4,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{muw}[10,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) - \\ & - 2 \left\{ 2\text{muw}[3,10]q_{6j-3}^3 + 2\text{muw}[10,12]q_{6j-1}^3 + 2\text{muw}[4,9]q_{6j+3}^3 + \right. \\ & + \left. 2\text{muw}[10,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.326}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{122}^{ij} = & \left\{ \frac{1}{6} m_3 I_3 \left((L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \right) + \left(2\text{mu}[3,11]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\ & + \left. 2\text{mu}[5,11]q_{6j-1}^3 + \text{mu}[9,11]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[11,11]q_{6j+5}^3 \right) \text{cos}^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \\ & + \left. \left(2\text{mw}[3,11]q_{6j-3}^3 + 2\text{mw}[5,11]q_{6j-1}^3 + \text{mw}[9,11]q_{6j+3}^3 + 2\text{mw}[11,11]q_{6j+5}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_1 - \\ & - \left\{ \text{muv}[6,7] \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-5}^3 - 2 \left\{ \text{mvw}[2,3] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-4}^3 + \\ & + 2 \left\{ \text{mvw}[5,12] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j}^3 \quad (\text{E.327}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{123}^{ij} = & \left\{ \frac{1}{6} q_{6n_1+3}^1 m_3 I_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{cos}\theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \right. \\ & - \left. \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{6} (j-1) m_3 I_3^3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\ & + \left(2\text{mu}[2,12]q_{6j-4}^3 + 2\text{mu}[6,12]q_{6j}^3 + \text{mu}[8,12]q_{6j+2}^3 + \right. \\ & + \left. 2\text{mu}[12,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(2\text{mv}[2,12]q_{6j-4}^3 + 2\text{mv}[6,12]q_{6j}^3 + \right. \\ & + \left. \text{mv}[8,12]q_{6j+2}^3 + 2\text{mv}[12,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2\text{muv}[1,12]q_{6j-5}^3 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2muv[4,12]q_{6j-2}^3 + 2muv[7,12]q_{6j+1}^3 + 2muv[10,12]q_{6j+4}^3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 + \\
& + 2 \left\{ \frac{1}{12} m_3 l_3^2 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left[2mvw[3,12]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\
& + 2mvw[5,12]q_{6j-1}^3 + 2mvw[9,12]q_{6j+3}^3 - 2mvw[11,12]q_{6j+5}^3 \Big] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ \frac{1}{12} m_3 l_3^2 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left[2mvw[3,12]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\
& + 2mvw[5,12]q_{6j-1}^3 + 2mvw[9,12]q_{6j+3}^3 - 2mvw[11,12]q_{6j+5}^3 \Big] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \\
& \hspace{15em} \text{(E.327)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{21}^{1j} & = -\frac{1}{2} \left\{ -2 \left[(L_2)^2 + 2l_2 q_{6n_2+1}^2 + (q_{6n_2+1}^2)^2 \right] m_3 l_3 \cos\theta'_2 \text{sen}\theta'_2 + \right. \\
& + 2(q_{6n_2+2}^2)^2 m_3 l_3 \cos\theta'_2 \text{sen}\theta'_2 - 2 \left[(j-1)^2 m_3 l_3^3 + (j-1) m_3 l_3^2 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) + \right. \\
& + A1 \Big] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + 2 A2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - 2q_{6n_1+3}^1 \left(l_2 + q_1^2 \right) m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 - 2q_{6n_1+3}^1 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \cos\theta'_2 - 2q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\
& + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \Big] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - 2q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \Big) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - 2q_{6n_2+2}^2 \left(L_2 + q_{6n_2+1}^2 \right) m_3 l_3 \left(\cos^2\theta'_2 - \text{sen}^2\theta'_2 \right) - \\
& - 2 \left(L_2 + q_{6n_2+1}^2 \right) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \left[\cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}\theta'_2 + \right. \\
& + \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \cos\theta'_2 \Big] + 2 \left(L_2 + q_{6n_2+1}^2 \right) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \Big) \left[\text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}\theta'_2 - \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \cos\theta'_2 \right] + 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \\
& + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \Big] \left(\cos^2\theta'_2 - \text{sen}^2\theta'_2 \right) + 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \Big) \left[\text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \cos\theta'_2 + \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}\theta'_2 \right] - 2(j-1) m_3 l_3^2 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \right. \\
& + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \Big) \left(\cos^2\theta'_2 - \text{sen}^2\theta'_2 \right) - \frac{1}{2} A4 \left(\cos^2\theta'_2 - \text{sen}^2\theta'_2 \right) \Big\} \dot{\theta}_1 \\
& \hspace{15em} \text{(E.328)}
\end{aligned}$$

$$G_{23}^{1j} = \left\{ -2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}\theta'_3 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos\theta'_3 - \\
& - 2 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_3 - 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \right. \\
& + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \left. \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \left. \right] \text{sen}\theta'_3 + (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos\theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_3 - \\
& - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.329})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{24}^{ij} & = \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_3 + \left\{ (L_2 + q_1^2)m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 + q_2^2 m_3 l_3 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.330})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{25}^{ij} & = 2 \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \cos\theta'_3 + m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \left. \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.331})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{26}^{ij} & = \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\
& + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.332})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{28}^{ij} & = \left\{ 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 + 2m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_3 + \right. \\
& + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + 2 \left\{ m_3 l_3 \left[(j- \right. \right. \\
& - 1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \left. \right] \cos\theta'_3 + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \left. \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.333})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{29}^{1j} = & 2 \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + 2 \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos} \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{E.334}$$

$$\begin{aligned}
G_{210}^{1j} = & 2 \left\{ - (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 - q_{6j+2}^3 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} (\theta'_2 + \theta'_3) - m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos} (\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.335}$$

$$\begin{aligned}
G_{211}^{1j} = & 2 \left\{ -2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + 2(L_2 + \right. \\
& \left. + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos} \theta'_3 - 2 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j- \right. \\
& \left. - 1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{cos} \theta'_3 - 2 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ - (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos} \theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{cos} \theta'_3 - \right. \\
& \left. - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen} \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_3 + \\
& \left\{ - (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + \right. \\
& \left. + (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos} \theta'_3 - \right. \\
& \left. - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{cos} \theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \text{sen}\theta'_3 \dot{q}_6^2 + 2 \left\{ m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_3 + \right. \\
& + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} \dot{q}_{6n_2+1}^2 + \\
& + 2 \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_3 + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+2}^2 \tag{E.336}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{212}^{ij} & = 2 \left\{ (j-1) m_3 l_3^2 + (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos\theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} m_3 l_3 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ \frac{1}{3} m_3 l_3 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.337}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{213}^{ij} & = \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \cos\theta'_3 + \left(\mu[2,2] q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& + 2 \mu[2,6] q_{6j}^3 + 2 \mu[2,8] q_{6j+2}^3 + 2 \mu[2,12] q_{6j+6}^3 \left. \right) + \left(m\nu[2,2] q_{6j-4}^3 + \right. \\
& \left. + 2 m\nu[2,6] q_{6j}^3 + 2 m\nu[2,8] q_{6j+2}^3 + 2 m\nu[2,12] q_{6j+6}^3 \right) \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \cos\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.338}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{214}^{ij} & = 2 \left\{ -\frac{1}{2} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 - \frac{1}{2} q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \cos\theta'_3 - \left(2\mu w[1,3] q_{6j-5}^3 + \right. \right. \\
& + 2 \mu w[3,4] q_{6j-2}^3 + 2 \mu w[3,7] q_{6j+1}^3 + 2 \mu w[3,10] q_{6j+4}^3 \left. \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - \left(2m\nu w[2,3] q_{6j-4}^3 + 2 m\nu w[3,6] q_{6j}^3 + 2 m\nu w[3,8] q_{6j+2}^3 + \right. \\
& \left. + 2 m\nu w[3,12] q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_1 + \left\{ \mu[3,3] q_{6j-3}^3 + 2 \mu[3,5] q_{6j-1}^3 + \right. \\
& + 2 \mu[3,9] q_{6j+3}^3 + 2 \mu[3,11] q_{6j+5}^3 \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ \mu[3,3] q_{6j-3}^3 + 2 \mu[3,5] q_{6j-1}^3 + \right. \\
& \left. + 2 \mu[3,9] q_{6j+3}^3 + 2 \mu[3,11] q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.339}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{215}^{1j} = & - \left\{ \left(\text{muw}[3,4]q_{6j-3}^3 + \text{muw}[4,5]q_{6j-1}^3 + \text{muw}[4,9]q_{6j+3}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \text{muw}[4,11]q_{6j+5}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 + \left\{ \text{mv}[4,4]q_{6j-2}^3 + 2 \text{mv}[4,10]q_{6j+4}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ \text{mv}[4,4]q_{6j-2}^3 + 2 \text{mv}[4,10]q_{6j+4}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.340})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{216}^{1j} = & \left\{ 2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + \right. \\
& \left. + 2\text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ 2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + \right. \\
& \left. + 2\text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.341})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{217}^{1j} = & \left\{ \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3 \text{sen}\theta'_3 + \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \cos\theta'_3 + \right. \\
& + \left(2\text{mu}[2,6]q_{6j-4}^3 + \text{mu}[6,6]q_{6j}^3 + 2\text{mu}[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mu}[6,12]q_{6j+6}^3 \right) + \\
& + \left(2\text{mv}[2,6]q_{6j-4}^3 + \text{mv}[6,6]q_{6j}^3 + 2\text{mv}[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mv}[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \left\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3 \text{sen}\theta'_3 + \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \cos\theta'_3 + \right. \\
& + \left(2\text{mu}[2,6]q_{6j-4}^3 + \text{mu}[6,6]q_{6j}^3 + 2\text{mu}[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mu}[6,12]q_{6j+6}^3 \right) + \\
& + \left(2\text{mv}[2,6]q_{6j-4}^3 + \text{mv}[6,6]q_{6j}^3 + 2\text{mv}[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mv}[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \left\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) + \\
& + \text{muv}[4,6]q_{6j-2}^3 \quad (\text{E.342})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{218}^{1j} = & \left\{ (j-1)m_3 I_3^2 + (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3 \cos\theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \text{sen}\theta'_3 + \right. \\
& + 2\text{mu}[1,7]q_{6j-5}^3 + \text{mu}[7,7]q_{6j+1}^3 \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E.343})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{219}^{1j} = & \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3 \text{sen}\theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \cos\theta'_3 + \left(2\text{mu}[2,8]q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& + 2\text{mu}[6,8]q_{6j}^3 + \text{mu}[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mu}[8,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) + \left(2\text{mv}[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\text{mv}[6,8]q_{6j}^3 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + mv[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[8,12]q_{6j+6}^3 \Big\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ \left(2mu[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mu[6,8]q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& + mu[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mu[8,12]q_{6j+6}^3 \Big) + \left(2mv[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,8]q_{6j}^3 + \right. \\
& \left. \left. + mv[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (E.343)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{220}^{ij} = & \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 I_3 \text{sen}\theta'_2 - q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \text{cos}\theta'_2 - (j-1)m_3 I_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\
& - \frac{1}{2} \left(2muw[2,3]q_{6j-5}^3 + 2muw[3,4]q_{6j-2}^3 + 2muw[3,7]q_{6j+1}^3 + \right. \\
& \left. + 2muw[3,10]q_{6j+4}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2mvw[2,3]q_{6j-4}^3 + 2mvw[3,6]q_{6j}^3 + \right. \\
& \left. + 2mvw[3,8]q_{6j+2}^3 + 2mvw[3,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 + \left\{ 2mu[3,9]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& + 2mu[5,9]q_{6j-1}^3 + mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2mu[9,11]q_{6j+5}^3 \Big\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ 2mu[3,9]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& \left. + 2mu[5,9]q_{6j-1}^3 + mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (E.344)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{221}^{ij} = & \left\{ \left(2muw[3,10]q_{6j-3}^3 + 2muw[10,12]q_{6j-1}^3 + 2muw[4,9]q_{6j+3}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2muw[10,11]q_{6j+5}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 + \left\{ 2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ 2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) + \left\{ 2muw[3,10] \right\} \dot{q}_{6j-4}^3 \quad (E.345)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{222}^{ij} = & 2 \left\{ -\frac{1}{12} (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{12} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_2 - \right. \\
& - \frac{1}{12} (j-1)m_3 I_3^3 \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(muw[1,11]q_{6j-5}^3 + muw[4,11]q_{6j-2}^3 + \right. \\
& + muw[7,11]q_{6j+1}^3 + muw[10,11]q_{6j+4}^3 \Big) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(mvw[2,11]q_{6j-4}^3 + \right. \\
& \left. + mvw[6,11]q_{6j}^3 + mvw[8,11]q_{6j+2}^3 + mvw[11,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ 2\mu[3,11]q_{6j-3}^3 + 2\mu[5,11]q_{6j-1}^3 + \mu[9,11]q_{6j+3}^3 + 2\mu[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ 2\mu[3,11]q_{6j-3}^3 + 2\mu[5,11]q_{6j-1}^3 + \mu[9,11]q_{6j+3}^3 + 2\mu[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2)
\end{aligned} \tag{E.346}$$

$$\begin{aligned}
G_{223}^{1j} = & \left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3^2 \text{cos}\theta'_2 + \left(2\mu[2,12]q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& + 2\mu[6,12]q_{6j}^3 + \mu[8,12]q_{6j+2}^3 + 2\mu[12,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) + \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + \right. \\
& + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + \right. \\
& + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3^2 \text{cos}\theta'_2 + \left(2\mu[2,12]q_{6j-4}^3 + 2\mu[6,12]q_{6j}^3 + \right. \\
& + \mu[8,12]q_{6j+2}^3 + 2\mu[12,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) + \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + \right. \\
& + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \left. \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) + \left\{ \frac{1}{12} m_3 l_3^2 \text{sen}\theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+2}^2 + \\
& + \left\{ 2muv[4,6] \right\} \dot{q}_{6j+4}^3
\end{aligned} \tag{E.347}$$

$$\begin{aligned}
G_{31}^{1j} = & -\frac{1}{2} \left\{ -2 \left[(j-1)^2 m_3 l_3^3 + (j-1) m_3 l_3^2 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) + \right. \right. \\
& + A1 \left. \right] \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + 2A2 \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - 2(q_{6n_2+2}^2 + L_2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - 2q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) - \\
& - 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \text{cos}\theta'_2 - \\
& - 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \left(\text{cos}^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \right. \\
& \left. - \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) \right) - \frac{1}{2} A4 \left(\text{cos}^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \left. \right\} \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.348}$$

$$\begin{aligned}
G_{32}^{1j} = & -\frac{1}{2} \left\{ -2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}\theta'_3 + \right. \\
& + 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}\theta'_3 - \\
& - 2 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{cos}\theta'_3 - 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \right. \\
& \left. + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.349})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{35}^{1j} = & 2 \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.350})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{37}^{1j} = & \left\{ -2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}\theta'_3 + \right. \\
& + 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}\theta'_3 - \\
& - 2 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{cos}\theta'_3 - 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \right. \\
& \left. + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \left\{ -2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}\theta'_3 + 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}\theta'_3 - 2 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{cos}\theta'_3 - \right. \\
& \left. - 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \right\} \dot{q}_5 - \\
& - \left\{ -2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}\theta'_3 + \right. \\
& \left. + 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}\theta'_3 - \right. \\
& \left. - 2 q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{cos}\theta'_3 - 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{I_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{I_3}{12} q_{6j+6}^3 \left. \text{sen} \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.350})$$

$$G_{310}^{ij} = 2 \left\{ - \left[(j-1) I_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{I_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{I_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.351})$$

$$G_{312}^{ij} = \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3 \cos \theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \text{sen} \theta'_3 + (j-1) m_3 I_3^2 + \left(\text{mu}[1,1] q_{6j-5}^3 + 2 \text{mu}[1,7] q_{6j+1}^3 \right) + \left(\text{muv}[1,2] q_{6j-4}^3 + \text{muv}[1,6] q_{6j}^3 + \text{muv}[1,8] q_{6j+2}^3 + \text{muv}[1,12] q_{6j+6}^3 \right) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + 2 \left\{ (j-1) m_3 I_3^2 + \left(\text{mu}[1,1] q_{6j-5}^3 + 2 \text{mu}[1,7] q_{6j+1}^3 \right) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) + \left\{ m_3 I_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+2}^2 \quad (\text{E.352})$$

$$G_{313}^{ij} = \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3 \text{sen} \theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \cos \theta'_3 + \left(\text{mu}[2,2] q_{6j-4}^3 + 2 \text{mu}[2,6] q_{6j}^3 + 2 \text{mu}[2,8] q_{6j+2}^3 + 2 \text{mu}[2,12] q_{6j+6}^3 \right) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ \text{mu}[2,2] q_{6j-4}^3 + 2 \text{mu}[2,6] q_{6j}^3 + 2 \text{mu}[2,8] q_{6j+2}^3 + 2 \text{mu}[2,12] q_{6j+6}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) + \left\{ -m_3 I_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6n_1+3}^1 + \left\{ -m_3 I_3 \cos \theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+1}^2 + \left\{ m_3 I_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+2}^2 \quad (\text{E.353})$$

$$G_{314}^{ij} = \left\{ -2(j-1) m_3 I_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(2 \text{muw}[2,3] q_{6j-5}^3 + 2 \text{muw}[3,4] q_{6j-2}^3 + 2 \text{muw}[3,7] q_{6j+1}^3 + 2 \text{muw}[3,10] q_{6j+4}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(2 \text{mvw}[2,3] q_{6j-4}^3 + 2 \text{mvw}[3,6] q_{6j}^3 + 2 \text{mvw}[3,8] q_{6j+2}^3 + 2 \text{mvw}[3,12] q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 + \left\{ \text{mu}[3,3] q_{6j-3}^3 + 2 \text{mu}[3,5] q_{6j-1}^3 + 2 \text{mu}[3,9] q_{6j+3}^3 + 2 \text{mu}[3,11] q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ \text{mu}[3,3] q_{6j-3}^3 + 2 \text{mu}[3,5] q_{6j-1}^3 + 2 \text{mu}[3,9] q_{6j+3}^3 + \right.$$

$$+ 2 \mu u[3, 11]q_{6j+5}^3 \left. \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.354})$$

$$G_{315}^{1j} = \left\{ -\frac{1}{2} \left(2\mu u[3, 4]q_{6j-3}^3 + 2 \mu u[4, 5]q_{6j-1}^3 + 2 \mu u[4, 11]q_{6j+5}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \mu u[4, 9]q_{6j+3}^3 \right) \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 + \left\{ m v[4, 4]q_{6j-2}^3 + 2 m v[4, 10]q_{6j+4}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\ + \left\{ m v[4, 4]q_{6j-2}^3 + 2 m v[4, 10]q_{6j+4}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^1) \quad (\text{E.355})$$

$$G_{316}^{1j} = \left\{ 2\mu u[3, 5]q_{6j-3}^3 + 2\mu u[5, 5]q_{6j-1}^3 + 2\mu u[5, 9]q_{6j+3}^3 + 2\mu u[5, 11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\ + \left\{ 2\mu u[3, 5]q_{6j-3}^3 + 2\mu u[5, 5]q_{6j-1}^3 + 2\mu u[5, 9]q_{6j+3}^3 + 2\mu u[5, 11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.356})$$

$$G_{317}^{1j} = \left\{ -\frac{1}{2} \left(2m v w[3, 6]q_{6j-3}^3 + 2 m v w[5, 6]q_{6j-1}^3 + 2 m v w[6, 9]q_{6j+3}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 m v w[5, 12]q_{6j+5}^3 \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 + \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \text{sen} \theta_3' + \right. \\ \left. + q_{6n_2+2}^2 \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \cos \theta_3' + \left(2\mu u[2, 6]q_{6j-4}^3 + \mu u[6, 6]q_{6j}^3 + 2\mu u[6, 8]q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\mu u[6, 12]q_{6j+6}^3 \right) + \left(2m v[2, 6]q_{6j-4}^3 + m v[6, 6]q_{6j}^3 + 2m v[6, 8]q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2m v[6, 12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ \left(2\mu u[2, 6]q_{6j-4}^3 + \mu u[6, 6]q_{6j}^3 + 2\mu u[6, 8]q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\mu u[6, 12]q_{6j+6}^3 \right) + \left(2m v[2, 6]q_{6j-4}^3 + m v[6, 6]q_{6j}^3 + 2m v[6, 8]q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2m v[6, 12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) + \left\{ q_{6n_2+2}^2 \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \cos \theta_3' \right\} \dot{q}_{6n_2+1}^2 + \left\{ \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \text{sen} \theta_3' \right\} \dot{q}_{6n_2+2}^2 \quad (\text{E.357})$$

$$G_{318}^{1j} = \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos \theta_3' - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen} \theta_3' + (j - 1) m_3 l_3^2 + \right. \\ \left. + 2\mu u[1, 7]q_{6j-5}^3 + \mu u[7, 7]q_{6j+1}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ (j - 1) m_3 l_3^2 + 2\mu u[1, 7]q_{6j-5}^3 + \right. \\ \left. + \mu u[7, 7]q_{6j+1}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) + \left\{ m_3 l_3 \text{sen} \theta_3' \right\} \dot{q}_{6n_2+1}^2 + \left\{ m_3 l_3 \cos \theta_3' \right\} \dot{q}_{6n_2+2}^2 \quad (\text{E.358})$$

$$\begin{aligned}
G_{319}^{1j} = & \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 + \left(2\mu[2,8]q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& + 2\mu[6,8]q_{6j}^3 + \mu[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[8,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) + \left(2mv[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,8]q_{6j}^3 + \right. \\
& + mv[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[8,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ \left(2\mu[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& + \mu[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[8,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) + \left(2mv[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,8]q_{6j}^3 + \right. \\
& + mv[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[8,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \left. \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) + \left\{ m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+1}^2 + \\
& + \left\{ m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+2}^2 \tag{E.359}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{320}^{1j} = & \left\{ - (j - 1) m_3 l_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - - \frac{1}{2} \left(2\mu w[2,3]q_{6j-5}^3 + 2 \mu w[3,4]q_{6j-2}^3 + \right. \right. \\
& + 2 \mu w[3,7]q_{6j+1}^3 + 2 \mu w[3,10]q_{6j+4}^3 \left. \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2mvw[2,3]q_{6j-4}^3 + \right. \\
& + 2 mvw[3,6]q_{6j}^3 + 2 mvw[3,8]q_{6j+2}^3 + 2 mvw[3,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_1 + \\
& + \left\{ 2\mu[3,9]q_{6j-3}^3 + 2\mu[5,9]q_{6j-1}^3 + \mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2\mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ 2\mu[3,9]q_{6j-3}^3 + 2\mu[5,9]q_{6j-1}^3 + \mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2\mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.360}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{321}^{1j} = & \left\{ - \left(2\mu w[3,10]q_{6j-3}^3 + 2\mu w[10,12]q_{6j-1}^3 + 2\mu w[4,9]q_{6j+3}^3 + \right. \right. \\
& + 2\mu w[10,11]q_{6j+5}^3 \left. \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_1 + \left\{ 2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ 2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.360}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{322}^{1j} = & \left\{ -\frac{1}{6} (j - 1) m_3 l_3^3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(2\mu w[1,11]q_{6j-5}^3 + \mu w[4,11]q_{6j-2}^3 + \right. \right. \\
& + \mu w[7,11]q_{6j+1}^3 + \mu w[10,11]q_{6j+4}^3 \left. \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(mvw[2,11]q_{6j-4}^3 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + mvw[6,11]q_{6j}^3 + mvw[8,11]q_{6j+2}^3 + mvw[11,12]q_{6j+6}^3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 + \\
& + \left\{ 2mu[3,11]q_{6j-3}^3 + 2mu[5,11]q_{6j-1}^3 + mu[9,11]q_{6j+3}^3 + 2mu[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ 2mu[3,11]q_{6j-3}^3 + 2mu[5,11]q_{6j-1}^3 + mu[9,11]q_{6j+3}^3 + 2mu[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2)
\end{aligned} \tag{E.361}$$

$$\begin{aligned}
G_{323}^{1j} = & \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_3^2 \left((L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(2mvw[3,12]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\
& + 2mvw[5,12]q_{6j-1}^3 + 2mvw[9,12]q_{6j+3}^3 + 2mvw[11,12]q_{6j+5}^3 \Big) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 + \\
& + \left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_2 + \left(2mu[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mu[6,12]q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& + mu[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mu[12,12]q_{6j+6}^3 \Big) + \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + \right. \\
& + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \Big) \Big\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_2 - \right. \\
& - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \cos\theta'_2 + \left(2mu[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mu[6,12]q_{6j}^3 + mu[8,12]q_{6j+2}^3 + \right. \\
& + 2mu[12,12]q_{6j+6}^3 \Big) + \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + \right. \\
& + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \Big) \Big\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) + \left\{ \frac{1}{6} m_3 I_3^2 \cos\theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+1}^2 + \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+2}^2
\end{aligned} \tag{E.362}$$

$$\begin{aligned}
G_{42}^{1j} = & \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3 \text{sen}\theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3 \cos\theta'_3 - m_3 I_3 \left[(j-1) I_3 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \Big] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - m_3 I_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{1}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.363}$$

$$\begin{aligned}
G_{43}^{1j} = & \left\{ -m_3 I_3 \left[(j-1) I_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - m_3 I_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{1}{12} q_{6j+6}^3 \Big) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -m_3 I_3 \left[(j-1) I_3 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \left. \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ -m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{E.364}$$

$$\begin{aligned}
G_{47}^{ij} & = \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \operatorname{sen} \theta_3' - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \cos \theta_3' - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \left. \right\} \operatorname{sen}(\theta_2' + \theta_3') - m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \operatorname{sen}(\theta_2' + \theta_3') - \right. \\
& \left. - m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{E.365}$$

$$G_{48}^{ij} = \left\{ 2m_3 l_3 \cos \theta_2' \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \tag{E.366}$$

$$G_{49}^{ij} = \left\{ -2m_3 l_3 \operatorname{sen} \theta_2' \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \tag{E.367}$$

$$\begin{aligned}
G_{411}^{ij} & = \left\{ -2m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \operatorname{sen}(\theta_2' + \theta_3') - 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& \left. \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -2m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \left. \right\} \operatorname{sen}(\theta_2' + \theta_3') - 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\
& \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \left. \right\} \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \operatorname{sen}(\theta_2' + \theta_3') - \right. \\
& \left. - m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{q}_6^2
\end{aligned} \tag{E.368}$$

$$G_{412}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ m_3 l_3 \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.369}$$

$$G_{413}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \operatorname{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -m_3 l_3 \operatorname{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.370}$$

$$G_{417}^{ij} = \left\{ -\frac{1}{6} m_3 l_3^2 \operatorname{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -\frac{1}{6} m_3 l_3^2 \operatorname{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.371}$$

$$G_{418}^{iJ} = \left\{ m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E. 372})$$

$$G_{419}^{iJ} = \left\{ -m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E. 373})$$

$$G_{423}^{iJ} = \left\{ \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E. 374})$$

$$\begin{aligned} G_{51}^{iJ} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 + 2 \left[q_{6n_1+3}^1 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \right] m_3 l_3 - 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 \cos\theta'_2 + 2m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos\theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 375}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{52}^{iJ} = & 2 \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \cos\theta'_2 + m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E. 376}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{53}^{iJ} = & \left\{ m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E. 377}) \end{aligned}$$

$$G_{56}^{iJ} = \left\{ -2m_3 l_3 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 378})$$

$$G_{57}^{iJ} = G_{52}^{iJ} \quad (\text{E. 379})$$

$$G_{58}^{iJ} = \left\{ -2m_3 l_3 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 380})$$

$$G_{59}^{iJ} = \left\{ 2m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 381})$$

$$G_{511}^{ij} = G_{53}^{ij} \quad (\text{E.382})$$

$$G_{512}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.383})$$

$$G_{513}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.384})$$

$$G_{517}^{ij} = \left\{ \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.385})$$

$$G_{518}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.386})$$

$$G_{519}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.387})$$

$$G_{523}^{ij} = \left\{ -\frac{1}{6} m_3 l_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.388})$$

$$\begin{aligned} G_{61}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2q_{6n_1+2}^1 m_3 l_3 + 2(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) m_3 l_3 + 2(L_2 + q_{6n_2+3}^2) m_3 l_3 \cos\theta'_2 - \right. \\ & - 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 + 2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) - \\ & \left. - 2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.389}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{62}^{ij} = & \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos\theta'_2 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta'_2 - \right. \\ & - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.390}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{63}^{ij} = & 2 \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.391}) \end{aligned}$$

$$G_{65}^{ij} = \left\{ 2m_3 l_3 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.392})$$

$$\begin{aligned} G_{67}^{ij} = & 2 \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos \theta_2' + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen} \theta_2' - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta_2' + \theta_3') + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\ & \left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos \theta_2' + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen} \theta_2' - \right. \\ & - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta_2' + \theta_3') + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta_2' + \theta_3') + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \right. \\ & \left. \left. - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.393}) \end{aligned}$$

$$G_{68}^{ij} = \left\{ -2 m_3 l_3 \cos \theta_2' \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E.394})$$

$$G_{69}^{ij} = G_{68}^{ij} \quad (\text{E.395})$$

$$G_{610}^{ij} = \left\{ 2 m_3 l_3 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.396})$$

$$\begin{aligned} G_{611}^{ij} = & 2 \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta_2' + \theta_3') + \right. \\ & + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\ & + 2 \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta_2' + \theta_3') + \right. \\ & + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \left. \right\} \dot{\theta}_3 + \\ & + 2 \left\{ -m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos(\theta_2' + \theta_3') + \right. \\ & + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \left. \right\} \dot{q}_6^2 \quad (\text{E.397}) \end{aligned}$$

$$G_{612}^{ij} = \left\{ -2 m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -2 m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E. 398})$$

$$G_{613}^{ij} = G_{612}^{ij} \quad (\text{E. 398})$$

$$G_{614}^{ij} = m_3 l_3 \dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 399})$$

$$G_{617}^{ij} = \left\{ -\frac{1}{6} m_3 l_3^2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -\frac{1}{6} m_3 l_3^2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E. 400})$$

$$G_{618}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E. 401})$$

$$G_{619}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E. 402})$$

$$G_{620}^{ij} = G_{614}^{ij} \quad (\text{E. 403})$$

$$G_{622}^{ij} = \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \dot{\theta}_1 \quad (\text{E. 404})$$

$$G_{623}^{ij} = -G_{617}^{ij} \quad (\text{E. 405})$$

$$G_{71}^{ij} = G_{21}^{ij} \quad (\text{E. 406})$$

$$G_{73}^{ij} = G_{23}^{ij} \quad (\text{E. 407})$$

$$G_{74}^{ij} = G_{24}^{ij} \quad (\text{E. 408})$$

$$G_{75}^{ij} = G_{25}^{ij} \quad (\text{E. 409})$$

$$G_{78}^{ij} = G_{28}^{ij} \quad (\text{E. 410})$$

$$G_{79}^{ij} = G_{29}^{ij} \quad (\text{E. 411})$$

$$G_{710}^{ij} = G_{210}^{ij} \quad (\text{E. 412})$$

$$G_{711}^{ij} = G_{211}^{ij} \quad (\text{E. 413})$$

$$G_{712}^{ij} = G_{212}^{ij} \quad (\text{E. 414})$$

$$G_{713}^{ij} = G_{213}^{ij} \quad (\text{E. 415})$$

$$G_{714}^{ij} = G_{214}^{ij} \quad (\text{E.416})$$

$$G_{715}^{ij} = G_{215}^{ij} \quad (\text{E.417})$$

$$G_{716}^{ij} = G_{216}^{ij} \quad (\text{E.418})$$

$$G_{717}^{ij} = G_{217}^{ij} \quad (\text{E.419})$$

$$G_{718}^{ij} = G_{218}^{ij} \quad (\text{E.420})$$

$$G_{719}^{ij} = G_{219}^{ij} \quad (\text{E.421})$$

$$G_{720}^{ij} = G_{220}^{ij} \quad (\text{E.422})$$

$$G_{721}^{ij} = G_{221}^{ij} \quad (\text{E.423})$$

$$G_{722}^{ij} = G_{222}^{ij} \quad (\text{E.424})$$

$$G_{723}^{ij} = G_{223}^{ij} \quad (\text{E.425})$$

$$G_{81}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos^2 \theta'_2 - 2q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen} \theta'_2 \cos \theta'_2 + 2 m_3 l_3 \right. \\ \left. \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos \theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\ \left. + 2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos \theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.426})$$

$$G_{82}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 + 2m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos \theta'_3 + \right. \\ \left. + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen} \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.427})$$

$$G_{83}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos \theta'_3 + \right. \\ \left. + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen} \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.428})$$

$$G_{85}^{ij} = \left\{ 2 m_3 l_3 \cos \theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.429})$$

$$\begin{aligned}
G_{87}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 + 2m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_3 + \right. \\
& + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} \dot{q}_5^1 + \\
& + \left\{ -2(L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 - 2m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_3 - \right. \\
& - 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} \dot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{E.430}$$

$$G_{89}^{ij} = \left\{ 2 m_3 l_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \tag{E.431}$$

$$G_{810}^{ij} = G_{85}^{ij} \tag{E.432}$$

$$\begin{aligned}
G_{811}^{ij} = & \left\{ 2m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_3 + \right. \\
& + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ 2m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_3 + \right. \\
& + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} \dot{\theta}_3 + \\
& + \left\{ m_3 l_3 \left[(j-1)l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \cos\theta'_3 + \right. \\
& + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}\theta'_3 \left. \right\} \dot{q}_6^2
\end{aligned} \tag{E.433}$$

$$G_{812}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \tag{E.434}$$

$$G_{813}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \cos\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \tag{E.435}$$

$$G_{814}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.436}$$

$$G_{817}^{ij} = \left\{ -\frac{1}{6} m_3 l_3^2 \cos\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \tag{E.437}$$

$$G_{818}^{ij} = G_{812}^{ij} \tag{E.438}$$

$$G_{819}^{ij} = G_{813}^{ij} \quad (\text{E.439})$$

$$G_{820}^{ij} = G_{814}^{ij} \quad (\text{E.440})$$

$$G_{822}^{ij} = \left\{ \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \cos \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.441})$$

$$G_{823}^{ij} = G_{817}^{ij} \quad (\text{E.442})$$

$$G_{91}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ 2(q_{6n_2+2}^2) m_3 l_3 \text{sen}^2 \theta'_2 - 2q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \text{sen} \theta'_2 - \right. \\ \left. - 2(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos \theta'_2 \text{sen} \theta'_2 - 2 m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_2 \cos \theta'_2 + \right. \\ \left. + 2 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{sen} \theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.443})$$

$$G_{92}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + \right. \\ \left. + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.444})$$

$$G_{93}^{ij} = \left\{ - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + \right. \\ \left. + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.445})$$

$$G_{95}^{ij} = \left\{ - 2 m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.446})$$

$$G_{97}^{ij} = \left\{ - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + \right. \\ \left. + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_2 - \\ - \frac{1}{2} \left\{ - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2}(q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + \right. \\ \left. + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos \theta'_3 \right\} \dot{q}_5^1 +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left\{ - m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + \right. \\
& \left. + m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{E.447}$$

$$G_{98}^{ij} = G_{89}^{ij} \tag{E.448}$$

$$G_{910}^{ij} = G_{95}^{ij} \tag{E.449}$$

$$\begin{aligned}
G_{911}^{ij} &= \left\{ - 2m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + \right. \\
& \left. + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_3 + \\
& + \frac{1}{2} \left\{ - 2m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen} \theta'_3 + \right. \\
& \left. + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \cos \theta'_3 \right\} \dot{q}_6^2
\end{aligned} \tag{E.450}$$

$$G_{912}^{ij} = -G_{813}^{ij} \tag{E.451}$$

$$G_{913}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \tag{E.452}$$

$$G_{914}^{ij} = \left\{ - m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.453}$$

$$G_{917}^{ij} = \left\{ \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \cos \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \tag{E.454}$$

$$G_{918}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \cos \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \tag{E.455}$$

$$G_{919}^{ij} = G_{913}^{ij} \tag{E.456}$$

$$G_{920}^{ij} = G_{914}^{ij} \tag{E.457}$$

$$G_{922}^{ij} = \left\{ \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \text{sen} \theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.458}$$

$$G_{101}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ 2m_3 l_3 q_{6n_2+3}^2 + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j-1}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+3}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+5}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.459})$$

$$G_{102}^{ij} = \left\{ -2(L_2 + q_{6n+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta_2' + 2q_{6n+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta_2' + \right. \\ \left. + 2m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') + \right. \\ \left. + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.460})$$

$$G_{103}^{ij} = \left\{ 2m_3 l_3 \left[(j-1) l_3 + \frac{1}{2} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') + \right. \\ \left. + 2m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} q_{6j-4}^3 + \frac{l_3}{12} q_{6j}^3 + \frac{1}{2} q_{6j+2}^3 - \frac{l_3}{12} q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.461})$$

$$G_{106}^{ij} = \left\{ 2m_3 l_3 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.462})$$

$$G_{107}^{ij} = G_{102}^{ij} \quad (\text{E.463})$$

$$G_{108}^{ij} = \left\{ -2m_3 l_3 \text{cos} \theta_3' \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.464})$$

$$G_{109}^{ij} = -G_{910}^{ij} \quad (\text{E.465})$$

$$G_{1011}^{ij} = G_{103}^{ij} \quad (\text{E.466})$$

$$G_{1012}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \text{cos}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.467})$$

$$G_{1013}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.468})$$

$$G_{1017}^{ij} = \left\{ \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.469})$$

$$G_{1018}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \text{cos}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.470})$$

$$G_{1019}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.471})$$

$$G_{1023}^{ij} = -G_{1017}^{ij} \quad (\text{E.472})$$

$$G_{111}^{ij} = G_{31}^{ij} \quad (\text{E.473})$$

$$G_{112}^{ij} = G_{32}^{ij} \quad (\text{E.474})$$

$$G_{115}^{ij} = G_{35}^{ij} \quad (\text{E.475})$$

$$G_{117}^{ij} = G_{37}^{ij} \quad (\text{E.476})$$

$$G_{1110}^{ij} = G_{310}^{ij} \quad (\text{E.477})$$

$$G_{1112}^{ij} = G_{312}^{ij} \quad (\text{E.478})$$

$$G_{1113}^{ij} = G_{313}^{ij} \quad (\text{E.479})$$

$$G_{1114}^{ij} = G_{314}^{ij} \quad (\text{E.480})$$

$$G_{1115}^{ij} = G_{315}^{ij} \quad (\text{E.481})$$

$$G_{1116}^{ij} = G_{316}^{ij} \quad (\text{E.482})$$

$$G_{1117}^{ij} = G_{317}^{ij} \quad (\text{E.483})$$

$$G_{1118}^{ij} = G_{318}^{ij} \quad (\text{E.484})$$

$$G_{1119}^{ij} = G_{319}^{ij} \quad (\text{E.485})$$

$$G_{1120}^{ij} = G_{320}^{ij} \quad (\text{E.486})$$

$$G_{1121}^{ij} = G_{321}^{ij} \quad (\text{E.487})$$

$$G_{1122}^{ij} = G_{322}^{ij} \quad (\text{E.488})$$

$$G_{1123}^{ij} = G_{323}^{ij} \quad (\text{E.489})$$

$$G_{121}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ (j-1) m_3 l_3^2 \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + q_{6n_1+3}^1 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\ \left. + (L_2 + q_{6n_1+1}^1) m_3 l_3 \cos\theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \sin\theta'_2 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{m_3 l_3}{3} (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right) \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2 \text{muv}[1,2]q_{6j-4}^3 + 2 \text{muv}[1,6]q_{6j}^3 + \right. \\
& \left. + 2 \text{muv}[1,8]q_{6j+2}^3 + 2 \text{muv}[1,12]q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.490})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{122}^{ij} = & - \frac{1}{2} \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 + (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \cos\theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 + \right. \\
& \left. + \left[\frac{1}{3} m_3 l_3 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.491})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{123}^{ij} = & - \frac{1}{2} \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 + \left(\text{mu}[1,1]q_{6j-5}^3 + 2\text{mu}[1,7]q_{6j+1}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_3 + \\
& + \left\{ - (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \cos\theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 + (j-1)m_3 l_3^2 - \right. \\
& \left. - \left[\frac{1}{3} m_3 l_3 (q_{6j-6}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.492})
\end{aligned}$$

$$G_{124}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.493})$$

$$G_{125}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.494})$$

$$\begin{aligned}
G_{127}^{ij} = & \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 + (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \cos\theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 + \right. \\
& + \left[\frac{1}{3} m_3 l_3 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \Big\} \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 + (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \cos\theta'_3 - \right. \\
& - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 + \left[\frac{1}{3} m_3 l_3 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \Big\} \dot{q}_5^1 + \left\{ - (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \cos\theta'_3 + \right. \\
& + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 + (j-1)m_3 l_3^2 - \left[\frac{1}{3} m_3 l_3 (q_{6j-5}^3 + q_{6j+1}^3) \right] \Big\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.495})
\end{aligned}$$

$$G_{128}^{ij} = \left\{ - m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ - m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.496})$$

$$G_{129}^{ij} = \left\{ - m_3 l_3 \cos\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ - m_3 l_3 \cos\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.497})$$

$$G_{1210}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \cos\theta'_3 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.498})$$

$$G_{1211}^{ij} = G_{123}^{ij} \quad (\text{E.499})$$

$$G_{1213}^{ij} = \left\{ -2 \text{muv}[1,6] \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -2 \text{muv}[1,2] \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.500})$$

$$G_{1214}^{ij} = \left\{ 2 \text{muv}[1,2] \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.501})$$

$$G_{1216}^{ij} = \left\{ 2 \text{muv}[1,6] \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.502})$$

$$G_{1217}^{ij} = \left\{ -2 \text{muv}[1,6] \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -2 \text{muv}[1,6] \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.503})$$

$$G_{1219}^{ij} = \left\{ -2 \text{muv}[1,8] \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -2 \text{muv}[1,8] \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.504})$$

$$G_{1220}^{ij} = \left\{ 2 \text{muv}[1,8] \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.505})$$

$$G_{1222}^{ij} = \left\{ 2 \text{muv}[1,12] \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.506})$$

$$G_{1223}^{ij} = \left\{ -2 \text{muv}[1,12] \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -2 \text{muv}[1,12] \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.507})$$

$$\begin{aligned} G_{131}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ -q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') - (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos \theta_2' \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') + \right. \\ & + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen} \theta_2' \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') - (j-1) m_3 l_3^2 \cos(\theta_2' + \theta_3') \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') + \\ & + \left(\text{mu}[2,2] q_{6j-4}^3 + 2 \text{mu}[2,6] q_{6j}^3 + 2 \text{mu}[2,8] q_{6j+2}^3 + 2 \text{mu}[2,12] q_{6j+6}^3 \right) \cos^2(\theta_2' + \theta_3') + \\ & + \left(\text{mv}[2,2] q_{6j-4}^3 + 2 \text{mv}[2,6] q_{6j}^3 + 2 \text{mv}[2,8] q_{6j+2}^3 + 2 \text{mv}[2,12] q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}^2(\theta_2' + \theta_3') - \\ & - \frac{1}{2} \left(2 \text{muv}[1,2] q_{6j-5}^3 + 2 \text{muv}[2,4] q_{6j-2}^3 + 2 \text{muv}[2,7] q_{6j+1}^3 + \right. \\ & + \left. 2 \text{muv}[2,10] q_{6j+4}^3 \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \Big\} \dot{\theta}_1 - 2 \left\{ m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) + \text{mv}[2,2] q_{6j-3}^3 + \text{mv}[8,12] q_{6j-1}^3 + \text{mv}[2,8] q_{6j+3}^3 + \right. \\ & + \left. \left. \text{mv}[6,8] q_{6j+5}^3 \right) \cos^2(\theta_2' + \theta_3') \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ m_3 l_3 \left(\frac{1}{2} (L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + \frac{1}{2} (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + mv[2,2]q_{6j-3}^3 + mv[8,12]q_{6j-1}^3 + mv[2,8]q_{6j+3}^3 + \\
& + mv[6,8]q_{6j+5}^3 \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) \left\{ \dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2 \right\} + \left\{ muv[1,2] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{q}_{6j-5}^3 \quad (E.508)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{132}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 + \left(mu[2,2]q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& + 2 mu[2,6]q_{6j}^3 + 2 mu[2,8]q_{6j+2}^3 + 2 mu[2,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) + \left(mv[2,2]q_{6j-4}^3 + \right. \\
& \left. \left. + 2 mv[2,6]q_{6j}^3 + 2 mv[2,8]q_{6j+2}^3 + 2 mv[2,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_2 \quad (E.509)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{133}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ mu[2,2]q_{6j-4}^3 + 2mu[2,6]q_{6j}^3 + 2mu[2,8]q_{6j+2}^3 + 2mu[2,12]q_{6j+6}^3 \right\} \dot{\theta}_3 + \\
& + \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_2 \quad (E.510)
\end{aligned}$$

$$G_{135}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.511)$$

$$\begin{aligned}
G_{137}^{ij} = & \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_3 + \left\{ \left(mu[2,2]q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& + 2 mu[2,6]q_{6j}^3 + 2 mu[2,8]q_{6j+2}^3 + 2 mu[2,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) + \left(mv[2,2]q_{6j-4}^3 + \right. \\
& + 2 mv[2,6]q_{6j}^3 + 2 mv[2,8]q_{6j+2}^3 + 2 mv[2,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) + (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 - \\
& - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 \left. \right\} \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} \left\{ \left(mu[2,2]q_{6j-4}^3 + 2 mu[2,6]q_{6j}^3 + 2 mu[2,8]q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\
& + 2 mu[2,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) + \left(mv[2,2]q_{6j-4}^3 + 2 mv[2,6]q_{6j}^3 + 2 mv[2,8]q_{6j+2}^3 + \right. \\
& \left. \left. + 2 mv[2,12]q_{6j+6}^3 \right) + (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 \right\} \dot{q}_5^1 \quad (E.512)
\end{aligned}$$

$$G_{138}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (E.513)$$

$$G_{139}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (E.514)$$

$$G_{1310}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.515)$$

$$\begin{aligned}
G_{1311}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \mu[2,2]q_{6j-4}^3 + 2\mu[2,6]q_{6j}^3 + 2\mu[2,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[2,12]q_{6j+6}^3 \right\} \dot{q}_6^2 + \\
& + \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ m_3 l_3 \text{cos}\theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+1}^2 + \\
& + \left\{ -m_3 l_3 \text{sen}\theta'_3 \right\} \dot{q}_{6n_2+2}^2 + \left\{ \mu[2,2]q_{6j-4}^3 + 2\mu[2,6]q_{6j}^3 + 2\mu[2,8]q_{6j+2}^3 + \right. \\
& \left. + 2\mu[2,12]q_{6j+6}^3 \right\} \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{E.516}$$

$$G_{1312}^{ij} = -G_{1213}^{ij} \tag{E.517}$$

$$G_{1314}^{ij} = \left\{ -2mvw[2,3] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.518}$$

$$G_{1315}^{ij} = \left\{ -2muv[2,4] \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -2muv[2,4] \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.519}$$

$$G_{1316}^{ij} = \left\{ -2mvw[2,5] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.520}$$

$$G_{1318}^{ij} = \left\{ 2muv[1,8] \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ 2muv[1,8] \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.521}$$

$$G_{1320}^{ij} = \left\{ -2mvw[2,9] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.522}$$

$$G_{1321}^{ij} = \left\{ 2muv[4,8] \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ 2muv[4,8] \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \tag{E.523}$$

$$G_{1322}^{ij} = \left\{ -2mvw[2,11] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.524}$$

$$\begin{aligned}
G_{141}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ m_3 l_3 \left[(L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \right] + \left[\mu[3,3]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\
& + 2\mu[3,5]q_{6j-1}^3 + 2\mu[3,9]q_{6j+3}^3 + 2\mu[3,11]q_{6j+5}^3 \left. \right] \text{cos}^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \\
& \left. + \left[mw[3,3]q_{6j-3}^3 + 2mw[3,5]q_{6j-1}^3 + 2mw[3,9]q_{6j+3}^3 + 2mw[3,11]q_{6j+5}^3 \right] \right\} \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.525}$$

$$\begin{aligned}
G_{142}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \mu[3,3]q_{6j-3}^3 + 2\mu[3,5]q_{6j-1}^3 + 2\mu[3,9]q_{6j+3}^3 + \right. \\
& \left. + 2\mu[3,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{E.526}$$

$$\begin{aligned}
G_{143}^{ij} = & \left\{ (j-1)m_3 I_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(2\text{muw}[1,3]q_{6j-5}^3 + 2\text{muw}[3,4]q_{6j-2}^3 + \right. \right. \\
& + 2\text{muw}[3,7]q_{6j+1}^3 + 2\text{muw}[3,10]q_{6j+4}^3 \left. \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(2\text{mvw}[2,3]q_{6j-4}^3 + \right. \\
& + 2\text{mvw}[3,6]q_{6j}^3 + 2\text{mvw}[3,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mvw}[3,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_1 - \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \text{mu}[3,3]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[3,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[3,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[3,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 - \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \text{mu}[3,3]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[3,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[3,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[3,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{E.527}$$

$$G_{146}^{ij} = \left\{ -m_3 I_3 \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.528}$$

$$\begin{aligned}
G_{147}^{ij} = & - \frac{1}{2} \left\{ \text{mu}[3,3]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[3,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[3,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[3,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{q}_5^{1-} \\
& - \left\{ \text{mu}[3,3]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[3,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[3,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[3,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ (j-1)m_3 I_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\
& + \left(2\text{muw}[1,3]q_{6j-5}^3 + 2\text{muw}[3,4]q_{6j-2}^3 + 2\text{muw}[3,7]q_{6j+1}^3 + \right. \\
& + 2\text{muw}[3,10]q_{6j+4}^3 \left. \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(2\text{mvw}[2,3]q_{6j-4}^3 + 2\text{mvw}[3,6]q_{6j}^3 + \right. \\
& + 2\text{mvw}[3,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mvw}[3,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_1 + \left\{ \text{mu}[3,3]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& + 2\text{mu}[3,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[3,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[3,11]q_{6j+5}^3 \left. \right\} \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{E.529}$$

$$G_{148}^{ij} = \left\{ -m_3 I_3 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.530}$$

$$G_{149}^{ij} = \left\{ m_3 I_3 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.531}$$

$$\begin{aligned}
G_{1411}^{ij} = & \left\{ (j-1)m_3 I_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(2\text{muw}[1,3]q_{6j-5}^3 + 2\text{muw}[3,4]q_{6j-2}^3 + \right. \right. \\
& + 2\text{muw}[3,7]q_{6j+1}^3 + 2\text{muw}[3,10]q_{6j+4}^3 \left. \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \left(2\text{mvw}[2,3]q_{6j-4}^3 + \right. \\
& + 2\text{mvw}[3,6]q_{6j}^3 + 2\text{mvw}[3,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mvw}[3,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \text{mu}[3,3]q_{6j-3}^3 + 2 \text{mu}[3,5]q_{6j-1}^3 + 2 \text{mu}[3,9]q_{6j+3}^3 + 2 \text{mu}[3,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& + \left\{ \text{mu}[3,3]q_{6j-3}^3 + 2 \text{mu}[3,5]q_{6j-1}^3 + 2 \text{mu}[3,9]q_{6j+3}^3 + 2 \text{mu}[3,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{E.532}$$

$$G_{1412}^{ij} = -G_{1214}^{ij} \tag{E.533}$$

$$G_{1413}^{ij} = -G_{1314}^{ij} \tag{E.534}$$

$$G_{1415}^{ij} = \left\{ -2\text{muw}[4,9] \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.535}$$

$$G_{1417}^{ij} = \left\{ 2\text{mvw}[3,6] \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.536}$$

$$G_{1418}^{ij} = \left\{ -2\text{muw}[1,9] \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.537}$$

$$G_{1419}^{ij} = \left\{ 2\text{mvw}[2,9] \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.538}$$

$$G_{1421}^{ij} = \left\{ -2\text{muw}[3,10] \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.539}$$

$$G_{1423}^{ij} = \left\{ -2\text{mvw}[1,9] \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1 \tag{E.540}$$

$$\begin{aligned}
G_{151}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \left(\text{mv}[4,4]q_{6j-2}^3 + 2 \text{mv}[4,10]q_{6j+4}^3 \right) \text{sen}^2(\theta_2' + \theta_3') + \left(\text{mw}[4,4]q_{6j-2}^3 + \right. \right. \\
& + 2 \text{mw}[4,10]q_{6j+4}^3 \left. \right) - \frac{1}{2} \left(2 \text{muv}[2,4]q_{6j-4}^3 + 2 \text{muv}[4,6]q_{6j}^3 + 2 \text{muv}[4,8]q_{6j+2}^3 + \right. \\
& \left. \left. + 2 \text{mu}[4,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \cos(\theta_2' + \theta_3') \right\} \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{E.541}$$

$$G_{152}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ \text{mv}[4,4]q_{6j-2}^3 + 2 \text{mv}[4,10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{\theta}_2 \tag{E.542}$$

$$\begin{aligned}
G_{153}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \text{mv}[4,4]q_{6j-2}^3 + 2 \text{mv}[4,10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{\theta}_3 - \left\{ \text{mv}[4,4]q_{6j-2}^3 + \right. \\
& \left. + 2 \text{mv}[4,10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{E.543}$$

$$G_{157}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ \text{mv}[4,4]q_{6j-2}^3 + 2 \text{mv}[4,10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{q}_5^1 - \left\{ \text{mv}[4,4]q_{6j-2}^3 + \right.$$

$$+ 2 \operatorname{mv}[4, 10]q_{6j+4}^3 \dot{\theta}_2 + \left\{ \operatorname{mv}[4, 4]q_{6j-2}^3 + 2 \operatorname{mv}[4, 10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.544})$$

$$\begin{aligned} G_{1511}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \operatorname{mv}[4, 4]q_{6j-2}^3 + 2 \operatorname{mv}[4, 10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{q}_6^2 + \left\{ \left[2\operatorname{muw}[3, 4]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\ & + 2 \operatorname{muw}[4, 5]q_{6j-1}^3 + 2 \operatorname{muw}[4, 9]q_{6j+3}^3 + 2 \operatorname{muw}[5, 10]q_{6j+5}^3 \left. \right] \operatorname{sen}(\theta_2' + \theta_3') \dot{\theta}_1 + \\ & + \left\{ \operatorname{mv}[4, 4]q_{6j-2}^3 + 2 \operatorname{mv}[4, 10]q_{6j+4}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ \operatorname{mv}[4, 4]q_{6j-2}^3 + \right. \\ & \left. + 2 \operatorname{mv}[4, 10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (\text{E.545})$$

$$G_{1513}^{ij} = -G_{1315}^{ij} \quad (\text{E.546})$$

$$G_{1514}^{ij} = -G_{1415}^{ij} \quad (\text{E.547})$$

$$\mathfrak{J}_{1516}^{iJ} = \left(-2 \text{ muw}[4,5] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.548})$$

$$\mathfrak{J}_{1517}^{iJ} = \left(2 \text{ muv}[4,6] \right) (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left(2 \text{ muv}[4,6] \right) (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.549})$$

$$\mathfrak{J}_{1519}^{iJ} = \left(2 \text{ muv}[4,8] \right) (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left(2 \text{ muv}[4,8] \right) (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.550})$$

$$\mathfrak{J}_{1520}^{iJ} = \left(-2 \text{ muw}[4,9] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.551})$$

$$\mathfrak{J}_{1522}^{iJ} = \left(-2 \text{ muw}[5,10] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.552})$$

$$\mathfrak{J}_{1523}^{iJ} = \left(2 \text{ muv}[4,12] \right) (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left(2 \text{ muv}[4,12] \right) (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.553})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{161}^{iJ} = & -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_3 \left((L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \right) + \left(2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2 \text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2 \text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right) \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(2\text{mw}[3,5]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \text{mw}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2 \text{mw}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2 \text{mw}[5,11]q_{6j+5}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.554}) \end{aligned}$$

$$\mathfrak{J}_{162}^{iJ} = -\frac{1}{2} \left\{ 2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.555})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{163}^{iJ} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3 + \\ & + \left\{ 2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.556}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{167}^{iJ} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{q}_5^1 + \\ & + \left\{ 2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 - \\ & - \left\{ 2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.557}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{1611}^{iJ} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{q}_6^2 - \\ & - \left\{ 2\text{mu}[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,5]q_{6j-1}^3 + 2\text{mu}[5,9]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \end{aligned}$$

$$+ \left\{ 2\mu[3,5]q_{6j-3}^3 + 2\mu[5,5]q_{6j-1}^3 + 2\mu[5,9]q_{6j+3}^3 + 2\mu[5,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.558})$$

$$G_{1612}^{ij} = -G_{1216}^{ij} \quad (\text{E.559})$$

$$G_{1613}^{ij} = -G_{1316}^{ij} \quad (\text{E.560})$$

$$G_{1615}^{ij} = -G_{1516}^{ij} \quad (\text{E.561})$$

$$G_{1617}^{ij} = \left(-2 \mu w[5,6] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.562})$$

$$G_{1618}^{ij} = \left(-2 \mu w[5,7] \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.563})$$

$$G_{1619}^{ij} = \left(-2 \mu v w[2,11] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.564})$$

$$G_{1621}^{ij} = \left(2 \mu w[10,12] \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.565})$$

$$G_{1623}^{ij} = \left(2 \mu v w[5,6] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.566})$$

$$\begin{aligned} G_{171}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{6} m_3 l_3^2 q_{6n_1+3}^1 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3^2 \text{cos} \theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\ & + \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3^2 \text{sen} \theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{6} (j-1) m_3 l_3^3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) + \\ & + \left(2\mu[2,6]q_{6j-4}^3 + \mu[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \\ & + \left(2\mu v[2,6]q_{6j-4}^3 + \mu v[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu v[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu v[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \\ & - \frac{1}{2} \left(2\mu v[1,6]q_{6j-5}^3 + 2\mu v[4,6]q_{6j-2}^3 + 2\mu v[6,7]q_{6j+1}^3 + \right. \\ & \left. 2\mu v[6,10]q_{6j+4}^3 \right) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.567}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{172}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 + \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3^2 \text{cos} \theta'_3 + \right. \\ & + \left(2\mu[2,6]q_{6j-4}^3 + \mu[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[6,12]q_{6j+6}^3 \right) + \\ & \left. \left(2\mu v[2,6]q_{6j-4}^3 + \mu v[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu v[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu v[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.568}) \end{aligned}$$

$$G_{173}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ \left(2\mu[2,6]q_{6j-4}^3 + \mu[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[6,12]q_{6j+6}^3 \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(2mv[2,6]q_{6j-4}^3 + mv[6,6]q_{6j}^3 + 2mv[6,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \dot{\theta}_3 + \\
& + \left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_3 - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \text{cos}\theta'_3 - \left(2\mu[2,6]q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& + \mu[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[6,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) - \left(2mv[2,6]q_{6j-4}^3 + mv[6,6]q_{6j}^3 + \right. \\
& + 2mv[6,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[6,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.569})
\end{aligned}$$

$$G_{175}^{iJ} = \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.570})$$

$$\begin{aligned}
G_{177}^{iJ} = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_3 + \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{cos}\theta'_3 + \right. \\
& + \left(2\mu[2,6]q_{6j-4}^3 + \mu[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[6,12]q_{6j+6}^3 \right) + \\
& + \left(2mv[2,6]q_{6j-4}^3 + mv[6,6]q_{6j}^3 + 2mv[6,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \dot{q}_5^1 + \\
& + \left\{ \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_3 + \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{cos}\theta'_3 + \right. \\
& + \left(2\mu[2,6]q_{6j-4}^3 + \mu[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[6,12]q_{6j+6}^3 \right) + \\
& + \left(2mv[2,6]q_{6j-4}^3 + mv[6,6]q_{6j}^3 + 2mv[6,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \dot{\theta}_2 + \\
& + \left(2mv[2,6]q_{6j-4}^3 + mv[6,6]q_{6j}^3 + 2mv[6,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.571})
\end{aligned}$$

$$G_{178}^{iJ} = \left\{ \frac{1}{6} m_3 I_3^2 \text{cos}\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) \quad (\text{E.572})$$

$$G_{179}^{iJ} = \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_8^2 \text{sen}\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_8^2) \quad (\text{E.573})$$

$$G_{1710}^{iJ} = \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.574})$$

$$\begin{aligned}
G_{1711}^{iJ} = & -\frac{1}{2} \left\{ \left(2\mu[2,6]q_{6j-4}^3 + \mu[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[6,12]q_{6j+6}^3 \right) + \right. \\
& + \left(2mv[2,6]q_{6j-4}^3 + mv[6,6]q_{6j}^3 + 2mv[6,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \dot{q}_6^2 + \\
& + \left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_3 - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \text{cos}\theta'_3 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2\mu[2,6]q_{6j-4}^3 + \mu[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[6,12]q_{6j+6}^3 \right) - \\
& - \left(2mv[2,6]q_{6j-4}^3 + mv[6,6]q_{6j}^3 + 2mv[6,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \left(\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1 \right) + \\
& + \left\{ \left(2\mu[2,6]q_{6j-4}^3 + \mu[6,6]q_{6j}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[6,12]q_{6j+6}^3 \right) + \right. \\
& + \left. \left(2mv[2,6]q_{6j-4}^3 + mv[6,6]q_{6j}^3 + 2mv[6,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[6,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_3 \quad (E.575)
\end{aligned}$$

$$G_{1712}^{ij} = -G_{1217}^{ij} \quad (E.576)$$

$$G_{1713}^{ij} = -G_{1317}^{ij} \quad (E.577)$$

$$G_{1714}^{ij} = -G_{1417}^{ij} \quad (E.578)$$

$$G_{1715}^{ij} = -G_{1517}^{ij} \quad (E.579)$$

$$G_{1716}^{ij} = -G_{1617}^{ij} \quad (E.580)$$

$$G_{1718}^{ij} = \left(2mvw[1,11] \right) \left(\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1 \right) + \left(2mvw[1,11] \right) \left(\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2 \right) \quad (E.581)$$

$$G_{1720}^{ij} = \left(-2mvw[6,9] \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right) \dot{\theta}_1 \quad (E.582)$$

$$G_{1721}^{ij} = \left(-2mvw[4,11] \right) \left(\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1 \right) + \left(-2mvw[4,11] \right) \left(\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2 \right) \quad (E.583)$$

$$G_{1722}^{ij} = \left(-2mvw[5,12] \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right) \dot{\theta}_1 \quad (E.584)$$

$$\begin{aligned}
G_{181}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 \cos^2(\theta_2' + \theta_3') + m_3 l_3^2 \dot{q}_{6n_1+3}^1 \cos(\theta_2' + \theta_3') + \right. \\
& + (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos\theta_2' \cos(\theta_2' + \theta_3') + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta_2' \cos\theta_2' + \\
& + \left(2\mu[1,7]q_{6j-5}^3 + \mu[7,7]q_{6j+1}^3 \right) \cos^2(\theta_2' + \theta_3') - \frac{1}{2} \left(2muv[2,7]q_{6j-4}^3 + \right. \\
& + 2muv[6,7]q_{6j}^3 + 2muv[7,8]q_{6j+2}^3 + 2muv[7,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.585)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{182}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 + (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos\theta_3' - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta_3' + \right. \\
& + 2\mu[1,7]q_{6j-5}^3 + \mu[7,7]q_{6j+1}^3 \left. \right\} \dot{\theta}_2 \quad (E.586)
\end{aligned}$$

$$G_{183}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 + 2\mu[1,7]q_{6j-5}^3 + \mu[7,7]q_{6j+1}^3 \right\} \dot{\theta}_3 + \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \cos\theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \sin\theta'_3 - [2\mu[1,7]q_{6j-5}^3 + \mu[7,7]q_{6j+1}^3] \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.587})$$

$$G_{184}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.588})$$

$$G_{185}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.589})$$

$$G_{187}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 + (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \cos\theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \sin\theta'_3 + 2\mu[1,7]q_{6j-5}^3 + \mu[7,7]q_{6j+1}^3 \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 + (L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \cos\theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \sin\theta'_3 + 2\mu[1,7]q_{6j-5}^3 + \mu[7,7]q_{6j+1}^3 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \cos\theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \sin\theta'_3 - [2\mu[1,7]q_{6j-5}^3 + \mu[7,7]q_{6j+1}^3] \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.590})$$

$$G_{188}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -m_3 l_3 \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.591})$$

$$G_{189}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -m_3 l_3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.592})$$

$$G_{1810}^{ij} = G_{185}^{ij} \quad (\text{E.593})$$

$$G_{1811}^{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 + 2\mu[1,7]q_{6j-5}^3 + \mu[7,7]q_{6j+1}^3 \right\} \dot{q}_6^2 + \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 l_3 \cos\theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \sin\theta'_3 - [2\mu[1,7]q_{6j-5}^3 + \mu[7,7]q_{6j+1}^3] \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) - \left\{ (j-1)m_3 l_3^2 + 2\mu[1,7]q_{6j-5}^3 + \mu[7,7]q_{6j+1}^3 \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.594})$$

$$G_{1812}^{ij} = -G_{1218}^{ij} \quad (\text{E.595})$$

$$G_{1813}^{ij} = -G_{1318}^{ij} \quad (\text{E.596})$$

$$G_{1814}^{ij} = -G_{1418}^{ij} \quad (\text{E.597})$$

$$G_{1815}^{ij} = -G_{1518}^{ij} \quad (\text{E.598})$$

$$G_{1816}^{ij} = -G_{1618}^{ij} \quad (\text{E.599})$$

$$G_{1817}^{ij} = -G_{1718}^{ij} \quad (\text{E.600})$$

$$G_{1819}^{ij} = \left[-2 \text{muv}[1,2] \right] (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left[-2 \text{muv}[1,2] \right] (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.601})$$

$$G_{1820}^{ij} = \left[-2 \text{muw}[1,3] \cos(\theta_2' + \theta_3') \right] \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.602})$$

$$G_{1822}^{ij} = \left[\text{muw}[7,11] \cos(\theta_2' + \theta_3') \right] \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.603})$$

$$G_{1823}^{ij} = \left[-2 \text{muv}[1,6] \right] (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left[-2 \text{muv}[1,6] \right] (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.604})$$

$$\begin{aligned} G_{191}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ -q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3 \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') - (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \cos\theta_2' \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') + \right. \\ & + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{sen}\theta_2' \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') - (j-1) m_3 l_3^2 \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \cos(\theta_2' + \theta_3') + \\ & + \left(2\text{mu}[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\text{mu}[6,8]q_{6j}^3 + \text{mu}[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mu}[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \cos^2(\theta_2' + \theta_3') + \\ & + \left(2\text{mv}[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\text{mv}[6,8]q_{6j}^3 + \text{mv}[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mv}[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{sen}^2(\theta_2' + \theta_3') - \\ & - \frac{1}{2} \left(2\text{muv}[1,8]q_{6j-5}^3 + 2\text{muv}[4,8]q_{6j-2}^3 + 2\text{muv}[7,8]q_{6j+1}^3 + \right. \\ & \left. + 2\text{muv}[8,10]q_{6j+4}^3 \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.605}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{192}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen}\theta_3' + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \cos\theta_3' + \right. \\ & + \left(2\text{mu}[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\text{mu}[6,8]q_{6j}^3 + \text{mu}[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mu}[8,12]q_{6j+6}^3 \right) + \\ & \left. + \left(2\text{mv}[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\text{mv}[6,8]q_{6j}^3 + \text{mv}[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mv}[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.606}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{193}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \left(2\text{mu}[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\text{mu}[6,8]q_{6j}^3 + \text{mu}[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mu}[8,12]q_{6j+6}^3 \right) + \right. \\ & \left. + \left(2\text{mv}[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\text{mv}[6,8]q_{6j}^3 + \text{mv}[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\text{mv}[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 - \left(2\mu[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& + \mu[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[8,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) - \left(2mv[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,8]q_{6j}^3 + \right. \\
& \left. \left. + mv[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.607})
\end{aligned}$$

$$G_{195}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.608})$$

$$\begin{aligned}
G_{197}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 + q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 + \left(2\mu[2,8]q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\
& + 2\mu[6,8]q_{6j}^3 + \mu[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[8,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) + \left(2mv[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,8]q_{6j}^3 + \right. \\
& \left. \left. + mv[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 - \right. \\
& - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 - \left(2\mu[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j}^3 + \mu[8,8]q_{6j+2}^3 + \right. \\
& + 2\mu[8,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) - \left(2mv[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,8]q_{6j}^3 + mv[8,8]q_{6j+2}^3 + \right. \\
& \left. \left. + 2mv[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.609})
\end{aligned}$$

$$G_{198}^{ij} = \left\{ m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.610})$$

$$G_{199}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.611})$$

$$G_{1910}^{ij} = \left\{ -m_3 l_3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.612})$$

$$\begin{aligned}
G_{1911}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \left(2\mu[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j}^3 + \mu[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[8,12]q_{6j+6}^3 \right) + \right. \\
& + \left(2mv[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,8]q_{6j}^3 + mv[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \left. \right\} \dot{q}_6^2 + \\
& + \left\{ -(L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3 \text{sen} \theta'_3 - q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3 \text{cos} \theta'_3 - \right. \\
& - \left(2\mu[2,8]q_{6j-4}^3 + 2\mu[6,8]q_{6j}^3 + \mu[8,8]q_{6j+2}^3 + 2\mu[8,12]q_{6j+6}^3 \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2mv[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,8]q_{6j}^3 + mv[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \left(\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1 \right) + \\
& + \left\{ \left(2mu[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mu[6,8]q_{6j}^3 + mu[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mu[8,12]q_{6j+6}^3 \right) + \right. \\
& \left. + \left(2mv[2,8]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,8]q_{6j}^3 + mv[8,8]q_{6j+2}^3 + 2mv[8,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_3 \quad (E.613)
\end{aligned}$$

$$G_{1912}^{ij} = -G_{1219}^{ij} \quad (E.614)$$

$$G_{1914}^{ij} = -G_{1419}^{ij} \quad (E.615)$$

$$G_{1915}^{ij} = -G_{1519}^{ij} \quad (E.616)$$

$$G_{1916}^{ij} = -G_{1619}^{ij} \quad (E.617)$$

$$G_{1918}^{ij} = -G_{1819}^{ij} \quad (E.618)$$

$$G_{1920}^{ij} = \left(-2mvw[8,9] \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right) \dot{\theta}_1 \quad (E.619)$$

$$G_{1921}^{ij} = \left(-2muv[4,8] \right) \left(\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1 \right) + \left(-2muv[4,8] \right) \left(\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2 \right) \quad (E.620)$$

$$G_{1922}^{ij} = \left(-2mvw[6,9] \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') \right) \dot{\theta}_1 \quad (E.621)$$

$$\begin{aligned}
G_{201}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ m_3 I_3 \left((L_{y1} + q_{6n_1+2}^1) + (L_{z2} + q_{6n_2+3}^2) \right) + \left(2mu[3,9]q_{6j-3}^3 + \right. \right. \\
& + 2mu[5,9]q_{6j-1}^3 + mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2mu[9,11]q_{6j+5}^3 \left. \right) \cos^2(\theta_2' + \theta_3') + \left(2mw[3,9]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& \left. + 2mw[5,9]q_{6j-1}^3 + mw[9,9]q_{6j+3}^3 + 2mw[9,11]q_{6j+5}^3 \right) \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.622)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{202}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2mu[3,9]q_{6j-3}^3 + 2mu[5,9]q_{6j-1}^3 + mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 + \\
& + \left\{ -\frac{1}{2} \left(2muw[2,3]q_{6j-5}^3 + 2muw[3,4]q_{6j-2}^3 + 2muw[3,7]q_{6j+1}^3 + \right. \right. \\
& + 2muw[3,10]q_{6j+4}^3 \left. \right) \text{sen}(\theta_2' + \theta_3') - \frac{1}{2} \left(2mvw[2,3]q_{6j-4}^3 + 2mvw[3,6]q_{6j}^3 + \right. \\
& \left. + 2mvw[3,8]q_{6j+2}^3 + 2mvw[3,12]q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta_2' + \theta_3') \left. \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.623)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{203}^{1j} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2\mu[3,9]q_{6j-3}^3 + 2\mu[5,9]q_{6j-1}^3 + \mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2\mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3 + \\
& + \left\{ -\frac{1}{2} \left(2\mu w[2,3]q_{6j-5}^3 + 2\mu w[3,4]q_{6j-2}^3 + 2\mu w[3,7]q_{6j+1}^3 + \right. \right. \\
& + \left. \left. 2\mu w[3,10]q_{6j+4}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2mvw[2,3]q_{6j-4}^3 + 2mvw[3,6]q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& + \left. \left. 2mvw[3,8]q_{6j+2}^3 + 2mvw[3,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 + \left\{ 2\mu[3,9]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& + \left. 2\mu[5,9]q_{6j-1}^3 + \mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2\mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.624})
\end{aligned}$$

$$G_{206}^{1j} = -m_3 I_3 \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.625})$$

$$\begin{aligned}
G_{207}^{1j} = & \left\{ -\frac{1}{2} \left(2\mu w[2,3]q_{6j-5}^3 + 2\mu w[3,4]q_{6j-2}^3 + 2\mu w[3,7]q_{6j+1}^3 + \right. \right. \\
& + \left. \left. 2\mu w[3,10]q_{6j+4}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2mvw[2,3]q_{6j-4}^3 + 2mvw[3,6]q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& + \left. \left. 2mvw[3,8]q_{6j+2}^3 + 2mvw[3,12]q_{6j+6}^3 \right) \text{cos}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 + \left\{ 2\mu[3,9]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& + \left. 2\mu[5,9]q_{6j-1}^3 + \mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2\mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} \left\{ 2\mu[3,9]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& + \left. 2\mu[5,9]q_{6j-1}^3 + \mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2\mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ 2\mu[3,9]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& + \left. 2\mu[5,9]q_{6j-1}^3 + \mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2\mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.626})
\end{aligned}$$

$$G_{208}^{1j} = \left(-m_3 I_3 \text{cos}\theta'_2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.627})$$

$$G_{209}^{1j} = \left(-m_3 I_3 \text{sen}\theta'_2 \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.628})$$

$$\begin{aligned}
G_{2011}^{1j} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2\mu[3,9]q_{6j-3}^3 + 2\mu[5,9]q_{6j-1}^3 + \mu[9,9]q_{6j+3}^3 + \right. \\
& + \left. 2\mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{q}_6^2 + \left\{ -\frac{1}{2} \left(2\mu w[2,3]q_{6j-5}^3 + 2\mu w[3,4]q_{6j-2}^3 + \right. \right. \\
& + \left. \left. 2\mu w[3,7]q_{6j+1}^3 + 2\mu w[3,10]q_{6j+4}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \left(2mvw[2,3]q_{6j-4}^3 + 2 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. mvw[3,6]q_{6j}^3 + 2mvw[3,8]q_{6j+2}^3 + 2mvw[3,12]q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 - \\
& - \left\{ 2mu[3,9]q_{6j-3}^3 + 2mu[5,9]q_{6j-1}^3 + mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 + \\
& + \left\{ 2mu[3,9]q_{6j-3}^3 + 2mu[5,9]q_{6j-1}^3 + mu[9,9]q_{6j+3}^3 + 2mu[9,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3 \quad (E.629)
\end{aligned}$$

$$G_{2012}^{ij} = -G_{1220}^{ij} \quad (E.630)$$

$$G_{2013}^{ij} = -G_{1320}^{ij} \quad (E.631)$$

$$G_{2015}^{ij} = -G_{1520}^{ij} \quad (E.632)$$

$$G_{2017}^{ij} = -G_{1720}^{ij} \quad (E.633)$$

$$G_{2018}^{ij} = -G_{1820}^{ij} \quad (E.634)$$

$$G_{2019}^{ij} = -G_{1920}^{ij} \quad (E.635)$$

$$G_{2021}^{ij} = \left(2muw[4,9] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (E.636)$$

$$G_{2023}^{ij} = \left(-2mvw[3,6] \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (E.637)$$

$$\begin{aligned}
G_{211}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \left(2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right) \sin^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\
& + \left(2mw[4,10]q_{6j-2}^3 + mw[10,10]q_{6j+4}^3 \right) - \frac{1}{2} \left(2muv[2,10]q_{6j-4}^3 + 2muv[6,10]q_{6j}^3 + \right. \\
& \left. \left. 2muv[8,10]q_{6j+2}^3 + 2muv[10,12]q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \sin(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \quad (E.638)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{212}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{\theta}'_2 + \left\{ 2muw[3,10]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& + 2muw[10,12]q_{6j-1}^3 + 2muw[4,9]q_{6j+3}^3 + 2muw[10,11]q_{6j+5}^3 \Big\} \dot{\theta}_1 \quad (E.639)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{213}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{\theta}'_3 + \left\{ 2muw[3,10]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& + 2muw[10,12]q_{6j-1}^3 + 2muw[4,9]q_{6j+3}^3 + 2muw[10,11]q_{6j+6}^3 \Big\} \dot{\theta}_1 -
\end{aligned}$$

$$- \left\{ 2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.640})$$

$$G_{217}^{ij} = - \frac{1}{2} \left\{ 2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ 2muw[3,10]q_{6j-3}^3 + \right. \\ \left. + 2muw[10,12]q_{6j-1}^3 + 2muw[4,9]q_{6j+3}^3 + 2muw[10,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_1 - \\ - \left\{ 2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{\theta}_3 - \left\{ 2mv[4,10]q_{6j-2}^3 + + mv[10,10]q_{6j+4}^3 \right\} \dot{\theta}'_2 \quad (\text{E.641})$$

$$G_{2113}^{ij} = -G_{1321}^{ij} \quad (\text{E.642})$$

$$G_{2114}^{ij} = -G_{1421}^{ij} \quad (\text{E.643})$$

$$G_{2116}^{ij} = -G_{1621}^{ij} \quad (\text{E.644})$$

$$G_{2117}^{ij} = -G_{1721}^{ij} \quad (\text{E.645})$$

$$G_{2119}^{ij} = -G_{1921}^{ij} \quad (\text{E.646})$$

$$G_{2120}^{ij} = -G_{2021}^{ij} \quad (\text{E.647})$$

$$G_{2122}^{ij} = \left(-2 \mu w[10,11] \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.648})$$

$$G_{2123}^{ij} = \left(2 \mu v[4,6] \right) (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left(2 \mu v[4,6] \right) (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \quad (\text{E.649})$$

$$G_{221}^{ij} = - \frac{1}{2} \left\{ 2mw[3,11]q_{6j-3}^3 + 2mw[5,11]q_{6j-1}^3 + mw[9,11]q_{6j+3}^3 + 2mw[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.650})$$

$$G_{222}^{ij} = - \frac{1}{2} \left\{ 2mu[3,11]q_{6j-3}^3 + 2mu[5,11]q_{6j-1}^3 + mu[9,11]q_{6j+3}^3 + \right. \\ \left. + 2mu[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3^2 \sin \theta'_2 + \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3^2 \cos \theta'_2 + \right. \\ \left. + \left(mvw[2,11]q_{6j-4}^3 + mvw[6,11]q_{6j}^3 + mvw[8,11]q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + mvw[11,12]q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(\mu w[1,11]q_{6j-5}^3 + \mu w[4,11]q_{6j-2}^3 + \right. \right.$$

$$+ \text{muw}[7,11]q_{6j+1}^3 + \text{muw}[10,11]q_{6j+4}^3 \Big) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.651})$$

$$\begin{aligned} G_{223}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2\text{mu}[3,11]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j-1}^3 + \text{mu}[9,11]q_{6j+3}^3 + \right. \\ & \left. + 2\text{mu}[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3 + \left\{ \frac{1}{6}(j-1)m_3 I_3^3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(\text{mvw}[2,11]q_{6j-4}^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{mvw}[6,11]q_{6j}^3 + \text{mvw}[8,11]q_{6j+2}^3 + \text{mvw}[11,12]q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \right. \\ & \left. + \left(\text{muw}[1,11]q_{6j-6}^3 + \text{muw}[4,11]q_{6j-2}^3 + \text{muw}[7,11]q_{6j+1}^3 + \text{muw}[10,11]q_{6j+4}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_1 + \\ & + \left\{ 2\text{mu}[3,11]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j-1}^3 + \text{mu}[9,11]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 \quad (\text{E.652}) \end{aligned}$$

$$G_{226}^{ij} = \left\{ -\frac{1}{6}m_3 I_3^2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.653})$$

$$\begin{aligned} G_{227}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ 2\text{mu}[3,11]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j-1}^3 + \text{mu}[9,11]q_{6j+3}^3 + \right. \\ & \left. + 2\text{mu}[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{q}_5^1 + \left\{ \frac{1}{6}(L_2 + q_{6n_2+1}^2)m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_2 + \frac{1}{6}q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \cos\theta'_2 + \right. \\ & \left. + \left(\text{mvw}[2,11]q_{6j-4}^3 + \text{mvw}[6,11]q_{6j}^3 + \text{mvw}[8,11]q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{mvw}[11,12]q_{6j+6}^3 \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(\text{muw}[1,11]q_{6j-5}^3 + \text{muw}[4,11]q_{6j-2}^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{muw}[7,11]q_{6j+1}^3 + \text{muw}[10,11]q_{6j+4}^3 \right) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 + \\ & + \left\{ 2\text{mu}[3,11]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j-1}^3 + \text{mu}[9,11]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_2 - \\ & \left\{ 2\text{mu}[3,11]q_{6j-3}^3 + 2\text{mu}[5,11]q_{6j-1}^3 + \text{mu}[9,11]q_{6j+3}^3 + 2\text{mu}[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.654}) \end{aligned}$$

$$G_{228}^{ij} = \left\{ -\frac{1}{6}m_3 I_3^2 \cos\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.655})$$

$$G_{229}^{ij} = \left\{ -\frac{1}{6}m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \quad (\text{E.656})$$

$$\begin{aligned}
3_{2211}^{ij} = & \left\{ \frac{1}{6}(j-1) m_3 l_3^3 \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(mvw[2,11]q_{6j-4}^3 + mvw[6,11]q_{6j}^3 + \right. \right. \\
& + mvw[8,11]q_{6j+2}^3 + mvw[11,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(muw[1,11]q_{6j-5}^3 + \right. \\
& + muw[4,11]q_{6j-2}^3 + muw[7,11]q_{6j+1}^3 + muw[10,11]q_{6j+4}^3 \left. \right) \dot{\theta}_1 - \left\{ 2mu[3,11]q_{6j-3}^3 + \right. \\
& + 2mu[5,11]q_{6j-1}^3 + mu[9,11]q_{6j+3}^3 + 2mu[11,11]q_{6j+5}^3 \left. \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) - \\
& - \left\{ 2mu[3,11]q_{6j-3}^3 + 2mu[5,11]q_{6j-1}^3 + mu[9,11]q_{6j+3}^3 + 2mu[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{\theta}_3 - \\
& - \frac{1}{2} \left\{ 2mu[3,11]q_{6j-3}^3 + 2mu[5,11]q_{6j-1}^3 + mu[9,11]q_{6j+3}^3 + 2mu[11,11]q_{6j+5}^3 \right\} \dot{q}_6^2
\end{aligned} \tag{E.657}$$

$$3_{2212}^{ij} = -G_{1222}^{ij} \tag{E.658}$$

$$3_{2213}^{ij} = -G_{1323}^{ij} \tag{E.659}$$

$$G_{2215}^{ij} = -G_{1522}^{ij} \tag{E.660}$$

$$G_{2217}^{ij} = -G_{1722}^{ij} \tag{E.661}$$

$$G_{2218}^{ij} = -G_{1822}^{ij} \tag{E.662}$$

$$G_{2219}^{ij} = -G_{1922}^{ij} \tag{E.663}$$

$$G_{2221}^{ij} = -G_{2122}^{ij} \tag{E.664}$$

$$G_{2223}^{ij} = \left(-2 mvw[11,12] \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right) \dot{\theta}_1 \tag{E.665}$$

$$\begin{aligned}
G_{231}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} q_{6n_1+3}^1 m_3 l_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) + \frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3^2 \cos \theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \right. \\
& - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3^2 \text{sen} \theta'_2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{6} (j-1) m_3 l_3^3 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) + \\
& + \left(2mu[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mu[6,12]q_{6j}^3 + mu[8,12]q_{6j+2}^3 + \right. \\
& + 2mu[12,12]q_{6j+6}^3 \left. \right) \cos^2(\theta'_2 + \theta'_3) + \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \Big) \text{sen}^2(\theta'_2 + \theta'_3) - \frac{1}{2} \Big(2muv[1,12]q_{6j-5}^3 + \\
& + 2muv[4,12]q_{6j-2}^3 + 2muv[7,12]q_{6j+1}^3 + 2muv[10,12]q_{6j+4}^3 \Big) \cos(\theta'_2 + \theta'_3) \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \Big\} \dot{\theta}_1 \\
& \hspace{15em} \text{(E.666)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{232}^{ij} &= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \cos\theta'_2 + \right. \\
& + \left(2mu[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mu[6,12]q_{6j}^3 + mu[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mu[12,12]q_{6j+6}^3 \right) + \\
& + \left. \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_2 \text{ (E.667)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{233}^{ij} &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\
& + \left. \left. 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_3 + \left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_3 - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \cos\theta'_3 - \right. \\
& - \left(2mu[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mu[6,12]q_{6j}^3 + mu[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mu[12,12]q_{6j+6}^3 \right) - \\
& + \left. \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_2 \text{ (E.668)}
\end{aligned}$$

$$G_{235}^{ij} = \left\{ \frac{1}{12} m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_2 \right\} \dot{\theta}_1 \hspace{15em} \text{(E.669)}$$

$$\begin{aligned}
G_{237}^{ij} &= -\left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_2 - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \cos\theta'_2 + \right. \\
& + \left(2mu[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mu[6,12]q_{6j}^3 + mu[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mu[12,12]q_{6j+6}^3 \right) + \\
& + \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \right) \Big\} \dot{\theta}_2 + \\
& + \left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_3 - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 I_3^2 \cos\theta'_3 \right\} \dot{\theta}_3 \hspace{5em} \text{(E.670)}
\end{aligned}$$

$$G_{238}^{ij} = \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_3^2 \cos\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \left\{ -\frac{1}{6} m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \hspace{5em} \text{(E.671)}$$

$$G_{239}^{ij} = \left\{ \frac{1}{6} m_3 I_3^2 \text{sen}\theta'_3 \right\} (\dot{\theta}_3 + \dot{q}_6^2) \hspace{15em} \text{(E.672)}$$

$$G_{2310}^{ij} = \left\{ \frac{1}{6} m_3 I_3^2 \text{sen}(\theta'_2 + \theta'_3) \right\} \dot{\theta}_1 \hspace{15em} \text{(E.673)}$$

$$\begin{aligned}
G_{2311}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left\{ \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \right) \dot{q}_6^2 + \left\{ -\frac{1}{6} (L_2 + q_{6n_2+1}^2) m_3 l_3^2 \text{sen}\theta_3' - \frac{1}{6} q_{6n_2+2}^2 m_3 l_3^2 \text{cos}\theta_3' - \right. \right. \\
& - \left(2mu[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mu[6,12]q_{6j}^3 + mu[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mu[12,12]q_{6j+6}^3 \right) - \\
& \left. \left. + \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{q}_5^1) + \\
& - \left\{ \left(2mu[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mu[6,12]q_{6j}^3 + mu[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mu[12,12]q_{6j+6}^3 \right) - \right. \\
& \left. \left. + \left(2mv[2,12]q_{6j-4}^3 + 2mv[6,12]q_{6j}^3 + mv[8,12]q_{6j+2}^3 + 2mv[12,12]q_{6j+6}^3 \right) \right\} \dot{\theta}_3 \quad (\text{E.674})
\end{aligned}$$

$$G_{2312}^{ij} = -G_{1223}^{ij} \quad (\text{E.675})$$

$$G_{2314}^{ij} = -G_{1423}^{ij} \quad (\text{E.676})$$

$$G_{2315}^{ij} = -G_{1523}^{ij} \quad (\text{E.677})$$

$$G_{2316}^{ij} = -G_{1623}^{ij} \quad (\text{E.678})$$

$$G_{2318}^{ij} = -G_{1823}^{ij} \quad (\text{E.679})$$

$$G_{2320}^{ij} = -G_{2023}^{ij} \quad (\text{E.680})$$

$$G_{2321}^{ij} = -G_{2123}^{ij} \quad (\text{E.681})$$

$$G_{2322}^{ij} = -G_{2223}^{ij} \quad (\text{E.682})$$

APENDICE F

$$J = \begin{bmatrix} J_{L11} & J_{L12} & J_{L13} & \dots & \dots & J_{L116} & J_{L117} \\ J_{L21} & J_{L22} & J_{L23} & \dots & \dots & J_{L216} & J_{L217} \\ J_{L31} & J_{L32} & J_{L33} & \dots & \dots & J_{L316} & J_{L317} \\ J_{A11} & J_{A12} & J_{A13} & \dots & \dots & J_{A116} & J_{A117} \\ J_{A21} & J_{A22} & J_{A23} & \dots & \dots & J_{A216} & J_{A217} \\ J_{A31} & J_{A32} & J_{A33} & \dots & \dots & J_{A316} & J_{A317} \end{bmatrix} \quad (F.1)$$

onde

$$J_{L11} = 0 \quad (F.2)$$

$$J_{L12} = (L_2 + q_1^2) \cos \theta'_2 - q_2^2 \text{sen} \theta'_2 - q_2^3 \text{sen} \theta'_{23} \quad (F.3)$$

$$J_{L13} = -q_2^3 \text{sen} \theta'_{23} \quad (F.4)$$

$$J_{L14} = 1 \quad (F.5)$$

$$J_{L15} = 0 \quad (F.6)$$

$$J_{L16} = 0 \quad (F.7)$$

$$J_{L17} = (L_2 + q_1^2) \cos \theta'_2 - q_2^2 \text{sen} \theta'_2 - q_2^3 \text{sen} \theta'_{23} \quad (F.8)$$

$$J_{L18} = \text{sen} \theta'_2 \quad (F.9)$$

$$J_{L19} = \cos \theta'_2 \quad (F.10)$$

$$J_{L110} = 0 \quad (F.11)$$

$$J_{L111} = -q_2^3 \text{sen} \theta'_{23} \quad (F.12)$$

$$J_{L112} = 1 \quad (F.13)$$

$$J_{L113} = \cos \theta'_{23} \quad (F.14)$$

$$J_{L114} = J_{L115} = J_{L116} = J_{L117} = 0 \quad (F.15)$$

$$J_{L21} = - (L_{y1} + q_2^1) \text{sen} \theta_1 - q_3^1 \cos \theta_1 - (L_2 + q_1^2) \cos \theta_1 \cos \theta'_2 + \\ + q_2^2 \cos \theta_1 \text{sen} \theta'_2 - (L_{z2} + q_3^2) \text{sen} \theta_1 - (L_3 + q_1^3) \cos \theta_1 \cos \theta'_{23} +$$

$$+ q_2^3 \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_{23} - q_3^3 \operatorname{sen}\theta_1 \quad (\text{F.16})$$

$$J_{L22} = (L_2 + q_1^2) \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_2 + q_2^2 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta'_2 + (L_3 + q_1^3) \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_{23} + q_2^3 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.17})$$

$$J_{L23} = (L_3 + q_1^3) \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_{23} + q_2^3 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.18})$$

$$J_{L24} = 0 \quad (\text{F.19})$$

$$J_{L25} = \cos\theta_1 \quad (\text{F.20})$$

$$J_{L26} = -\operatorname{sen}\theta_1 \quad (\text{F.21})$$

$$J_{L27} = (L_2 + q_1^2) \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_2 + q_2^2 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta'_2 + (L_3 + q_1^3) \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_{23} + q_2^3 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.22})$$

$$J_{L28} = -\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta'_2 \quad (\text{F.23})$$

$$J_{L29} = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_2 \quad (\text{F.24})$$

$$J_{L210} = \cos\theta_1 \quad (\text{F.25})$$

$$J_{L211} = (L_3 + q_1^3) \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_{23} + q_2^3 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.26})$$

$$J_{L212} = -\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.27})$$

$$J_{L213} = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_{23} \quad (\text{F.28})$$

$$J_{L214} = \cos\theta_1 \quad (\text{F.29})$$

$$J_{L215} = J_{L216} = J_{L217} = 0 \quad (\text{F.30})$$

$$J_{L31} = (L_{y1} + q_2^1) \cos\theta_1 + q_3^1 \operatorname{sen}\theta_1 - (L_2 + q_1^2) \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta'_2 - q_2^2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_2 + (L_{z2} + q_3^2) \cos\theta_1 - (L_3 + q_1^3) \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} + q_2^3 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_{23} - q_3^3 \cos\theta_1 \quad (\text{F.31})$$

$$J_{L32} = -(L_2 + q_1^2) \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_2 + q_2^2 \cos\theta_1 \cos\theta'_2 - (L_3 + q_1^3) \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_{23} - q_2^3 \cos\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.32})$$

$$J_{L33} = -(L_3 + q_1^3) \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_{23} - q_2^3 \cos\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.33})$$

$$J_{L34} = 0 \quad (\text{F.34})$$

$$J_{L35} = \operatorname{sen}\theta_1 \quad (\text{F.35})$$

$$J_{L36} = -\cos\theta_1 \quad (\text{F.36})$$

$$J_{L37} = -(L_2 + q_1^2) \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_2 + q_2^2 \cos\theta_1 \cos\theta'_2 - (L_3 + q_1^3) \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta'_{23} -$$

$$- q_2^3 \cos\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.37})$$

$$J_{L38} = \cos\theta_1 \cos\theta'_2 \quad (\text{F.38})$$

$$J_{L39} = \cos\theta_1 \text{sen}\theta'_2 \quad (\text{F.39})$$

$$J_{L310} = \text{sen}\theta_1 \quad (\text{F.40})$$

$$J_{L311} = - (L_3 + q_1^3) \cos\theta_1 \text{sen}\theta'_{23} - q_2^3 \cos\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.41})$$

$$J_{L312} = \cos\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.42})$$

$$J_{L313} = -\cos\theta_1 \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{F.43})$$

$$J_{L314} = \text{sen}\theta_1 \quad (\text{F.44})$$

$$J_{L315} = J_{L316} = J_{L317} = 0 \quad (\text{F.45})$$

$$J_{A11} = 1 \quad (\text{F.46})$$

$$J_{A12} = J_{A13} = J_{A14} = J_{A15} = J_{A16} = J_{A17} = J_{A18} = 0 \quad (\text{F.47})$$

$$J_{A19} = J_{A110} = J_{A111} = J_{A112} = J_{A113} = J_{A114} = 0 \quad (\text{F.48})$$

$$J_{A115} = \text{sen}\theta'_{23} \quad (\text{F.49})$$

$$J_{A116} = \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.50})$$

$$J_{A117} = 0 \quad (\text{F.51})$$

$$J_{A21} = 0 \quad (\text{F.52})$$

$$J_{A22} = \cos\theta_1 \quad (\text{F.53})$$

$$J_{A23} = \cos\theta_1 \quad (\text{F.54})$$

$$J_{A24} = J_{A25} = J_{A26} = 0 \quad (\text{F.55})$$

$$J_{A27} = \cos\theta_1 \quad (\text{F.56})$$

$$J_{A28} = J_{A29} = J_{A210} = 0 \quad (\text{F.57})$$

$$J_{A211} = \cos\theta_1 \quad (\text{F.58})$$

$$J_{A212} = J_{A213} = J_{A214} = 0 \quad (\text{F.59})$$

$$J_{A215} = \text{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.60})$$

$$J_{A216} = 0 \quad (\text{F.61})$$

$$J_{A217} = \cos\theta_1 \quad (\text{F.62})$$

$$J_{A31} = 0 \quad (\text{F.63})$$

$$J_{A32} = \text{sen}\theta_1 \quad (\text{F.64})$$

$$J_{A33} = \text{sen}\theta_1 \quad (\text{F.65})$$

$$J_{A34} = J_{A35} = J_{A36} = 0 \quad (\text{F.66})$$

$$J_{A37} = \text{sen}\theta_1 \quad (\text{F.67})$$

$$J_{A38} = J_{A39} = J_{A310} = 0 \quad (\text{F.68})$$

$$J_{A311} = \text{sen}\theta_1 \quad (\text{F.69})$$

$$J_{A312} = J_{A313} = J_{A314} = 0 \quad (\text{F.70})$$

$$J_{A315} = \cos\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.71})$$

$$J_{A316} = 0 \quad (\text{F.72})$$

$$J_{A317} = \text{sen}\theta_1 \quad (\text{F.73})$$

$$Q_{\theta_1} = \left[- (L_{y1} + q_2^1) \text{sen}\theta_1 - q_3^1 \cos\theta_1 - (L_2 + q_1^2) \cos\theta_1 \cos\theta'_2 + \right. \\ \left. + q_2^2 \cos\theta_1 \text{sen}\theta'_2 - (L_{z2} + q_3^2) \text{sen}\theta_1 - (L_3 + q_1^3) \cos\theta_1 \cos\theta'_{23} + \right. \\ \left. + q_2^3 \cos\theta_1 \text{sen}\theta'_{23} - q_3^3 \text{sen}\theta_1 \right] F_y + \left[(L_{y1} + q_2^1) \cos\theta_1 + q_3^1 \text{sen}\theta_1 - \right. \\ \left. - (L_2 + q_1^2) \text{sen}\theta_1 \cos\theta'_2 - q_2^2 \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta'_2 + (L_{z2} + q_3^2) \cos\theta_1 - \right. \\ \left. - (L_3 + q_1^3) \text{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} + q_2^3 \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta'_{23} - q_3^3 \cos\theta_1 \right] F_z + M_x \quad (\text{F.74})$$

$$Q_{\theta_2} = \left[(L_2 + q_1^2) \cos\theta'_2 - q_2^2 \text{sen}\theta'_2 - q_2^3 \text{sen}\theta'_{23} \right] F_x +$$

$$\begin{aligned} & \left[(L_2 + q_1^2) \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2' + q_2^2 \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2' + (L_3 + q_1^3) \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_{23}' + \right. \\ & \left. + q_2^3 \text{sen}\theta_1 \cos\theta_{23}' \right] F_y + \left[-(L_2 + q_1^2) \cos\theta_1 \text{sen}\theta_2' + q_2^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2' - \right. \\ & \left. - (L_3 + q_1^3) \cos\theta_1 \text{sen}\theta_{23}' - q_2^3 \cos\theta_1 \cos\theta_{23}' \right] F_z + M_y \cos\theta_1 + \\ & + M_z \text{sen}\theta_1 \end{aligned} \quad (\text{F.75})$$

$$\begin{aligned} Q_{e_3} = & \left[-q_2^3 \text{sen}\theta_{23}' \right] F_x + \left[(L_3 + q_1^3) \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_{23}' + q_2^3 \text{sen}\theta_1 \cos\theta_{23}' \right] F_y + \\ & + \left[-(L_3 + q_1^3) \cos\theta_1 \text{sen}\theta_{23}' - q_2^3 \cos\theta_1 \cos\theta_{23}' \right] F_z + M_y \cos\theta_1 + \\ & + M_z \text{sen}\theta_1 \end{aligned} \quad (\text{F.76})$$

$$Q_{q6n1+1} = F_x \quad (\text{F.77})$$

$$Q_{q6n1+2} = \left[\cos\theta_1 \right] F_y + \left[\text{sen}\theta_1 \right] F_z \quad (\text{F.78})$$

$$Q_{q6n1+3} = \left[-\text{sen}\theta_1 \right] F_y + \left[-\cos\theta_1 \right] F_z \quad (\text{F.79})$$

$$\begin{aligned} Q_{q6n1+5} = & \left[(L_2 + q_1^2) \cos\theta_2' - q_2^2 \text{sen}\theta_2' - q_2^3 \text{sen}\theta_{23}' \right] F_x + \\ & + \left[(L_2 + q_1^2) \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2' + q_2^2 \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2' + \right. \\ & \left. + (L_3 + q_1^3) \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_{23}' + q_2^3 \text{sen}\theta_1 \cos\theta_{23}' \right] F_y + \\ & + \left[-(L_2 + q_1^2) \cos\theta_1 \text{sen}\theta_2' + q_2^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2' - \right. \\ & \left. - (L_3 + q_1^3) \cos\theta_1 \text{sen}\theta_{23}' - q_2^3 \cos\theta_1 \cos\theta_{23}' \right] F_z + M_y \cos\theta_1 + \\ & + M_z \text{sen}\theta_1 \end{aligned} \quad (\text{F.80})$$

$$Q_{q6n2+1} = \left[\text{sen}\theta_2' \right] F_x + \left[-\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2' \right] F_y + \left[\cos\theta_1 \cos\theta_2' \right] F_z \quad (\text{F.81})$$

$$Q_{q6n2+2} = \left[\cos\theta_2' \right] F_x + \left[\text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2' \right] F_y + \left[\cos\theta_1 \text{sen}\theta_2' \right] F_z \quad (\text{F.82})$$

$$Q_{q6n2+3} = \left[\cos\theta_1 \right] F_y + \left[\text{sen}\theta_1 \right] F_z \quad (\text{F.83})$$

$$\begin{aligned}
Q_{q6n2+6} = & \left[-q_2^3 \text{sen}\theta'_{23} \right] F_x + \left[(L_3 + q_1^3) \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta'_{23} + \right. \\
& \left. + q_2^3 \text{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} \right] F_y + \left[- (L_3 + q_1^3) \cos\theta_1 \text{sen}\theta'_{23} - \right. \\
& \left. - q_2^3 \cos\theta_1 \cos\theta'_{23} \right] F_z + M_y \cos\theta_1 + M_z \text{sen}\theta_1
\end{aligned} \quad (\text{F.84})$$

$$Q_{q6n3+1} = F_x + \left[-\text{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} \right] F_y + \left[\cos\theta_1 \cos\theta'_{23} \right] F_z \quad (\text{F.85})$$

$$Q_{q6n3+2} = \left[\cos\theta'_{23} \right] F_x + \left[\text{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} \right] F_y + \left[-\cos\theta_1 \text{sen}\theta'_{23} \right] F_z \quad (\text{F.86})$$

$$Q_{q6n3+3} = \left[\cos\theta_1 \right] F_y + \left[\text{sen}\theta_1 \right] F_z \quad (\text{F.87})$$

$$Q_{q6n3+4} = M_x \text{sen}\theta'_{23} + M_y \text{sen}\theta_1 \cos\theta'_{23} + M_z \cos\theta_1 \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.88})$$

$$Q_{q6n3+5} = M_x \cos\theta'_{23} \quad (\text{F.89})$$

$$Q_{q6n3+6} = M_y \cos\theta_1 + M_z \text{sen}\theta_1 \quad (\text{F.90})$$

APÊNDICE G

Para ilustrar o procedimento apresentado no Capítulo 3, considerou-se como exemplo o manipulador planar contendo duas ligações mostrado na figura G.1. Como foi descrito anteriormente, as coordenadas generalizadas de um robô manipulador flexível, podem ser divididas em três grupos distintos. Neste exemplo tem-se oito coordenadas generalizadas, ϕ_1 e ϕ_2 representando as coordenadas dos atuadores, θ_1 e θ_2 representando as coordenadas que descrevem o movimento de rotação das ligações em torno dos eixos das juntas, e as coordenadas w_1 , w_2 , ψ_1 e ψ_2 que representam o movimento flexível das ligações.

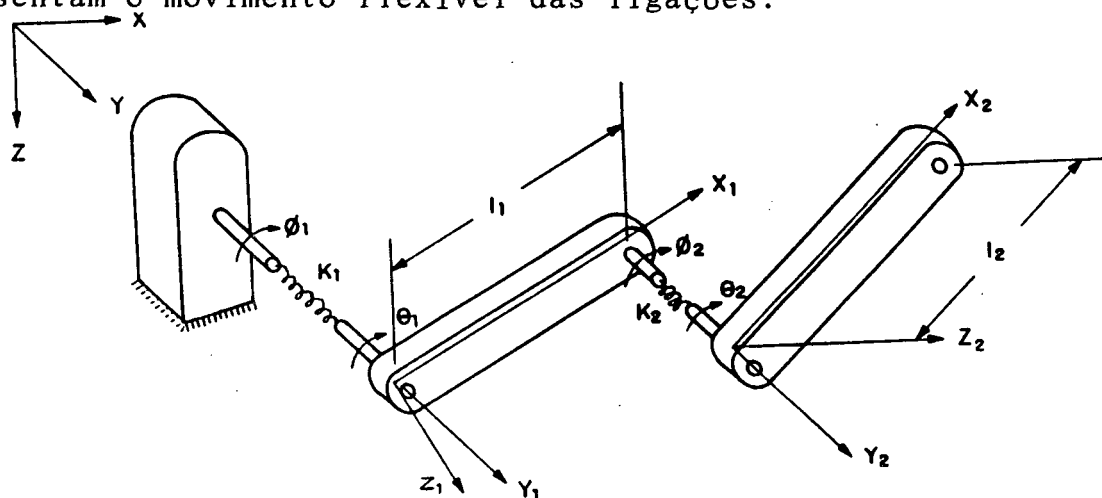


Fig. G.1 - Manipulador planar com duas ligações.

O vetor localização de algum ponto na ligação 1 pode ser expresso por:

$$P_1 = T_1^0 h_1 \quad (G.1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - z_1 \psi_1 \\ 0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 c\theta_1 - z_1 \psi_1 c\theta_1 + w_1 s\theta_1 \\ 0 \\ -x_1 s\theta_1 + z_1 \psi_1 s\theta_1 + w_1 c\theta_1 \end{bmatrix} \quad (G.2)$$

e para a ligação 2 tem-se:

$$P_2 = P_1 |_{x=11} + T_2^0 h_2 \quad (G.3)$$

onde

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & 0 & s\theta_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_{12} & 0 & c\theta_{12} \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 h_2 = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & 0 & s\theta_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_{12} & 0 & c\theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & -z_2 \psi_2 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 c\theta_{12} & -z_2 \psi_2 c\theta_{12} + w_2 s\theta_{12} \\ 0 & w_2 \\ -x_2 s\theta_{12} & w_2 c\theta_{12} + z_2 \psi_2 s\theta_{12} \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} l_1 c\theta_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11} c\theta_1 + w_1 |_{x=11} s\theta_1 + x_2 c\theta_{12} - z_2 \psi_2 c\theta_{12} + w_2 s\theta_{12} \\ 0 \\ -l_1 s\theta_1 + z_1 \psi_1 |_{x=11} s\theta_1 + w_1 |_{x=11} c\theta_1 - x_2 s\theta_{12} + z_2 \psi_2 s\theta_{12} + w_2 c\theta_{12} \end{bmatrix} \quad (G.4)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} l_1 c\theta_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11} c\theta_1 + w_1 |_{x=11} s\theta_1 + x_2 c\theta_{12} - z_2 \psi_2 c\theta_{12} + w_2 s\theta_{12} \\ 0 \\ -l_1 s\theta_1 + z_1 \psi_1 |_{x=11} s\theta_1 + w_1 |_{x=11} c\theta_1 - x_2 s\theta_{12} + z_2 \psi_2 s\theta_{12} + w_2 c\theta_{12} \end{bmatrix} \quad (G.5)$$

onde h_i é o vetor posição de um ponto qualquer da ligação i , com relação ao sistema de coordenadas local desta ligação, $s\theta_1 = \text{sen}\theta_1$, $c\theta_1 = \text{cos}\theta_1$, $s\theta_{12} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$, $c\theta_{12} = \text{cos}(\theta_1 + \theta_2)$

Diferenciando (G.2) e (G.5) em relação ao tempo tem-se:

$$\dot{P}_1 = \begin{bmatrix} -x_1 \dot{\theta}_1 s\theta_1 - z_1 \dot{\psi}_1 c\theta_1 + z_1 \psi_1 \dot{\theta}_1 s\theta_1 + \dot{w}_1 s\theta_1 + w_1 \dot{\theta}_1 c\theta_1 \\ 0 \\ -x_1 \dot{\theta}_1 c\theta_1 + z_1 \dot{\psi}_1 s\theta_1 + z_1 \psi_1 \dot{\theta}_1 c\theta_1 + \dot{w}_1 c\theta_1 - w_1 \dot{\theta}_1 s\theta_1 \end{bmatrix} \quad (G.6)$$

$$\dot{p}_2 = \begin{bmatrix} [w_1|_{x=11} c\theta_1 - (l_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) s\theta_1 - (x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_{12} + w_2 c\theta_{12}] \dot{\theta}_1 \\ + [w_2 c\theta_{12} - (x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_{12}] \dot{\theta}_2 + \dot{w}_1|_{x=11} s\theta_1 + w_2 \dot{s}\theta_{12} - z_1 \dot{\psi}_1|_{x=11} c\theta_1 \\ - z_2 \dot{\psi}_2 c\theta_{12} \\ 0 \\ [-(l_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) c\theta_1 - w_1|_{x=11} s\theta_1 - (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_{12} - w_2 s\theta_{12}] \dot{\theta}_1 + \\ + [-(x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_{12} - w_2 s\theta_{12}] \dot{\theta}_2 + \dot{w}_1|_{x=11} c\theta_1 + w_2 \dot{c}\theta_{12} + z_1 \dot{\psi}_1|_{x=11} s\theta_1 + \\ + z_2 \dot{\psi}_2 s\theta_{12} \end{bmatrix} \quad (G.7)$$

comparando (3.48) e (3.49) com (3.21) pode-se obter:

$$J_1 = \begin{bmatrix} w_1 c\theta_1 + z_1 \psi_1 s\theta_1 - x_1 s\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 & -z_1 c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_1 s\theta_1 + z_1 \psi_1 c\theta_1 - x_1 c\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 & z_1 s\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (G.8)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} w_1|_{x=11} c\theta_1 - (l_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) s\theta_1 - & w_2 c\theta_{12} - x_2 s\theta_{12} + & s\theta_1 & s\theta_{12} \\ -(x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_{12} + w_2 c\theta_{12} & + z_2 \psi_2 s\theta_{12} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_1|_{x=11} s\theta_1 - (l_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) c\theta_1 - & z_2 \psi_2 c\theta_{12} - x_2 c\theta_{12} & c\theta_1 & c\theta_{12} \\ -(x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_{12} - w_2 s\theta_{12} & - w_2 s\theta_{12} & & \\ -z_1 c\theta_1 & -z_2 c\theta_{12} \\ 0 & 0 \\ z_1 s\theta_1 & z_2 s\theta_{12} \end{bmatrix} \quad (G.9)$$

Com as matrizes Jacobiano determinadas, e por intermédio da expressão (3.23), obtêm-se as matrizes inerciais das ligações que são:

$$H_1 = \rho_1 A_1 \begin{bmatrix} w_1^2 + z_1^2 \psi_1^2 + x_1^2 - & 0 & z_1 \psi_1 - x_1 & 0 & -w_1 z_1 & 0 \\ -2z_1 \psi_1 x_1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 \psi_1 - x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_1 z_1 & 0 & 0 & 0 & z_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (G.10)$$

$$H_2 = \rho_2 A_2 \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{14} & H_{24} & H_{34} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{15} & H_{25} & H_{35} & H_{45} & H_{55} & H_{56} \\ H_{16} & H_{26} & H_{36} & H_{46} & H_{56} & H_{66} \end{bmatrix} \quad (G.11)$$

onde:

$$H_{11} = (l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11})^2 + w_1^2 |_{x=11} + (x_2 - z_2 \psi_2)^2 + w_2^2 + 2(l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) w_2 s\theta_2 \\ - 2(l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11})(x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 - 2(x_2 - z_2 \psi_2) w_1 |_{x=11} s\theta_2 \\ + 2w_2 w_1 |_{x=11} c\theta_2$$

$$H_{12} = (l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) w_2 s\theta_2 + (l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11})(x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 + w_2 w_1 |_{x=11} c\theta_2 \\ - (x_2 - z_2 \psi_2) w_1 |_{x=11} s\theta_2 + (x_2 - z_2 \psi_2)^2 + w_2^2$$

$$H_{13} = - (l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) - (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 - w_2 s\theta_2$$

$$H_{14} = - (l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) + w_1 |_{x=11} s\theta_2$$

$$H_{15} = - z_1 w_2 c\theta_2 - z_1 w_1 |_{x=11} + z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2$$

$$H_{16} = - z_1 w_1 |_{x=11} - z_1 w_2 c\theta_2 + z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2$$

$$H_{22} = x_2^2 + z_2^2 \psi_2^2 + w_2^2 - 2x_2 z_2 \psi_2, \quad H_{23} = - (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 - w_2 s\theta_2$$

$$H_{24} = - (x_2 - z_2 \psi_2), \quad H_{25} = - z_1 w_2 c\theta_2 + z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2, \quad H_{26} = - z_2 w_2$$

$$H_{33} = 1, \quad H_{34} = c\theta_2, \quad H_{35} = 0, \quad H_{36} = z_2 s\theta_2, \quad H_{44} = 1, \quad H_{45} = - z_1 s\theta_2$$

$$H_{46} = 0, \quad H_{55} = z_1^2, \quad H_{56} = z_1 z_2 c\theta_2, \quad H_{66} = z_2^2$$

Os termos devidos ao efeito da gravidade são obtidos através da expressão (3.37), e podem ser agrupados nos seguintes vetores:

$$G_1 = - \int_0^1 \rho_1 A_1 g [-(x_1 - z_1 \psi_1) c\theta_1 - w_1 s\theta_1 \quad 0 \quad c\theta_1 \quad 0 \quad z_1 s\theta_1 \quad 0]^T dx \quad (G.12)$$

$$G_2 = - \int_0^1 \rho_2 A_2 g [-(l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_1 - w_1 |_{x=11} s\theta_1 \quad -(x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_{12} - w_2 s\theta_{12} \\ c\theta_1 \quad c\theta_{12} \quad z_1 s\theta_1 \quad z_2 s\theta_{12}]^T dx \quad (G.13)$$

onde $g = [0 \quad 0 \quad g]^T$

Os termos oriundos da deformação elástica das ligações, obtidos através da expressão (3.38), são dados por:

$$\begin{aligned} \int_0^1 k_1 G_1 A_1 (w_{1,xx} - \psi_{1,x}) dx & \quad \text{para } q' = w_{1,x} \\ \int_0^1 [E_1 I_1 \psi_{1,xx} + k_1 G_1 A_1 (w_{1,x} - \psi_1)] dx & \quad \text{para } q' = \psi_{1,x} \quad (G.14) \\ \int_0^1 k_2 G_2 A_2 (w_{2,xx} - \psi_{2,x}) dx & \quad \text{para } q' = w_{2,x} \\ \int_0^1 [E_2 I_2 \psi_{2,xx} + k_2 G_2 A_2 (w_{2,x} - \psi_2)] dx & \quad \text{para } q' = \psi_{2,x} \end{aligned}$$

os termos devidos a deformação elástica das juntas, obtidas através da expressão (3.41), são dados por:

$$\begin{aligned} K_1 (\theta_1 - \phi_1) & \quad \text{para } q = \theta_1 \\ K_2 (\theta_2 - \phi_2) & \quad \text{para } q = \theta_2 \\ -K_1 (\theta_1 - \phi_1) & \quad \text{para } q = \phi_1 \\ -K_2 (\theta_2 - \phi_2) & \quad \text{para } q = \phi_2 \end{aligned} \quad (G.15)$$

As matrizes inerciais dos atuadores B_1 e B_2 são dadas por:

$$B_1 = \begin{bmatrix} I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} \end{bmatrix} \quad (G.16)$$

Com as matrizes inerciais obtidas, o próximo passo é a

determinação dos termos provenientes dos efeitos de Coriolis e centrífugos, que são obtidos através da expressão (3.44), onde o termo h_{ijk_s} para $k = s$ representa o torque ou força ao longo da coordenada j , decorrente da força centrífuga devida a velocidade na coordenada k (ou s). Para $k \neq s$, o termo anterior refere-se ao torque ou força ao longo da coordenada j , decorrente da força de Coriolis, gerada pelas velocidades nas coordenadas k e s . O índice i significa em qual ligação esta atuando a força. Estes termos são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned}
 h_{1111} &= h_{1112} = 0, \quad h_{1113} = \int_0^1 \rho_1 A_1 [2w_1] dx, \quad h_{1114} = h_{1116} = 0 \\
 h_{1115} &= \int_0^1 \rho_1 A_1 2z_1 [z_1 \psi_1 - x_1] dx \\
 h_{1121} &= h_{1122} = h_{1123} = h_{1124} = h_{1125} = h_{1126} = 0 \\
 h_{1131} &= h_{1132} = h_{1133} = h_{1134} = h_{1136} = 0, \quad h_{1135} = \int_0^1 \rho_1 A_1 z_1 dx \\
 h_{1141} &= h_{1142} = h_{1143} = h_{1144} = h_{1145} = h_{1146} = 0 \\
 h_{1151} &= h_{1152} = 0, \quad h_{1153} = -\int_0^1 \rho_1 A_1 z_1 dx, \quad h_{1154} = h_{1155} = 0 \\
 h_{1156} &= 0 \\
 h_{116k} &= 0 \quad k = 1 \dots 6 \\
 h_{12jk} &= 0 \quad j = k = 1 \dots 6 \\
 h_{1311} &= -\int_0^1 \rho_1 A_1 w_1 dx, \quad h_{1312} = h_{1313} = h_{1314} = 0 \\
 h_{1316} &= h_{1317} = h_{1318} = 0, \quad h_{1315} = \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_1 A_1 z_1 dx \\
 h_{132k} &= 0 \quad k = 1 \dots 6 \\
 h_{133k} &= 0 \quad " \\
 h_{134k} &= 0 \quad " \\
 h_{1351} &= -\int_0^1 \rho_1 A_1 x_1 dx, \quad h_{1352} = h_{1353} = h_{1354} = h_{1355} = h_{1356} = 0 \\
 h_{136k} &= 0 \quad k = 1 \dots 6 \\
 h_{14jk} &= 0 \quad j = k = 1 \dots 6
 \end{aligned}$$

$$h_{1511} = -\int_0^1 \rho_1 A_1 z_1 [z_1 \psi_1 - x_1] dx, \quad h_{1512} = 0, \quad h_{1513} = -\frac{3}{2} \int_0^1 \rho_1 A_1 z_1 dx,$$

$$h_{1514} = h_{1515} = h_{1516} = 0$$

$$h_{152k} = 0 \quad k = 1 \dots 6$$

$$h_{1531} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_1 A_1 z_1 dx, \quad h_{1532} = h_{1533} = h_{1534} = h_{1535} = h_{1536} = 0$$

$$h_{15jk} = 0 \quad j = 4 \dots 6, \quad k = 1 \dots 6$$

$$h_{16jk} = 0 \quad j = k = 1 \dots 6$$

$$h_{2111} = 0,$$

$$h_{2112} = 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11})(x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2 + w_2 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2 - w_1 |_{x=11} (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 - w_1 |_{x=11} w_2 s\theta_2] dx,$$

$$h_{2113} = 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_1 |_{x=11} - (x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2 + w_2 c\theta_2] dx,$$

$$h_{2114} = 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2 + (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) s\theta_2 + w_1 |_{x=11} c\theta_2] dx,$$

$$h_{2115} = 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1^2 \psi_1 |_{x=11} - z_1 I_1 + z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 - z_1 w_2 s\theta_2] dx,$$

$$h_{2116} = 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [-z_2 (x_2 - z_2 \psi_2) - z_2 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2 - z_2 w_1 |_{x=11} s\theta_2] dx,$$

$$h_{2121} = 0,$$

$$h_{2122} = \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) w_2 + (x_2 - z_2 \psi_2) w_1 |_{x=11}] c\theta_2 - [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11})(x_2 - z_2 \psi_2) + w_2 w_1 |_{x=11}] s\theta_2 \} dx,$$

$$h_{2123} = \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2 c\theta_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2] dx,$$

$$h_{2124} = \int_0^1 \rho_2 A_2 [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) s\theta_2 + w_1 |_{x=11} c\theta_2 + 2w_2] dx,$$

$$h_{2125} = \int_0^1 \rho_2 A_2 [-z_1 w_2 s\theta_2 - z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2] dx,$$

$$h_{2126} = \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 w_1 |_{x=11} s\theta_2 - z_2 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2 - 2(x_2 - z_2 \psi_2) z_2] dx,$$

$$h_{2131} = 0, \quad h_{2132} = \int_0^1 \rho_2 A_2 [(x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2 - w_2 c\theta_2] dx, \quad h_{2133} = 0$$

$$h_{2134} = -\int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, \quad h_{2135} = \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1] dx,$$

$$\begin{aligned}
h_{2136} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, \\
h_{2141} &= 0, \quad h_{2142} = \int_0^1 \rho_2 A_2 [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) s\theta_2 + w_1 |_{x=11} c\theta_2] dx, \\
h_{2143} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, \quad h_{2144} = 0, \quad h_{2145} = \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, \\
h_{2146} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, \\
h_{2151} &= 0, \quad h_{2152} = \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 + z_1 w_2 s\theta_2] dx, \\
h_{2153} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1] dx, \quad h_{2154} = -\int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, \quad h_{2155} = 0, \\
h_{2156} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, \\
h_{2161} &= 0, \quad h_{2162} = \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 w_1 |_{x=11} s\theta_2 - z_2 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2] dx, \\
h_{2163} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, \quad h_{2164} = -\int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, \\
h_{2165} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, \quad h_{2166} = 0, \\
h_{2211} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 \{ [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) (x_2 - z_2 \psi_2) - w_2 w_1 |_{x=11}] s\theta_2 + \\
&\quad + [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) w_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) w_1 |_{x=11}] c\theta_2 \} dx, \\
h_{2212} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) w_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) w_1 |_{x=11}] c\theta_2 - \\
&\quad - [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) (x_2 - z_2 \psi_2) + w_2 w_1 |_{x=11}] s\theta_2 \} dx, \\
h_{2213} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2 c\theta_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2] dx, \\
h_{2214} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) s\theta_2 + w_1 |_{x=11} c\theta_2 + 4w_2] dx, \\
h_{2215} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [-z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 - z_1 w_2 s\theta_2] dx, \\
h_{2216} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 w_1 |_{x=11} s\theta_2 - z_2 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2 - 4z_2 (x_2 - z_2 \psi_2)] dx, \\
h_{2221} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) w_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) w_1 |_{x=11}] c\theta_2 - \\
&\quad - [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) (x_2 - z_2 \psi_2) + w_2 w_1 |_{x=11}] s\theta_2 \} dx, \\
h_{2222} &= 0, \quad h_{2223} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [(x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2 - w_2 c\theta_2] dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{2224} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [2w_2] dx, & h_{2225} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 + z_1 w_2 s\theta_2] dx, \\
h_{2226} &= -2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (x_2 - z_2 \psi_2)] dx, \\
h_{2231} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2 c\theta_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2] dx, \\
h_{2232} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [(x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2 - w_2 c\theta_2] dx, \\
h_{2233} &= 0, & h_{2234} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, & h_{2235} &= 0, \\
h_{2236} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, \\
h_{2241} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [(I_1 - x_1 \psi_1 |_{x=11}) s\theta_2 + w_1 |_{x=11} c\theta_2] dx, & h_{2242} &= 0, \\
h_{2243} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, & h_{2244} &= 0, & h_{2245} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, \\
h_{2246} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, \\
h_{2251} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [-z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 - z_1 w_2 s\theta_2] dx, \\
h_{2252} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 + z_1 w_2 s\theta_2] dx, & h_{2253} &= 0 \\
h_{2254} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, & h_{2255} &= 0, & h_{2256} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, \\
h_{2261} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2 - z_2 w_1 |_{x=11} s\theta_2] dx, & h_{2262} &= 0, \\
h_{2263} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, & h_{2264} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, \\
h_{2265} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, & h_{2266} &= 0 \\
h_{2311} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [w_1 |_{x=11} - (x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2 + w_2 c\theta_2] dx, \\
h_{2312} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [(x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2 - w_2 c\theta_2] dx, & h_{2313} &= 0, \\
h_{2314} &= -\frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, & h_{2315} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1] dx, \\
h_{2316} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, \\
h_{2321} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [(x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2 - w_2 c\theta_2] dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{2322} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [(x_2 - z_2 \psi_2) s\theta_2 - w_2 c\theta_2] dx, & h_{2323} &= 0, \\
h_{2324} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, & h_{2325} &= 0, & h_{2326} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, \\
h_{233k} &= 0 & k &= 1 \dots 6 \\
h_{2341} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, & h_{2342} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, \\
h_{234k} &= 0 & k &= 3 \dots 6 \\
h_{2351} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1] dx, \\
h_{235k} &= 0 & k &= 2 \dots 6 \\
h_{2361} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, & h_{2362} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, \\
h_{236k} &= 0 & k &= 3 \dots 6 \\
h_{2411} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2 + (l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) s\theta_2 + w_1 |_{x=11} c\theta_2] dx, \\
h_{2412} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [(l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) s\theta_2 + w_1 |_{x=11} c\theta_2 - 2w_2] dx, \\
h_{2413} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, & h_{2414} &= 0, & h_{2415} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, \\
h_{2416} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, \\
h_{2421} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [(l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) s\theta_2 + w_1 |_{x=11} c\theta_2 + 2w_2] dx, \\
h_{2422} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2] dx, & h_{2423} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, & h_{2424} &= 0, \\
h_{2425} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, & h_{2426} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, \\
h_{2431} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, & h_{2432} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [s\theta_2] dx, \\
h_{243k} &= 0 & k &= 3 \dots 6 \\
h_{244k} &= 0 & k &= 1 \dots 6 \\
h_{2451} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, & h_{2452} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, \\
h_{245k} &= 0 & k &= 3 \dots 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{2461} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, & h_{2462} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, \\
h_{246k} &= 0 & k &= 3 \dots 6 \\
h_{2511} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) - z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 + z_1 w_2 s\theta_2] dx, \\
h_{2512} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 + z_1 w_2 s\theta_2] dx, \\
h_{2513} &= -\frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1] dx, & h_{2514} &= -\frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, & h_{2516} &= 0, \\
h_{2521} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 w_2 s\theta_2 + z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2] dx, \\
h_{2522} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 + z_1 w_2 s\theta_2] dx, \\
h_{2523} &= 0, & h_{2524} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, & h_{2525} &= 0, \\
h_{2526} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, \\
h_{2531} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1] dx, \\
h_{253k} &= 0 & k &= 2 \dots 6 \\
h_{2541} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, & h_{2542} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx, \\
h_{254k} &= 0 & k &= 3 \dots 6 \\
h_{255k} &= 0 & k &= 1 \dots 6 \\
h_{2561} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, & h_{2562} &= -\int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, \\
h_{256k} &= 0 & k &= 3 \dots 6 \\
h_{2611} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (x_2 - z_2 \psi_2) - z_2 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2 - z_2 w_1 |_{x=11} s\theta_2] dx, \\
h_{2612} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 w_1 |_{x=11} s\theta_2 - z_2 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2] dx, \\
h_{2613} &= -\frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, & h_{2614} &= -\frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, \\
h_{2615} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, \\
h_{261k} &= 0 & k &= 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{2621} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2 - z_2 w_1 |_{x=11} s\theta_2 + 4z_2 (x_2 - z_2 \psi_2)] dx, \\
h_{2622} &= \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (x_2 - z_2 \psi_2)] dx, & h_{2623} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, \\
h_{2624} &= -\frac{3}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, & h_{2625} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, \\
h_{262k} &= 0 & k &= 6 \\
h_{2631} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, & h_{2632} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c\theta_2] dx, \\
h_{263k} &= 0 & k &= 3 \dots 6 \\
h_{2641} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, & h_{2642} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx, \\
h_{264k} &= 0 & k &= 3 \dots 6 \\
h_{2651} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, & h_{2652} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx, \\
h_{265k} &= 0 & k &= 3 \dots 6 \\
h_{266k} &= 0 & k &= 1 \dots 6
\end{aligned}$$

Agora, com o auxílio das equações (3.42) e (3.43) do artigo anterior, monta-se as equações do movimento, que resultam da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \rho_1 A_1 (w_1^2 + z_1^2 \psi_1^2 + x_1^2 - 2z_1 \psi_1 x_1) dx \ddot{\theta}_1 - \int_0^1 \rho_1 A_1 (x_1 - z_1 \psi_1) dx \ddot{w}_1 - \\
&\int_0^1 \rho_1 A_1 w_1 z_1 dx \ddot{\psi}_1 + \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11})^2 + w_1^2 |_{x=11} + (x_2 - z_2 \psi_2)^2 + \\
&+ w_2^2 - 2[(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11})(x_2 - z_2 \psi_2) - w_2 w_1 |_{x=11}] c\theta_2 + 2[(I_1 - \\
&- z_1 \psi_1 |_{x=11}) w_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) w_1 |_{x=11}] s\theta_2 \} dx \ddot{\theta}_1 + \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ (x_2 - \\
&- z_2 \psi_2) + w_2 + [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) w_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) w_1 |_{x=11}] s\theta_2 + \\
&+ [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11})(x_2 - z_2 \psi_2) + w_2 w_1 |_{x=11}] c\theta_2 \} dx \ddot{\theta}_2 - \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ (I_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z_1 \psi_1|_{x=11}) + (x_2 - z_2 \psi_2) c \theta_2 + w_2 s \theta_2 \} dx \ddot{w}_1 - \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ (I_1 - \\
& - z_1 \psi_1|_{x=11}) c \theta_2 - w_1|_{x=11} s \theta_2 + (x_2 - z_2 \psi_2) \} dx \ddot{w}_2 + \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ z_1 (x_2 - \\
& - z_2 \psi_2) s \theta_2 - z_1 w_1|_{x=11} - z_1 w_2 c \theta_2 \} dx \ddot{\psi}_1 - \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ z_2 (I_1 - \\
& - z_1 \psi_1|_{x=11}) s \theta_2 + z_2 w_1|_{x=11} c \theta_2 + w_2 z_2 \} dx \ddot{\psi}_2 - K_1 (\theta_1 - \phi_1) + \\
& + \int_0^1 \rho_1 A_1 g [(x_1 - z_1 \psi_1) c \theta_1 - w_1 s \theta_1] dx + \int_0^1 \rho_2 A_2 g [(I_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) c \theta_1 - \\
& - w_1|_{x=11} s \theta_1] dx + 2 \int_0^1 \rho_1 A_1 [w_1] dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_1 - 2 \int_0^1 \rho_1 A_1 [z_1 (x_1 - z_1 \psi_1)] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_1 \\
& + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [(I_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) (x_2 - z_2 \psi_2) s \theta_2 + w_2 (I_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) c \theta_2 - \\
& - w_1|_{x=11} (x_2 - z_2 \psi_2) c \theta_2 - w_1|_{x=11} w_2 s \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_1|_{x=11} - \\
& - (x_2 - z_2 \psi_2) c \theta_2 + w_2 c \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_1 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2 + (I_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) s \theta_2 + \\
& + w_1|_{x=11} c \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_2 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c \theta_2 - z_1 w_2 s \theta_2 - z_1 (I_1 - \\
& - z_1 \psi_1|_{x=11})] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_1 - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (x_2 - z_2 \psi_2) + z_2 w_1|_{x=11} s \theta_2 + \\
& + z_2 (I_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) c \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_2 + \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ [(I_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) w_2 + \\
& + (x_2 - z_2 \psi_2) w_1|_{x=11}] c \theta_2 - [(I_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) (x_2 - z_2 \psi_2) + \\
& + w_2 w_1|_{x=11}] s \theta_2 \} dx \dot{\theta}_2^2 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [(I_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) s \theta_2 + w_1|_{x=11} c \theta_2 + \\
& + w_2] dx \dot{\theta}_2 \dot{w}_2 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 w_1|_{x=11} s \theta_2 - z_2 (I_1 - z_1 \psi_1|_{x=11}) c \theta_2 - z_2 (x_2 - \\
& - z_2 \psi_2)] dx \dot{\theta}_2 \dot{\psi}_2 = 0 \tag{G.17}
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \rho_2 A_2 \{ (I_1 - z_1 \psi_1|_{x=11})^2 + w_1^2|_{x=11} + (x_2 - z_2 \psi_2)^2 + w_2^2 - 2[(I_1 -$$

$$\begin{aligned}
& - z_1 \psi_1 |_{x=11} (x_2 - z_2 \psi_2) - w_2 w_1 |_{x=11}] c \theta_2 + 2 [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) w_2 - \\
& - (x_2 - z_2 \psi_2) w_1 |_{x=11}] s \theta_2 \} dx \ddot{\theta}_1 + \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ (x_2 - z_2 \psi_2)^2 + w_2^2 \} dx \ddot{\theta}_2 - \\
& - \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ (x_2 - z_2 \psi_2) c \theta_2 - w_2 s \theta_2 \} dx \ddot{w}_1 - \int_0^1 \rho_2 A_2 (x_2 - z_2 \psi_2) dx \ddot{w}_2 + \\
& + \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) s \theta_2 - z_1 w_2 c \theta_2 \} dx \ddot{\psi}_1 - \int_0^1 \rho_2 A_2 (z_2 w_2) dx \ddot{\psi}_2 - \\
& - K_2 (\theta_2 - \phi_2) + \int_0^1 \rho_2 A_2 g [w_2 s \theta_{12} + (x_2 - z_2 \psi_2) c \theta_{12}] dx - \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ [(I_1 - \\
& - z_1 \psi_1 |_{x=11}) (x_2 - z_2 \psi_2) - w_2 w_1 |_{x=11}] s \theta_2 + [(I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) w_2 - (x_2 - \\
& - z_2 \psi_2) w_1 |_{x=11}] c \theta_2 \} dx \dot{\theta}_1^2 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2 c \theta_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) s \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_1 + \\
& + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_2 - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c \theta_2 + z_1 w_2 s \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_1 - \\
& - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (x_2 - z_2 \psi_2)] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_2 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2] dx \dot{\theta}_2 \dot{w}_2 - \\
& - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (x_2 - z_2 \psi_2)] dx \dot{\theta}_2 \dot{\psi}_2 = 0 \tag{G.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \rho_1 A_1 \{ -(x_1 - z_1 \psi_1) \} dx \ddot{\theta}_1 + \int_0^1 \rho_1 A_1 dx \ddot{w}_1 + \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ -(I_1 - \\
& - z_1 \psi_1 |_{x=11}) + (x_2 - z_2 \psi_2) c \theta_2 + w_2 s \theta_2 \} dx \ddot{\theta}_1 - \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2 s \theta_2 - (x_2 - \\
& - z_2 \psi_2) c \theta_2] dx \ddot{\theta}_2 + \int_0^1 \rho_2 A_2 dx \ddot{w}_1 + \int_0^1 \rho_2 A_2 [c \theta_2] dx \ddot{w}_2 + \int_0^1 \rho_2 A_2 z_2 s \theta_2 dx \ddot{\psi}_2 - \\
& - \int_0^1 \rho_1 A_1 g [c \theta_1] dx - \int_0^1 \rho_2 A_2 g [c \theta_1] dx - \int_0^1 \rho_1 A_1 [w_1] \dot{\theta}_1^2 dx + \\
& + 2 \int_0^1 \rho_1 A_1 [z_1] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_1 - \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_1 |_{x=11} - (x_2 - z_2 \psi_2) s \theta_2 + w_2 c \theta_2] dx \dot{\theta}_1^2 + \\
& + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [(x_2 - z_2 \psi_2) s \theta_2 - w_2 c \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [s \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_2 + \\
& + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_1 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_2 - \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2 c \theta_2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (x_2 - z_2 \psi_2) s \theta_2] dx \dot{\theta}_2^2 - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [s \theta_2] dx \dot{\theta}_2 \dot{w}_2 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 c \theta_2] dx \dot{\theta}_2 \dot{\psi}_2 \\
& + \int_0^1 k_1 G_1 A_1 (w_{1,xx} - \psi_{1,x}) dx = 0 \quad (G.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ w_1 |_{x=11} s \theta_2 - (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c \theta_2 - (x_2 - z_2 \psi_2) \} dx \ddot{\theta}_1 - \\
& - \int_0^1 \rho_2 A_2 (x_2 - z_2 \psi_2) dx \ddot{\theta}_2 - \int_0^1 \rho_2 A_2 [c \theta_2] dx \ddot{w}_1 + \int_0^1 \rho_2 A_2 dx \ddot{w}_2 - \\
& - \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 s \theta_2] dx \ddot{\psi}_1 - \int_0^1 \rho_2 A_2 g [c \theta_{12}] dx - \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2 + (I_1 - \\
& - z_1 \psi_1 |_{x=11}) s \theta_2 + w_1 |_{x=11} c \theta_2] dx \dot{\theta}_1^2 - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\
& + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [s \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_1 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c \theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_1 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_2 - \\
& - \int_0^1 \rho_2 A_2 [w_2] dx \dot{\theta}_2^2 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx \dot{\theta}_2 \dot{\psi}_2 + \\
& + \int_0^1 k_2 G_2 A_2 (w_{2,xx} - \psi_{2,x}) dx = 0 \quad (G.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \rho_1 A_1 (-z_1 w_1) dx \ddot{\theta}_1 + \int_0^1 \rho_1 A_1 z_1^2 \ddot{\psi}_1 dx + \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) s \theta_2 - \\
& - z_1 w_1 |_{x=11} - z_1 w_2 c \theta_2 \} dx \ddot{\theta}_1 + \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) s \theta_2 - z_1 w_2 c \theta_2] dx \ddot{\theta}_2 - \\
& - \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 s \theta_2] dx \ddot{w}_2 - \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1^2] dx \ddot{\psi}_1 + \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 c \theta_2] dx \ddot{\psi}_2 - \\
& - \int_0^1 \rho_1 A_1 g [z_1 s \theta_1] dx - \int_0^1 \rho_2 A_2 g [z_1 s \theta_1] dx + \int_0^1 \rho_1 A_1 z_1 [x_1 - \\
& - z_1 \psi_1 |_{x=11}] dx \dot{\theta}_1^2 + \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (I_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) - z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c \theta_2 + \\
& + z_1 w_2 s \theta_2] dx \dot{\theta}_1^2 - 2 \int_0^1 \rho_1 A_1 [z_1] dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_1 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c \theta_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z_1 w_2 s\theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1] dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_1 - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_2 - \\
& - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_2 + \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 (x_2 - z_2 \psi_2) c\theta_2 + z_1 w_2 s\theta_2] dx \dot{\theta}_2^2 \\
& - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 c\theta_2] dx \dot{\theta}_2 \dot{w}_2 - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] \dot{\theta}_2 \dot{\psi}_2 dx + \\
& + \int_0^1 \left[E_1 I_1 \psi_{1,xx} + k_1 G_1 A_1 (w_{1,x} - \psi_1) \right] dx = 0 \tag{G.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \rho_2 A_2 \{ -[z_2 (l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) s\theta_2 + z_2 w_1 |_{x=11} c\theta_2 + z_2 w_2] dx \ddot{\theta}_1 - \\
& - \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 w_2] dx \ddot{\theta}_2 + \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 s\theta_2] dx \ddot{w}_1 + \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 c\theta_2] dx \ddot{\psi}_2 - \\
& - \int_0^1 \rho_2 A_2 g [z_2 s\theta_{12}] dx + \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (x_2 - z_2 \psi_2) - z_2 (l_1 - z_1 \psi_1 |_{x=11}) c\theta_2 - \\
& - z_2 w_1 |_{x=11} s\theta_2] dx \dot{\theta}_1^2 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (x_2 - z_2 \psi_2)] dx \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\
& - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 z_2 c\theta_2 dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_1 - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 z_2 dx \dot{\theta}_1 \dot{w}_2 + 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 z_1 z_2 s\theta_2 dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_1 + \\
& + \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2 (x_2 - z_2 \psi_2)] dx \dot{\theta}_2^2 - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_2] dx \dot{\theta}_2 \dot{w}_2 - \\
& - 2 \int_0^1 \rho_2 A_2 [z_1 z_2 s\theta_2] dx \dot{\theta}_1 \dot{\psi}_2 + \\
& + \int_0^1 \left[E_2 I_2 \psi_{2,xx} + k_2 G_2 A_2 (w_{2,xx} - \psi_2) \right] dx = 0 \tag{G.22}
\end{aligned}$$

$$I_{yy1} \ddot{\phi}_1 + K_1 (\theta_1 - \phi_1) = \tau_1 \tag{G.23}$$

$$I_{yy2} \ddot{\phi}_2 + K_2 (\theta_2 - \phi_2) = \tau_2 \tag{G.24}$$